矩 阵 论

主讲教师：徐乐

2014年12月10日星期三

上讲回顾

- 第11讲 矩阵三角分解
  - Gauss消元法的矩阵形式
  - *LU*分解与*LDU*分解
  - 其他三角分解

❖n元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}\xi_1 + a_{12}\xi_2 + \cdots + a_{1n}\xi_n = b_1 \\ a_{21}\xi_1 + a_{22}\xi_2 + \cdots + a_{2n}\xi_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}\xi_1 + a_{n2}\xi_2 + \cdots + a_{nn}\xi_n = b_n \end{cases}$$

$$Ax = b$$

$$L = L_1 L_2 \cdots L_{n-1}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ c_{21} & 1 & & & \\ \vdots & & \ddots & & \\ c_{n-11} & c_{n-12} & & 1 & \\ c_{n1} & c_{n2} & & c_{nn-1} & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{(n-1)} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & \cdots & a_{1n}^{(0)} \\ & a_{22}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn}^{(n-1)} \end{bmatrix}$$

Gauss消元法的矩阵形式

- **Step1:**
  - 令 $c_{i1} = a_{i1}^{(0)} \big/ a_{11}^{(0)}$
  - 构造Frobenius矩阵L_1

$$A^{(1)} = L_1^{-1} A^{(0)} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & \cdots & a_{1n}^{(0)} \\ & a_{22}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} \\ 0 & \vdots & \ddots & \vdots \\ & a_{n2}^{(1)} & \cdots & a_{nn}^{(1)} \end{bmatrix}$$

- **Step2:**
  - 令 $c_{i2} = a_{i2}^{(1)} \big/ a_{22}^{(1)}$
  - 构造Frobenius矩阵L_2

$$A^{(2)} = L_2^{-1} A^{(1)} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & a_{13}^{(0)} & \cdots & a_{1n}^{(0)} \\ & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} \\ & & a_{33}^{(2)} & \cdots & a_{3n}^{(2)} \\ & & \vdots & & \vdots \\ & & a_{n3}^{(2)} & \cdots & a_{nn}^{(2)} \end{bmatrix}$$

- **Stepr:**
  - 令 $c_{ir} = a_{ir}^{r-1} \big/ a_{rr}^{r-1}$
  - 构造Frobenius矩阵Lr

$$A^{(r)} = L_r^{-1} A^{r-1} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(0)} & \cdots & a_{1r}^{(0)} & a_{1r+1}^{(0)} & \cdots & a_{1n}^{(0)} \\ & \ddots & \vdots & \vdots & \cdots & \\ & & a_{rr}^{(r-1)} & a_{rr+1}^{(r-1)} & \cdots & a_{rn}^{(r-1)} \\ & & & a_{r+1r+1}^{(r)} & \cdots & a_{r+1n}^{(r)} \\ & & & \vdots & & \vdots \\ & & & a_{nr+1}^{(r)} & \cdots & a_{nn}^{(r)} \end{bmatrix}$$

*LU*分解与*LDU*分解

- 可采用如下方法将分解完全确定
  - L为单位下三角矩阵
  - U为单位上三角矩阵
  - 将A分解为LDU
    - L，U分别为单位下三角，单位上三角矩阵
    - D为对角阵 $D = \mathrm{diag}[d_1, d_2, \cdots, d_n]$

$$d_k = \Delta_k / \Delta_{k-1}$$

$$(k = 1, 2, \cdots, n) \quad \Delta_0 = 1$$

其他三角分解

❖ 定义 设*A*具有唯一的*LDU*分解

- *A*的Doolittle分解
  - 将 D，U 结合起来得 $A = L\hat{U}$ （$\hat{U} = DU$）
- *A*的Crout分解
  - 将 L, D 结合起来得 $A = \hat{L}U$（$\hat{L} = LD$）

❖ 厄米正定矩阵的Cholesky分解

- $$A = GG^{H}$$

❖ Crout分解算法

$$\hat{L}=\begin{bmatrix} l_{11} & & & \\ l_{21} & l_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix} \quad U=\begin{bmatrix} 1 & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ & 1 & \cdots & u_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

先算列后算行

$$\begin{bmatrix} l_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1n} \\ l_{21} & l_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2n} \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & \cdots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & & l_{nn} \end{bmatrix}$$

