矩 阵 论

主讲教师：徐乐

2014年12月10日星期三

上讲回顾

- 第9讲 矩阵函数的求解
  - 矩阵函数的计算
  - 利用Jordan标准形求矩阵函数

- **Hamilton-Cayley定理**
  - n阶矩阵A是其特征多项式的零点
    - 即令 $\varphi(\lambda)=\det(\lambda I-A)=\lambda^n+c_1\lambda^{n-1}+\cdots+c_{n-1}\lambda+c_n$
    - 则有 $\varphi(A)=A^n+c_1A^{n-1}+\cdots+c_{n-1}A+c_nI=0$
- 零化多项式
  - 对于多项式 $f(z)$，若$f(A)=0$
  - 则称$f(z)$为A的零化多项式
- 方阵A的特征多项式为A的零化多项式

利用Jordan标准形求矩阵函数

❖矩阵函数的求法（步骤）

- 求出A的Jordan标准形J及变换矩阵P $\quad P^{-1}AP=J$
- 对于的各Jordan块 J_i 求出 $f(J_i)$
  - 即计算出 $f(\lambda_i), f'(\lambda_i), \ldots\ldots, f^{(m_i-1)}(\lambda_i)$
  - 按照顺序构成 $f(J_i)$

$$\boxed{f(J_i)=\begin{bmatrix} f(\lambda_i) & f'(\lambda_i) & \frac{1}{2!}f''(\lambda_i) & \cdots & \frac{1}{(m_i-1)!}f^{(m_i-1)}(\lambda_i) \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & \end{bmatrix}_{m_i\times m_i}}$$

- 合成 $f(J)$
- 矩阵乘积给出 $\boxed{f(A)=Pf(J)P^{-1}}$

- 矩阵函数的另外一种计算方法
  - 利用零化多项式计算矩阵函数
- 矩阵微分方程
  - 矩阵的微分和积分
  - 一阶线性齐次常系数微分方程组
  - 一阶线性非齐次常系数微分方程组

利用零化多项式求解矩阵函数

- 利用**Jordan**标准形求解矩阵函数的方法比较复杂
- 根据零化多项式求解矩阵函数
- [定律]
  - **n**阶方阵**A**的最小多项式等于它的特征矩阵的第**n**个（也就是最后一个）不变因子$d_n(\lambda)$
    - 可参见张远达《线性代数原理》P_{215}

利用零化多项式求解矩阵函数

- 设阶方阵的不变因子反向依次为

$$d_n(\lambda), d_{n-1}(\lambda), \cdots, d_1(\lambda)$$

- 由它们给出的初等因子分别为

$$\boxed{\sum_{i=1}^{s} m_i = n}$$

$$(\lambda-\lambda_1)^{m_1}, (\lambda-\lambda_2)^{m_2}, \cdots, (\lambda-\lambda_r)^{m_r}; \quad (\lambda-\lambda_{r+1})^{m_{r+1}}, \cdots, (\lambda-\lambda_s)^{m_s}$$

- 由于 $d_1(\lambda) \mid d_2(\lambda), d_2(\lambda) \mid d_3(\lambda), \cdots, d_{n-1}(\lambda) \mid d_n(\lambda)$

1° $\lambda_{r+1} \sim \lambda_s$ 必定出现在 $\lambda_1 \sim \lambda_r$ 中；

2° 若 $\lambda_i (i > r) = \lambda_j (j \le r)$ 则 $m_i \le m_j$

利用零化多项式求解矩阵函数

- 根据上述定理，A的最小多项式

$$\varphi_0(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{m_1}(\lambda-\lambda_2)^{m_2}\cdots(\lambda-\lambda_r)^{m_r}$$

$$\boxed{令\, m=\sum_{i=1}^{r} m_i}\ (\lambda_1 I-A)^{m_1}(\lambda_2 I-A)^{m_2}\cdots(\lambda_r I-A)^{m_r}=O$$

A^m 可以由 $A^0=I,A,A^2,\cdots,A^{m-1}$ 线性表示

$A^{m+i}(i>0)$ 亦可由 $A^0=I,A,A^2,\cdots,A^{m-1}$ 线性表示

- 矩阵函数$f(A)$若存在，必定可由 $A^0\sim A^{m-1}$ 线性表示

利用零化多项式求解矩阵函数

- 定义一个系数待定的(*m*-1)次多项式 $g(\lambda)=\sum_{i=0}^{m-1} c_i\lambda^i$
- 适当选择系数 $c_0 \sim c_{m-1}$，就可以使 $f(A)=g(A)$
- 假设J、P为A的Jordan标准形及相应变换矩阵

$$f(A)=Pf(J)P^{-1}$$

$$\rightarrow f(J)=g(J) \rightarrow f(J_i)=g(J_i)$$

$$g(A)=Pg(J)P^{-1}$$

$$f(\lambda_i)=g(\lambda_i), f'(\lambda_i)=g'(\lambda_i),\cdots, f^{(m_i-1)}(\lambda_i)=g^{(m_i-1)}(\lambda_i) \quad (i=1,2,\cdots,r)$$

