矩 阵 论

主讲教师：徐乐

2014年12月10日星期三

上讲回顾

- 第10讲 矩阵函数及其微积分
  - 矩阵函数的另外一种计算方法
    - 利用零化多项式计算矩阵函数
  - 矩阵微分方程
    - 矩阵的微分和积分
    - 一阶线性齐次常系数微分方程组
    - 一阶线性非齐次常系数微分方程组

利用零化多项式求解矩阵函数

❖根据最小多项式求矩阵函数的一般方法

- 求出最小多项式

$$\varphi_0(\lambda)=d_n(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{m_1}(\lambda-\lambda_2)^{m_2}\cdots(\lambda-\lambda_r)^{m_r},\sum_{i=1}^{r}m_i=m$$

- 形式上写出待定多项式

$$g(\lambda)=\sum_{i=0}^{m-1}c_i\lambda^i=c_0+c_1\lambda+c_2\lambda^2+\cdots+c_{m-1}\lambda^{m-1}$$

- 求解关于待定系数的线性方程组

$$g^{(k)}(\lambda_i)=f^{(k)}(\lambda_i)\quad (k=1,2,\cdots,m_i;i=1,2,\cdots,r)$$

- 求出$g(A)$，即可得$f(A)=g(A)$

❖矩阵导数定义

- 若矩阵$A(t)=(a_{i,j}(t))_{m\times n}$的每一个元素$a_{i,j}(t)$是变量$t$的可微函数，则称$A(t)$可微
- 其导数定义为

$$\boxed{\frac{dA}{dt}=A'(t)=\left(\frac{da_{ij}}{dt}\right)_{m\times n}}$$

- 类似地，可以定义矩阵高阶导数以及偏导数

❖矩阵积分定义

- 若矩阵$A(t)=(a_{i,j}(t))_{m\times n}$的每一个元素$a_{i,j}(t)$都是区间$[t_0,t_1]$上的可积函数，则称$A(t)$在区间$[t_0,t_1]$上可积
- 定义$A(t)$在$[t_0,t_1]$上的积分为

$$\boxed{\int_{t_0}^{t_1} A(t)dt=\left(\int_{t_0}^{t_1} a_{ij}(t)dt\right)_{m\times n}}$$

❖一阶线性齐次常系数微分方程组

自变量

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \cdots + a_{1n}x_n(t) \\ \dfrac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + \cdots + a_{2n}x_n(t) \\ \vdots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1(t) + a_{n2}x_2(t) + \cdots + a_{nn}x_n(t) \end{cases}$$

一元函数

常系数

$$\boxed{\frac{dx}{dt} = Ax(t)}$$

$$\boxed{x(t) = e^{(t-t_0)A}x(t_0)}$$

❖一阶线性非齐次常系数微分方程组

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \cdots + a_{1n}x_n(t) + b_1(t) \\ \dfrac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + \cdots + a_{2n}x_n(t) + b_2(t) \\ \vdots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1(t) + a_{n2}x_2(t) + \cdots + a_{nn}x_n(t) + b_n(t) \end{cases}$$

$$\boxed{\frac{dx}{dt} = Ax + b}$$

$$\boxed{x(t) = e^{tA}\left[c(0) + \int_0^t e^{-sA}b(s)ds\right]}$$

- **Gauss消元法的矩阵形式**
- ***LU*分解与*LDU*分解**
- 其他三角分解

❖n元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}\xi_1 + a_{12}\xi_2 + \cdots + a_{1n}\xi_n = b_1 \\ a_{21}\xi_1 + a_{22}\xi_2 + \cdots + a_{2n}\xi_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}\xi_1 + a_{n2}\xi_2 + \cdots + a_{nn}\xi_n = b_n \end{cases} \Rightarrow \boxed{Ax = b}$$

初始状态

$$\begin{pmatrix} A = (a_{ij}) \\ x = [\xi_1, \xi_2, \cdots \xi_n]^{\mathrm{T}} \\ b = [b_1, b_2 \cdots b_n]^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}$$

$$A^{(0)} = A = \left(a_{ij}\right)_{n\times n}$$

$$\Delta_1 = a_{11}^{(0)} \neq 0$$

顺序主子式

Gauss消元法的矩阵形式

- 令 $\Longrightarrow$ $\boxed{c_{i1} = \dfrac{a_{i1}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}}}$
- 构造Frobenius矩阵

$$L_1 = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ c_{21} & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ c_{n1} & 0 & & 1 \end{bmatrix}_{n\times n} \Longrightarrow L_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ -c_{21} & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ -c_{n1} & 0 & & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{(1)} = L_1^{-1}A^{(0)} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & \cdots & a_{1n}^{(0)} \\ & a_{22}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} \\ 0 & \vdots & \ddots & \vdots \\ & a_{n2}^{(1)} & \cdots & a_{nn}^{(1)} \end{bmatrix}$$