- **Givens矩阵与Givens变换**
- **Householder矩阵与Householder变换**
- **QR分解**

Givens矩阵与Givens变换

❖定义

- 设实数c与s满足 $c^2+s^2=1$

$$
T_{i,j}=\begin{bmatrix}
1 & & & & & & & & & & \\
& \ddots & & & & & & & & & \\
& & 1 & & & & & & & & \\
& & & c & & & & s & & & \\
& & & & 1 & & & & & & \\
& & & \vdots & & \ddots & & & & & \\
& & & & & & 1 & & & & \\
& & & -s & & & & c & & & \\
& & & & & & & & 1 & & \\
& & & \vdots & & & & & & \ddots & \\
& & & & & & & & & & 1
\end{bmatrix}
\begin{matrix} \\ \\ \\ \leftarrow(i) \\ \\ \\ \\ \leftarrow(j) \\ \\ \\ \\ \end{matrix}
$$

Givens矩阵
（初等旋转矩阵）

标记为

$$T_{ij}=T_{ij}(c,s)$$

Givens矩阵与Givens变换

- 由**Givens**矩阵所确定的线性变换称为**Givens**变换
  - 亦称初等旋转变换
  - **Note1**：存在 θ，使得 $c=\cos(\theta), s=\sin(\theta)$
  - **Note2**：平面直角坐标系中绕原点旋转 θ 变换

$$y=\begin{bmatrix}\cos(\theta) & \sin(\theta)\\ -\sin(\theta) & \cos(\theta)\end{bmatrix}x$$

  - **Note3**：实**Givens**矩阵可推广为复初等旋转矩阵

Givens矩阵与Givens变换

❖性质

- （1） $\left[T_{ij}(c,s)\right]^{-1}=\left[T_{ij}(c,s)\right]^{T}=T_{ij}(c,-s)$ $-s=-\sin(\theta)=\sin(-\theta)$

  $\det\left[T_{ij}(c,s)\right]=1$

- （2） $x=[\xi_1 \quad \xi_2 \quad \cdots \quad \xi_n]^T$ $y=T_{ij}x=[\eta_1 \quad \eta_2 \quad \cdots \quad \eta_n]^T$

$$\begin{cases}\eta_i=c\xi_i+s\xi_j\\ \eta_j=-s\xi_i+c\xi_j\\ \eta_k=\xi_k \qquad (k\neq i,j)\end{cases}$$

$\xi_i^2+\xi_j^2\neq 0$

选 $c=\dfrac{\xi_i}{\sqrt{\xi_i^2+\xi_j^2}}$， $s=\dfrac{\xi_j}{\sqrt{\xi_i^2+\xi_j^2}}$

$$\begin{cases}\eta_i=\sqrt{\xi_i^2+\xi_j^2}\\ \eta_j=0\end{cases}$$

$$T_{ij}x=\left[\xi_1 \quad \xi_2 \quad \cdots \quad \sqrt{\xi_i^2+\xi_j^2} \quad \cdots \quad 0 \quad \cdots \quad \xi_n\right]^T$$

定理1.

- 设 $\mathbf{x}=[\xi_1 \quad \xi_2 \quad \cdots \quad \xi_n]^T \neq 0$
- 存在有限个Givens矩阵的乘积T，使得 $\mathbf{Tx}=|\mathbf{x}|\mathbf{e}_1$
- 其中：
  - x为实数时 $|\mathbf{x}|=\sqrt{\|\mathbf{x}\|_2^2}=\sqrt{\mathbf{x}^T\mathbf{x}}$
  - x为复数时 $|\mathbf{x}|=\sqrt{\mathbf{x}^H\mathbf{x}}$
  - $\mathbf{e}_1=[1 \quad 0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0]^T$

Givens矩阵与Givens变换

❖[证明] 若 $\xi_1 \neq 0$

- 构造 $T_{12}(c,s): c=\dfrac{\xi_1}{\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2}}, s=\dfrac{\xi_2}{\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2}}$

$$T_{12}x=\begin{bmatrix}\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2} & 0 & \xi_3 & \xi_4 & \cdots & \xi_n\end{bmatrix}^T$$

- 构造 $T_{13}(c,s): c=\dfrac{\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2}}{\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2}}, s=\dfrac{\xi_3}{\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2}}$

$$T_{13}T_{12}x=\begin{bmatrix}\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2} & 0 & 0 & \xi_4 & \cdots & \xi_n\end{bmatrix}^T$$