利用零化多项式求解矩阵函数

- 由于g(λ)为待定系数的多项式
- 上述讨论成为关于其系数的线性方程组
- 且方程个数等于未知数个数 $m=\sum_{i=1}^{r} m_i$
- 可以确定 $c_0 \sim c_{m-1}$

利用零化多项式求解矩阵函数

❖根据最小多项式求矩阵函数的一般方法

- 求出最小多项式

$$\varphi_0(\lambda)=d_n(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{m_1}(\lambda-\lambda_2)^{m_2}\cdots(\lambda-\lambda_r)^{m_r},\sum_{i=1}^{r}m_i=m$$

- 形式上写出待定多项式

$$g(\lambda)=\sum_{i=0}^{m-1}c_i\lambda^i=c_0+c_1\lambda+c_2\lambda^2+\cdots+c_{m-1}\lambda^{m-1}$$

- 求解关于待定系数的线性方程组

$$g^{(k)}(\lambda_i)=f^{(k)}(\lambda_i)\quad (k=1,2,\cdots,m_i;i=1,2,\cdots,r)$$

- 求出 $g(A)$，即可得 $f(A)=g(A)$

利用零化多项式求解矩阵函数

❖例2 （教材P70例1.27）

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ & 1 & 2 & 3\\ & & 1 & 2\\ & & & 1\end{bmatrix} \longrightarrow \boxed{\sqrt{A}}$$

- [解]
- 1.求出最小多项式 $\varphi(\lambda)=\varphi_0(\lambda)=(\lambda-1)^4.$
- 2.形式上写出待定多项式

$$g(\lambda)=c_0+c_1\lambda+c_2\lambda^2+c_3\lambda^3$$

利用零化多项式求解矩阵函数

❖ 3.求解系数线性方程组

$$g(1)=f(1)=1=c_0+c_1+c_2+c_3 \qquad g'(1)=f'(1)=\frac{1}{2}=c_1+2c_2+3c_3$$

$$g''(1)=f''(1)=-\frac{1}{4}=2c_2+6c_3 \qquad g'''(1)=f'''(1)=\frac{3}{8}=6c_3$$

$$\rightarrow \quad c_3=\frac{1}{16},c_2=-\frac{5}{16},c_1=\frac{15}{16},c_0=\frac{5}{16}$$

❖ 4.求出$g(A)$，即可得$f(A)=g(A)$

$$g(A)=\frac{1}{16}(5I+15A-5A^2+A^3)$$

$$f(A)=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\ &1&1&1\\ & &1&1\\ & & &1\end{bmatrix}$$

❖矩阵导数定义

- 若矩阵$A(t)=(a_{i,j}(t))_{m\times n}$的每一个元素$a_{i,j}(t)$是变量$t$的可微函数，则称$A(t)$可微
- 其导数定义为

$$\frac{dA}{dt}=A'(t)=\left(\frac{da_{ij}}{dt}\right)_{m\times n}$$

- 类似地，可以定义矩阵高阶导数以及偏导数

❖矩阵导数性质

- $A(t)$, $B(t)$ 为可微矩阵，C 为与t无关的矩阵，则

（1）$\dfrac{d}{dt}[A(t)\pm B(t)]=\dfrac{dA}{dt}\pm\dfrac{dB}{dt}$

（2）$\dfrac{d}{dt}[A(t)B(t)]=\dfrac{dA}{dt}B+A\dfrac{dB}{dt}$

（3）$\dfrac{d}{dt}[a(t)A(t)]=\dfrac{da}{dt}A+a\dfrac{dA}{dt}$

（4）$\dfrac{d}{dt}\left(e^{tC}\right)=Ce^{tC}=e^{tC}C$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\cos\left(tC\right)\right)=-C\sin\left(tC\right)}$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\sin\left(tC\right)\right)=C\cos\left(tC\right)}$$

矩阵的微分和积分

❖证明（4） $\frac{d}{dt}\left(e^{tC}\right) = Ce^{tC} = e^{tC}C$

▪ [证明]

$$\frac{d}{dt}(e^{tC}) = \frac{d}{dt}\boxed{(I + tC + \frac{1}{2!}t^2C^2 + \frac{1}{3!}t^3C^3 + \cdots)}$$

$$= C + tC^2 + \frac{1}{2!}t^2C^3 + \cdots$$

$$\boxed{\begin{aligned} &= C(I + tC + \frac{1}{2!}t^2C^2 + \cdots) \\ &= Ce^{tC} \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &= (I + tC + \frac{1}{2!}t^2C^2 + \cdots)C \\ &= e^{tC}C \end{aligned}}$$