Gauss消元法的矩阵形式

- 初等变换不改变行列式，故 $\Delta_2 = a_{11}^{(0)} a_{22}^{(1)}$
- 若 $\Delta_2 \neq 0$，则 $a_{22}^{(1)} \neq 0$
- 定义 $\Longrightarrow$ $\boxed{c_{i2} = \dfrac{a_{i2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} (i = 3,4,\cdots n)}$
- 构造Frobenius矩阵

$$L_2 = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & c_{32} & \ddots & & \\ & \vdots & & & \\ & c_{n2} & & & 1 \end{bmatrix} \qquad L_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & -c_{32} & \ddots & & \\ & \vdots & & & \\ & -c_{n2} & & & 1 \end{bmatrix}$$

- 可得

$$A^{(2)} = L_2^{-1}A^{(1)} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & a_{13}^{(0)} & \cdots & a_{1n}^{(0)} \\ & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} \\ & & a_{33}^{(2)} & \cdots & a_{3n}^{(2)} \\ & & \vdots & & \vdots \\ & & a_{n3}^{(2)} & \cdots & a_{nn}^{(2)} \end{bmatrix}$$

$$\boxed{A^{(1)} = L_2 A^{(2)}}$$

Gauss消元法的矩阵形式

- 依此类推
- 进行到第(*r*-1)步可得(2≤*r*≤*n*):

$$A^{(r-1)}=\begin{bmatrix} a_{11}^{(0)} & \cdots & a_{1r-1}^{(0)} & a_{1r}^{(0)} & \cdots & a_{1n}^{(0)} \\ & \ddots & \vdots & \vdots & \cdots & \\ & & a_{r-1r-1}^{(r-2)} & a_{r-1r}^{(r-2)} & \cdots & a_{r-1n}^{(r-2)} \\ & & & a_{rr}^{(r-1)} & \cdots & a_{rn}^{(r-1)} \\ & & & \vdots & & \vdots \\ & & & a_{nr}^{(r-1)} & \cdots & a_{nn}^{(r-1)} \end{bmatrix}$$

  - 则*A*的*r*阶顺序主子式 $\Delta_r=a_{11}^{(0)}a_{22}^{(1)}\cdots a_{r-1r-1}^{(r-2)}a_{rr}^{r-1}$
  - 若 $\Delta_r\neq 0$，则 $a_{rr}^{r-1}\neq 0$

Gauss消元法的矩阵形式

- 定义 $\longrightarrow$ $\boxed{c_{ir} = \dfrac{a_{ir}^{r-1}}{a_{rr}^{r-1}}}$
- 构造**Frobenius**矩阵

$$L_r = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & c_{r+1r} & 1 & & \\ & & \vdots & & \ddots & \\ & & c_{nr} & & & 1 \end{bmatrix} \qquad L_r^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & -c_{r+1r} & 1 & & \\ & & \vdots & & \ddots & \\ & & -c_{nr} & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{(r)} = L_r^{-1} A^{r-1} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(0)} & \cdots & a_{1r}^{(0)} & a_{1r+1}^{(0)} & \cdots & a_{1n}^{(0)} \\ & \ddots & \vdots & \vdots & \cdots & \\ & & a_{rr}^{(r-1)} & a_{rr+1}^{(r-1)} & \cdots & a_{rn}^{(r-1)} \\ & & & a_{r+1r+1}^{(r)} & \cdots & a_{r+1n}^{(r)} \\ & & & \vdots & & \vdots \\ & & & a_{nr+1}^{(r)} & \cdots & a_{nn}^{(r)} \end{bmatrix}$$

$$\boxed{A^{(r-1)} = L_r A^{(r)}}$$

Gauss消元法的矩阵形式

- 第(n－1)步，得到

$$A^{(n-1)}=\begin{bmatrix} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & \cdots & a_{1n}^{(0)} \\ & a_{22}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn}^{(n-1)} \end{bmatrix}$$

- 完成了消元的过程
- 消元法能进行下去的条件是 $\Delta_r \neq 0 \quad (r=1,2,\cdots,n-1)$
- Gauss消元过程未用行、列交换

❖显然，由Gauss消元过程可知

$$A = A^{(0)} = L_1 A^{(1)} = L_1 L_2 A^{(2)} = \cdots = \boxed{L_1 L_2 L_3 \cdots L_{n-1}} A^{(n-1)}$$