Givens矩阵与Givens变换

- 依此类推，构造

$$T_{1k}(c,s): c=\frac{\sqrt{\xi_1^2+\cdots+\xi_k^2}}{\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2+\cdots+\xi_k^2}}, s=\frac{\xi_k}{\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2+\cdots+\xi_k^2}}$$

⇓

$$T_{1k}\left\langle T_{1k-1}\left\{T_{1k-2}\left[\cdots T_{13}\left(T_{12}x\right)\right]\right\}\right\rangle=\left[\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2+\cdots+\xi_k^2}\quad 0\quad 0\quad \cdots\quad 0\quad \xi_{k+1}\quad \cdots\quad \xi_n\right]^T$$

- 直至$k=n$
- 令 $T=T_{1n}T_{1n-1}T\cdots T_{12}$
- 则 $Tx=\left[\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2+\cdots\xi_n^2}\quad 0\quad 0\quad \cdots\quad 0\right]^T=|x|e_1$
- 从第一个不为零的开始运用该法总可得到同样结论

❖推论

- 对于任何非零列向量$x \in R^n$及任何单位列向量 $\mathbf{z}(|\mathbf{z}|=1)$
- 均存在着有限个Givens矩阵的乘积T
- 使得 $\mathbf{Tx} = |\mathbf{x}|\mathbf{z}$
- [证明]
  - 对于x，存在有限个Givens矩阵，使得 $\mathbf{T}^{(1)}\mathbf{x} = |\mathbf{x}|\mathbf{e}_1$
  - 对于z，存在有限个Givens矩阵，使得 $\mathbf{T}^{(2)}\mathbf{z} = |\mathbf{z}|\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_1$

$$\mathbf{T}^{(1)} = \mathbf{T}_{1n}^{(1)}\mathbf{T}_{1n-1}^{(1)}\cdots\mathbf{T}_{13}^{(1)}\mathbf{T}_{12}^{(1)}$$

$$\mathbf{T}^{(2)} = \mathbf{T}_{1n}^{(2)}\mathbf{T}_{1n-1}^{(2)}\cdots\mathbf{T}_{13}^{(2)}\mathbf{T}_{12}^{(2)}$$

Givens矩阵与Givens变换

$$\mathbf{T}^{(1)}\mathbf{x} = |\mathbf{x}|\mathbf{T}^{(2)}\mathbf{z} = \mathbf{T}^{(2)}(|\mathbf{x}|\mathbf{z})$$

$$\rightarrow$$

$$\left(\mathbf{T}^{(2)}\right)^{-1}\mathbf{T}^{(1)}\mathbf{x} = |\mathbf{x}|\mathbf{z}$$

$$\Rightarrow$$

$$\left(\mathbf{T}_{1n}^{(2)}\mathbf{T}_{1n-1}^{(2)}\cdots\mathbf{T}_{12}^{(2)}\right)^{-1}\left(\mathbf{T}_{1n}^{(1)}\mathbf{T}_{1n-1}^{(1)}\cdots\mathbf{T}_{12}^{(1)}\right)\mathbf{x} = |\mathbf{x}|\mathbf{z}$$

$$= \left(\mathbf{T}_{12}^{(2)}\right)^{-1}\left(\mathbf{T}_{13}^{(2)}\right)^{-1}\cdots\left(\mathbf{T}_{1n}^{(2)}\right)^{-1}\mathbf{T}_{1n}^{(1)}\mathbf{T}_{1n-1}^{(1)}\cdots\mathbf{T}_{12}^{(1)}$$

$$= \left(\mathbf{T}_{12}^{(2)}\right)^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{T}_{13}^{(2)}\right)^{\mathrm{T}}\cdots\left(\mathbf{T}_{1n}^{(2)}\right)^{\mathrm{T}}\mathbf{T}_{1n}^{(1)}\mathbf{T}_{1n-1}^{(1)}\cdots\mathbf{T}_{12}^{(1)}$$

为有限个Givens矩阵的乘积

即证

Householder矩阵与Householder变换

- 平面直角坐标系中，将向量x关于e_1轴作镜像变换，则得到

$$\mathbf{y}=\begin{bmatrix}\xi_1\\-\xi_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\xi_1\\\xi_2\end{bmatrix}=\left(\mathbf{I}-2\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2^T\right)\mathbf{x}=\mathbf{H}\mathbf{x}$$