❖矩阵积分定义

- 若矩阵$A(t)=(a_{i,j}(t))_{m\times n}$的每一个元素$a_{i,j}(t)$都是区间$[t_0,t_1]$上的可积函数，则称$A(t)$在区间$[t_0,t_1]$上可积
- 定义$A(t)$在$[t_0,t_1]$上的积分为

$$\int_{t_0}^{t_1} A(t)dt = \left(\int_{t_0}^{t_1} a_{ij}(t)dt\right)_{m\times n}$$

❖矩阵积分性质

（1） $\int_{t_0}^{t_1}[A(t)\pm B(t)]dt=\int_{t_0}^{t_1}A(t)dt\pm\int_{t_0}^{t_1}B(t)dt$

（2） $\int_{t_0}^{t_1}[A(t)B]dt=\left(\int_{t_0}^{t_1}A(t)dt\right)B,\quad \int_{t_0}^{t_1}[AB(t)]dt=A\left(\int_{t_0}^{t_1}B(t)dt\right)$

（3） $\frac{d}{dt}\int_a^t A(t')dt'=A(t),\quad \int_a^b A'(t)dt=A(b)-A(a)$

❖一阶线性齐次常系数微分方程组

- 设有一阶线性齐次常系数微分方程组

自变量

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \cdots + a_{1n}x_n(t) \\ \dfrac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + \cdots + a_{2n}x_n(t) \\ \vdots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1(t) + a_{n2}x_2(t) + \cdots + a_{nn}x_n(t) \end{cases}$$

一元函数

常系数

一阶线性齐次常系数微分方程组

❖令 $$x(t)=[x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t)]^{\mathrm{T}}$$

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

❖则原方程组变成如下矩阵方程

$$\frac{dx}{dt}=Ax(t)$$

一阶线性齐次常系数微分方程组

$$\boxed{\frac{dx}{dt} = Ax(t)}$$

- 该方程的解为：$x(t) = e^{tA}x(0) = e^{tA}c$
  - 更一般的解形式为：$x(t) = e^{(t-t_0)A}x(t_0)$
  - [验证]

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ae^{tA}c = Ax(t)$$

    - 当t=0时

$$x(t) = e^{0A}c = Ic = c = x(0)$$

    - $x(t)$确为方程的解，积分常数亦正确

❖例1：求解微分方程组 $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -x_1 \end{cases}$

$$\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix}$$

- 解：

$$\boxed{\frac{dx}{dt} = Ax(t)} \qquad \boxed{A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}}$$

$$\boxed{x(t) = e^{tA}x(0) = e^{tA}c}$$

$$f(\lambda) = e^{t\lambda} \qquad \boxed{f(A) = e^{tA}}$$

一阶线性齐次常系数微分方程组

- 1、求出A的特征多项式

$$\varphi(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda & -1\\ 1 & \lambda\end{vmatrix}=(\lambda^2+1)=(\lambda-j)(\lambda+j)$$

$$\lambda_1=j,m_1=1;\lambda_2=-j,m_2=1$$

- 2、定义待定系数的多项式

$$g(\lambda)=c_0+c_1\lambda$$

$$\begin{cases}c_0=\cos t\\ c_1=\sin t\end{cases}$$

- 3、解方程

$$g(\lambda_1)=f(\lambda_1)=e^{jt}=\cos t+j\sin t=c_0+jc_1$$

$$g(\lambda_2)=f(\lambda_2)=e^{-jt}=\cos t-j\sin t=c_0-jc_1$$

❖一阶线性非齐次常系数微分方程组

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \cdots + a_{1n}x_n(t) + \boxed{b_1(t)} \\ \dfrac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + \cdots + a_{2n}x_n(t) + \boxed{b_2(t)} \\ \vdots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1(t) + a_{n2}x_2(t) + \cdots + a_{nn}x_n(t) + \boxed{b_n(t)} \end{cases}$$