下三角矩阵

$$L = L_1 L_2 \cdots L_{n-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ c_{21} & 1 & & & \\ \vdots & & \ddots & & \\ c_{n-11} & c_{n-12} & & 1 & \\ c_{n1} & c_{n2} & & c_{nn-1} & 1 \end{bmatrix}$$

$$U = A^{(n-1)}$$

上三角矩阵

❖以上将A分解成一个下三角矩阵与上三角矩阵的乘积，就称为***LU***分解或***LR***分解

- **L: lower U: upper**
- **L: left R: right**

❖***LU***分解不唯一

- 令D为对角元素不为零的n阶对角阵

$$A = LU = LDD^{-1}U = \hat{L}\hat{U}$$

- 可采用如下方法将分解完全确定
  - L为单位下三角矩阵
  - U为单位上三角矩阵
  - 将A分解为LDU
    - L，U分别为单位下三角，单位上三角矩阵
    - D为对角阵 $D=\operatorname{diag}[d_1,d_2,\cdots,d_n]$

$$\boxed{d_k = \Delta_k / \Delta_{k-1}}$$

$$\boxed{(k=1,2,\cdots,n) \quad \Delta_0 = 1}$$

- n阶非奇异矩阵A有三角分解LU或LDU的充要条件
  - A的顺序主子式 $\Delta_r \neq 0 \quad (r=1,2,\cdots,n)$
- **Note**
  - n个顺序主子式全不为零的实际上较严格
    - 特别是在数值计算中，$a_{kk}^{(k\text{-}1)}$很小时可能会带来大的计算误差
    - 因此，有必要采取选主元消元方法
      - 理论基础：对于任何可逆矩阵A，存在置换矩阵P使得PA的所有顺序主子式全不为零

❖列主元素法

- 在矩阵的某列中选取模值最大者作为新的对角元素
  - 选取范围为对角线元素以下的各元素，比如
    - 第一步：找第一个未知数前的系数最大的一个，将其所在的方程作为第一个方程，即交换矩阵的两行，自由项也相应变换
    - 第二步变换时，找 $|a_{i2}|(i \geq 2)$ 中最大的一个，然后按照第一步的方法继续

LU分解与LDU分解

❖行主元素法

- 在矩阵的某行中选取模值最大者作为新的对角元素
  - 选取范围为对角线元素以后的各元素
  - 需要记住未知数变换的顺序，最后再还原回去
  - 需要更多的存储空间，不如列主元素法方便

❖全主元素法

- 若某列元素均较小或某行元素均较小时，可在各行各列中选取模值最大者作为对角元素
  - 与以上两种方法相比
  - 其计算稳定性更好，精度更高，计算量增大

$$Ax = b$$

$$A = LU$$

$$\begin{cases} Ly = b \\ Ux = y \end{cases} \leftarrow \text{两个三角形方程回代即可}$$

其他三角分解

❖定义 设A具有唯一的LDU分解

- A的Doolittle分解
  - 将 D，U 结合起来得 $A = L\hat{U}$ （$\hat{U} = DU$）
- A的Crout分解
  - 将 L, D 结合起来得 $A = \hat{L}U$（$\hat{L} = LD$）

❖算法

Crout分解

- 设

$$\hat{L}=\begin{bmatrix} l_{11} & & & \\ l_{21} & l_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix} \quad U=\begin{bmatrix} 1 & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ & 1 & \cdots & u_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

- 由 $A=\hat{L}U$ 乘出得

其他三角分解

❖

（1）$l_{i1}=a_{i1}$ (第1列)　（$i=1,2,3,\cdots n$）　($A,\hat{L}$第1列)

（2）$u_{1j}=a_{1j}/l_{11}$ (第1行)　（$j=2,3,\cdots n$）　(A,U第1行)

（3）$l_{i2}=a_{i2}-l_{i1}u_{12}$ (第2列)　($i=2,3,\cdots n$)　($A,\hat{L}$第2列)

（4）$u_{2j}=\dfrac{1}{l_{22}}\left(a_{2j}-l_{21}u_{1j}\right)$　（$j=3,4,\cdots n$）　(A,U第2行)

- （5）一般地，对 $A, \hat{L}$ 的第 k 列运算，有

$$l_{ik} = a_{ik} - \sum_{m=1}^{k-1} l_{im} u_{mk} \qquad (k = 1,2,\cdots,n; i = k, k+1,\cdots,n)$$

（6） 对 A，U 的第 k 行运算，有

$$u_{kj} = \frac{1}{l_{kk}}(a_{kj} - \sum_{m=1}^{k-1} l_{km} u_{mj}) \qquad (k = 1,2,\cdots n-1; j = k+1, k+2,\cdots n)$$