- 将其推广至n维，可定义
  - 设有单位列向量$u\in R^n$
    - 则称$H=I-2uu^T$为Householder矩阵（初等反射矩阵）
    - 由Householder矩阵所确定的线性变换（$y=Hx$）称为Householder变换

❖性质

- $H^T = H$（实对称）$\bullet H^T = \left(I - 2uu^T\right)^T = I - 2\left(u^T\right)^T u^T = H$
- $H^{-1} = H^T$（正交）
- $H^2 = I$（对合）$\bullet H^2 = \left(I - 2uu^T\right)\left(I - 2uu^T\right) = I - 2uu^T - 2uu^T + 4uu^Tuu^T = I$
- $H^{-1} = H$（自逆）
- $\det H = -1$ $\quad \bullet \det(H) = \det\left[I + \left(-2uu^T\right)\right] = 1 + u^T(-2u) = 1 - 2 = -1$

引理：设$A \in R^{m\times n}, B \in R^{n\times m}$，则$\det\left(I_m + AB\right) = \det\left(I_n + BA\right)$

$$\det\begin{bmatrix} I_n & B \\ -A & I_m \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} I_n & B \\ 0 & I_m + AB \end{bmatrix} = \det\left(I_m + AB\right)$$

$$\det\begin{bmatrix} I_n & B \\ -A & I_m \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} I_n + BA & B \\ 0 & I_m \end{bmatrix} = \det\left(I_n + BA\right)$$

❖定理2

- 对任何非零列向量$x \in R^n$及单位列向量$z \in R^n$
- 存在**Householder**矩阵**H**，使得 $\mathbf{Hx} = |\mathbf{x}|\mathbf{z}$
  - [证明] 当 $\mathbf{x} = |\mathbf{x}|\mathbf{z}$ 时　　选 $\mathbf{u}$ 满足 $\mathbf{u}^T\mathbf{x} = 0$

$$\mathbf{Hx} = (\mathbf{I} - 2\mathbf{u}\mathbf{u}^T)\mathbf{x} = \mathbf{x} = |\mathbf{x}|\mathbf{z}$$

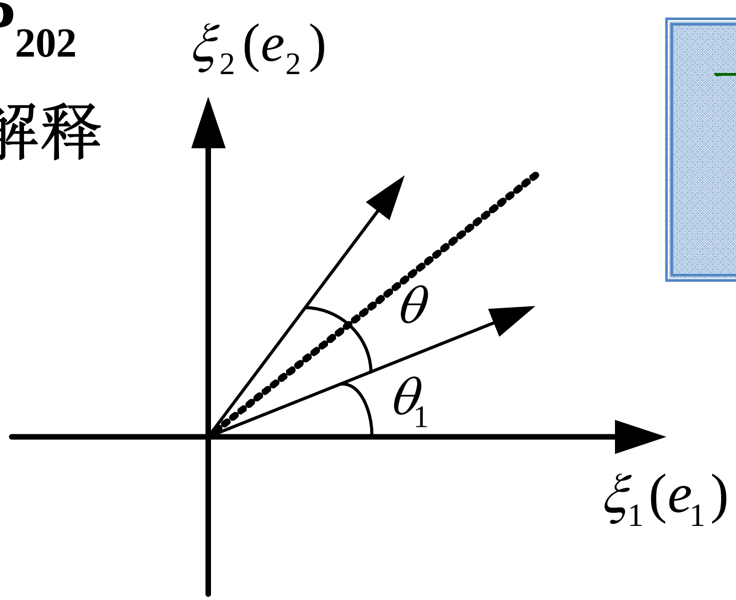
当 $\mathbf{x} \neq |\mathbf{x}|\mathbf{z}$ 时　　选 $\mathbf{u} = \dfrac{\mathbf{x} - |\mathbf{x}|\mathbf{z}}{|\mathbf{x} - |\mathbf{x}|\mathbf{z}|}$

$$|x - |x|z|^2 = 2(x - |x|z, x)$$

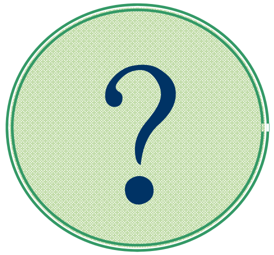
$$\mathbf{Hx} = \left(\mathbf{I} - 2\frac{(\mathbf{x} - |\mathbf{x}|\mathbf{z})}{|\mathbf{x} - |\mathbf{x}|\mathbf{z}|}\frac{(\mathbf{x}^T - |\mathbf{x}|\mathbf{z}^T)}{|\mathbf{x} - |\mathbf{x}|\mathbf{z}|}\right)\mathbf{x} = \mathbf{x} - (\mathbf{x} - |\mathbf{x}|\mathbf{z}) = |\mathbf{x}|\mathbf{z}$$

❖定理3

- 初等旋转矩阵（**Givens**矩阵）是两个初等反射矩阵的乘积
  - 证明参见$\mathbf{P}_{202}$
  - 简要几何解释



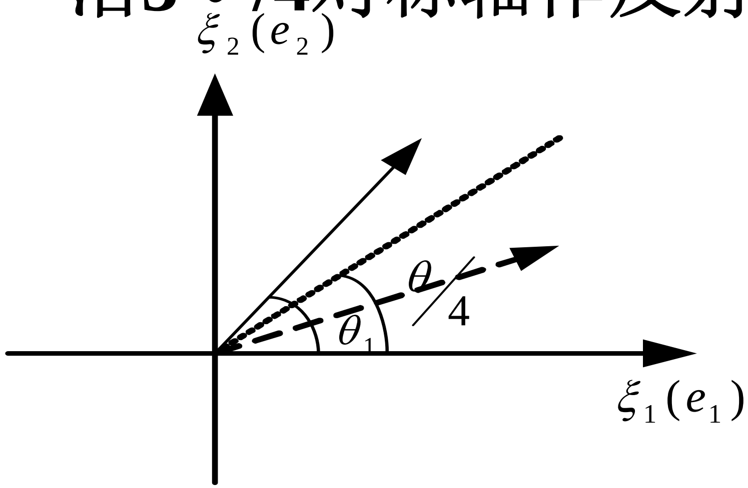
一种反射变换即可代替旋转变换

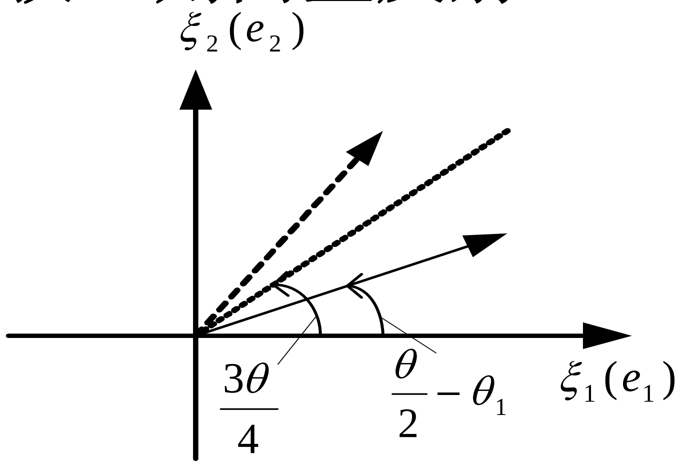


- 实际上该反射变换对应的对称轴与 θ_1 有关
- 旋转变换应由两次反射变换的作用来代替
  - 沿 $\theta/4$ 对称轴作反射变换，则原向量 θ_1 沿方向转至 $-\theta_1+\theta/2$

$$\left(\frac{\theta}{2}-\theta_1\right)+2\left(\frac{\theta}{4}+\theta_1\right)=\theta_1+\theta$$

  - 沿 $3\theta/4$ 对称轴作反射变换，则向量反射至





Householder矩阵与Householder变换

- 旋转变换可用两个反射变换的连续作用来代替
  - 即 $T_{ij} = H_v H_u$
- 但反射变换不可能用多个旋转变换的连续作用来代替
  - 因为 $\det(T_{ij}) \equiv 1, \det(H) \equiv -1$
  - 两个－1的乘积可得1，但多个1的乘积只能是1，不是－1

QR分解

❖定义

- 如果实（复）矩阵**A**可化为正交（酉）矩阵**Q**与实（复）上三角矩阵**R**的乘积
  - 即 $\mathbf{A}=\mathbf{QR}$
  - 则称上式为**A**的**QR**分解

❖定理

- 设**A**是**n**阶的非奇异矩阵，则存在正交（酉）矩阵**Q**与实（复）上三角矩阵**R**
  - 使得 $\mathbf{A}=\mathbf{QR}$
  - 且除去相差一个对角元素的绝对值（模）全为**1**的对角因子外，上述分解唯一