直至最后，得到的 l_{ij}, u_{ij} 恰可排成

$$\begin{bmatrix} l_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1n} \\ l_{21} & l_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2n} \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & \cdots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & & l_{nn} \end{bmatrix}$$

先算列后算行

其他三角分解

❖ 厄米正定矩阵的**Cholesky**分解 $A = GG^{\mathrm{H}}$

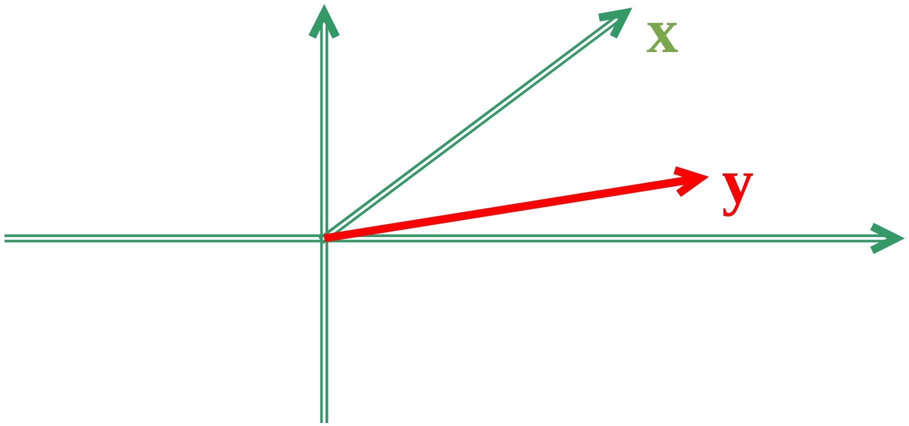
$$
g_{ij} = \begin{cases} \left(a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} |g_{ik}|^2 \right)^{1/2} & i = j \\ \dfrac{1}{g_{jj}} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} g_{ik} \overline{g_{ik}} \right) & i > j \\ 0 & i < j \end{cases}
$$

- 理论上，**Cholesky**具有中间量可以控制 g_{ij}
- 应较稳健，但实际计算中发现，对希尔伯特矩阵问题，不如全主元方法

❖初等旋转变换

- Note1：存在 θ ， 使得 $c = \cos(\theta), s = \sin(\theta)$
- Note2：平面直角坐标系中绕原点旋转 θ 变换

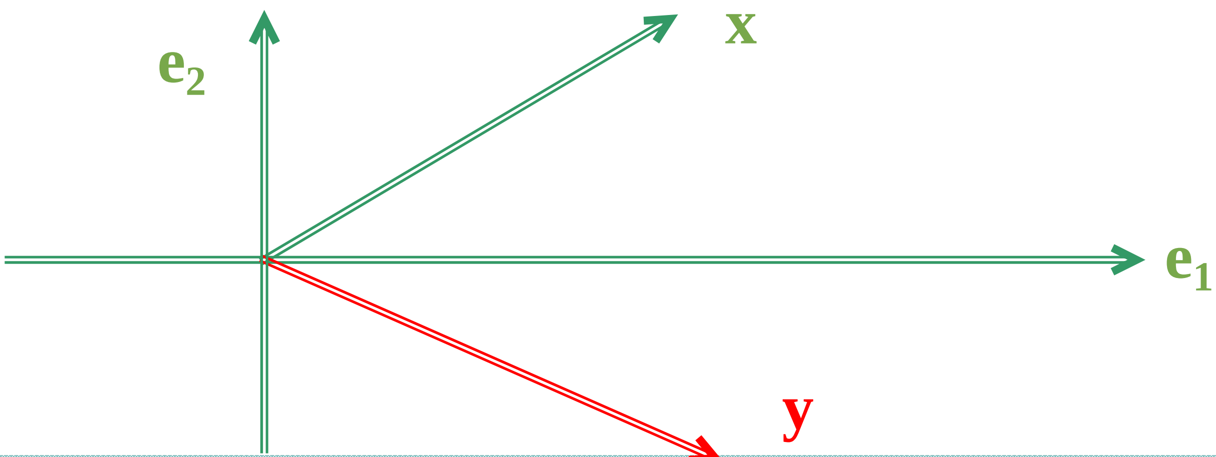
$$y = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} x$$



❖初等反射变换

- 平面直角坐标系中，将向量x关于e_1轴作镜像变换，则得到

$$\mathbf{y}=\begin{bmatrix}\xi_1\\-\xi_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\xi_1\\\xi_2\end{bmatrix}=\left(\mathbf{I}-2\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2^{\mathrm{T}}\right)\mathbf{x}=\mathbf{H}\mathbf{x}$$



作业

- **p195**
  - **2、3**