QR分解

❖[证明]

- 设A记为 $A=\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$
- A非奇异， 则$a_1, a_2, a_3 \ldots a_n$线性无关
- 采用Gram-schmidt正交化方法将它们正交化，可得

$$\begin{cases} b_1 = a_1 & q_1 = b_1 / |b_1| \\ b_2 = a_2 - k_{21} b_1 & q_2 = b_2 / |b_2| \\ b_3 = a_3 - k_{31} b_1 - k_{32} b_2 & \vdots \to (q_i, q_j) = \delta_{ij} \\ \vdots & \\ b_n = a_n - k_{n1} b_1 - k_{n2} b_2 - \cdots - k_{nn-1} b_{n-1} & q_n = b_n / |b_n| \end{cases}$$

$$k_{ij} = \frac{(a_i, a_j)}{(b_j, b_j)} \leftarrow (a_i, b_j) = 0$$

❖可得 $[a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n] = [b_1 \quad b_2 \quad \cdots \quad b_n]\begin{bmatrix} 1 & k_{21} & \cdots & k_{n1} \\ & 1 & \cdots & k_{n2} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & 1 \end{bmatrix}$

$$= [b_1 \quad b_2 \quad \cdots \quad b_n]C$$

$$= [q_1 \quad q_2 \quad \cdots \quad q_n]\begin{bmatrix} |b_1| & & & \\ & |b_2| & & \\ & & \ddots & \\ & & & |b_n| \end{bmatrix}C$$

$$= QR$$

正交（酉）矩阵 ← Q；R → 实（复）上三角矩阵

QR分解

❖唯一性

- 采用反证法
  - 设存在两个QR分解 $A = QR = Q_1R_1$

$$Q_1 = QD^{-1}$$
$$R_1 = DR$$

$$Q = Q_1R_1R^{-1} = Q_1D$$

D为上三角矩阵

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1n} \\ & d_{22} & \cdots & d_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & d_{nn} \end{bmatrix}$$

$$I = Q^HQ = (Q_1D)^H(Q_1D) = D^HD$$

D为酉（正交）矩阵

$d_{12} = 0; d_{13} = d_{23} = 0; \cdots$ → D是对角元素绝对值（模）全为1的对角阵

QR分解

❖定理5

- 设A是m×n的实（复）矩阵，且其n个列线性无关，则A具有分解A=QR，其中
  - Q是m×n阶实（复）矩阵，且满足$Q^TQ=I(Q^HQ=I)$
  - R是n阶实（复）非奇异上三角矩阵
  - 除了相差一个对角元素的绝对值（模）全为1的对角阵因子外，上述分解唯一

❖求QR分解的方法

- [方法一]采用Givens方法
  - 将n阶非奇异矩阵A写为 $A = \begin{bmatrix} b^{(1)^T} \\ * \end{bmatrix}^T$
  - 存在有限个Givens矩阵的乘积T_1，使得

$$T_1 b^{(1)} = \left| b^{(1)} \right| e_1 \rightarrow T_1 A = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & & & \\ \vdots & & A^{(1)} & \\ 0 & & & \end{bmatrix}$$

QR分解

- $\mathbf{A}^{(1)}$ 写成 $\mathbf{A}^{(1)} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}^{(2)^T} \\ * \end{bmatrix}^T \rightarrow$ 存在 $\mathbf{T}_2$，使得

$$\mathbf{T}_2\mathbf{A}^{(1)} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{22}^{(2)} & \mathbf{a}_{23}^{(2)} & \cdots & \mathbf{a}_{2n}^{(2)} \\ \mathbf{0} & & & \\ \vdots & & \mathbf{A}^{(2)} & \\ \mathbf{0} & & & \end{bmatrix}$$

- $\mathbf{A}^{(n-2)}$ 写成 $\mathbf{A}^{(n-2)} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}^{(n-1)^T} \\ * \end{bmatrix}^T \rightarrow$ 存在 $\mathbf{T}_{n-1}$，使得

$$\mathbf{T}_{n-1}\mathbf{A}^{(n-2)} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{n-1,n-1}^{(n-1)} & \mathbf{a}_{n-1,n}^{(n-1)} \\ \mathbf{0} & \mathbf{a}_{nn}^{(n-1)} \end{bmatrix}$$

QR分解

- 令 $$T=\begin{bmatrix} I_{n-2} & 0 \\ 0 & T_{n-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_{n-3} & 0 \\ 0 & T_{n-2} \end{bmatrix}\cdots\begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & T_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & T_2 \end{bmatrix}T_1$$
- 则

$$TA=\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn}^{n-1} \end{bmatrix}=R \rightarrow A=T^{-1}R=QR$$

- 其中
  - R为上三角矩阵
  - Q为正交矩阵

- [方法二]采用Householde方法

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\mathbf{b}^{(1)} & *\end{bmatrix}$$ 存在 $\mathbf{H}_1$，使得

$$\mathbf{H}_1\mathbf{b}^{(1)}=\left|\mathbf{b}^{(1)}\right|\mathbf{e}_1 \rightarrow \mathbf{H}_1\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\left|\mathbf{b}^{(1)}\right|\mathbf{e}_1^{n} & \mathbf{A}^{(1)}\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^{(1)}=\begin{bmatrix}\mathbf{b}^{(2)} & *\end{bmatrix}$$ 存在 $\mathbf{H}_2$，使得 $\mathbf{H}_2\mathbf{A}^{(1)}=\begin{bmatrix}\left|\mathbf{b}^{(2)}\right|\mathbf{e}_1^{n-1} & \mathbf{A}^{(2)}\end{bmatrix}\cdots$

$$\mathbf{A}^{(n-2)}=\begin{bmatrix}\mathbf{b}^{(n-1)} & \mathbf{b}^{(n)}\end{bmatrix}$$ 存在 $\mathbf{H}_{n-1}$，使得 $\mathbf{H}_{n-1}\mathbf{A}^{(n-2)}=\begin{bmatrix}a_{n-1,n-1}^{(n-1)} & a_{n-1,n}^{(n-1)} \\ 0 & a_{nn}^{(n-1)}\end{bmatrix}$

QR分解

- 令 $S=\begin{bmatrix} I_{n-2} & 0 \\ 0 & H_{n-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_{n-3} & 0 \\ 0 & H_{n-2} \end{bmatrix}\cdots\begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & H_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & H_2 \end{bmatrix}H_1$

$$H_u = I_{n-l} - 2uu^T (u \in R^{n-l}, u^T u = 1)$$

$$\begin{bmatrix} I_l & 0 \\ 0 & H_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_l & 0 \\ 0 & I_{n-l} \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & uu^T \end{bmatrix} = I_n - 2\begin{bmatrix} 0 \\ u \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0^T & u^T \end{bmatrix} = I_n - 2vv^T$$

$$(v \in R^{n-l}, v^T v = u^T u = 1)$$

- 是n阶Householder矩阵
- 即S为有限个Householder矩阵的连乘积

- [方法三] Gram-schmidt正交归一化方法
  - 对于 $A=[a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n]$
  - 各列向量线性无关可进行正交化

$$q_1 = a_1 / |a_1| \qquad y_1 = a_1$$

$$q_2 = \frac{a_2 + k_{21}q_1}{|a_2 + k_{21}q_1|}, k_{21} = -\langle a_2, q_1 \rangle \qquad y_2 = a_2 + k_{21}q_1$$

$$\vdots$$

$$q_l = \frac{a_l + \sum_{j=1}^{l-1} k_{lj}q_j}{\left|a_l + \sum_{j=1}^{l-1} k_{lj}q_j\right|}, k_{lj} = -\langle a_l, q_j \rangle \qquad y_l = a_l + \sum_{j=1}^{l-1} k_{lj}q_j$$

QR分解

$$q_i^H q_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases} \rightarrow Q = [q_1 \quad q_2 \quad \cdots \quad q_n]，满足 Q^T Q = I$$

- 改写：

$$a_1 = q_1 |y_1|$$

$$a_2 = q_2 |y_2| - k_{21} q_1$$

$$\vdots$$

$$a_l = q_l |y_l| - \sum_{j=1}^{l-1} k_{lj} q_j$$

$$[a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n] = [q_1 \quad q_2 \quad \cdots \quad q_n] \begin{bmatrix} |y_1| & -k_{21} & -k_{31} & \cdots & -k_{n1} \\ & |y_2| & -k_{32} & \cdots & -k_{n2} \\ & & |y_3| & \cdots & \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & |y_n| \end{bmatrix}$$

$$= QR$$

作业

- p219-220
  - 1、7、8