一阶线性非齐次常系数微分方程组

- 类似的，令： $b(t)=[b_1(t),b_2(t),\cdots,b_n(t)]^{\mathrm{T}}$

$$x(t)=[x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t)]^{\mathrm{T}}$$

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

- 方程组化为矩阵方程

$$\boxed{\frac{dx}{dt}=Ax+b}$$

一阶线性非齐次常系数微分方程组

$$\frac{dx}{dt} = Ax + b$$

- 采用常数变易法求解之
  - 齐次方程组的解为 $e^{tA}c$
  - 设非齐次方程组的解为 $e^{tA}c(t)$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(e^{tA})c(t) + e^{tA}\frac{dc}{dt}$$

$$= Ax(t) + e^{tA}\frac{dc}{dt}$$

$$= Ax(t) + b(t)$$

$$\frac{dc}{dt} = e^{-tA}b(t)$$

$$c(t) = \int_0^t e^{-sA}b(s)ds$$

由积分性质(3)可验证$c(t)$是解

初始条件

$$x(t) = e^{tA}\left[c(0) + \int_0^t e^{-sA}b(s)ds\right]$$

一阶线性非齐次常系数微分方程组

❖高阶常微分方程常可以化为一阶常微分方程组来处理

- 例如 $$a\frac{d^2y}{dt^2}+b\frac{dy}{dt}+cy=f$$

  - 令 $$x_1=y, x_2=\frac{dy}{dt}$$

  - 则 $$\begin{cases}\dfrac{dx_1}{dt}=x_2\\ \dfrac{dx_2}{dt}=\dfrac{1}{a}(f-cx_1-bx_2)=-\dfrac{c}{a}x_1-\dfrac{b}{a}x_2+\dfrac{f}{a}\end{cases}$$

一般地，***n***阶常微分方程可以化为***n***个一阶常微分方程组成的方程组

Gauss消元法的矩阵形式

❖n元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}\xi_1 + a_{12}\xi_2 + \cdots + a_{1n}\xi_n = b_1 \\ a_{21}\xi_1 + a_{22}\xi_2 + \cdots + a_{2n}\xi_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}\xi_1 + a_{n2}\xi_2 + \cdots + a_{nn}\xi_n = b_n \end{cases}$$

$$Ax = b$$

$$\begin{pmatrix} A = (a_{ij}) \\ x = [\xi_1, \xi_2, \cdots \xi_n]^{\mathrm{T}} \\ b = [b_1, b_2 \cdots b_n]^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}$$

初始状态

$$A^{(0)} = A = \left(a_{ij}\right)_{n\times n}$$

$$\Delta_1 = a_{11}^{(0)} \neq 0$$

顺序主子式

Gauss消元法的矩阵形式

- 令 $\Longrightarrow$ $$c_{i1}=\frac{a_{i1}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}}$$
- 构造**Frobenius**矩阵

$$L_1=\begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ c_{21} & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ c_{n1} & 0 & & 1 \end{bmatrix}_{n\times n} \Longrightarrow L_1^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ -c_{21} & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ -c_{n1} & 0 & & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{(1)}=L_1^{-1}A^{(0)}=\begin{bmatrix} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & \cdots & a_{1n}^{(0)} \\ & a_{22}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} \\ 0 & \vdots & \ddots & \vdots \\ & a_{n2}^{(1)} & \cdots & a_{nn}^{(1)} \end{bmatrix}$$

Gauss消元法的矩阵形式

- 初等变换不改变行列式，故 $\Delta_2 = a_{11}^{(0)} a_{22}^{(1)}$
- 若 $\Delta_2 \neq 0$，则 $a_{22}^{(1)} \neq 0$
- 定义 $\longrightarrow$ $\boxed{c_{i2} = \dfrac{a_{i2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} (i = 3,4,\cdots n)}$
- 构造Frobenius矩阵

$$L_2 = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & c_{32} & \ddots & & \\ & \vdots & & & \\ & c_{n2} & & & 1 \end{bmatrix} \qquad L_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & -c_{32} & \ddots & & \\ & \vdots & & & \\ & -c_{n2} & & & 1 \end{bmatrix}$$

Gauss消元法的矩阵形式

- 可得

$$A^{(2)} = L_2^{-1} A^{(1)} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & a_{13}^{(0)} & \cdots & a_{1n}^{(0)} \\ & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} \\ & & a_{33}^{(2)} & \cdots & a_{3n}^{(2)} \\ & & \vdots & & \vdots \\ & & a_{n3}^{(2)} & \cdots & a_{nn}^{(2)} \end{bmatrix}$$

$$\boxed{A^{(1)} = L_2 A^{(2)}}$$

Gauss消元法的矩阵形式

- 依此类推
- 进行到第(*r*-1)步可得(2≤*r*≤*n*):

$$A^{(r-1)}=\begin{bmatrix} a_{11}^{(0)} & \cdots & a_{1r-1}^{(0)} & a_{1r}^{(0)} & \cdots & a_{1n}^{(0)} \\ & \ddots & \vdots & \vdots & \cdots & \\ & & a_{r-1r-1}^{(r-2)} & a_{r-1r}^{(r-2)} & \cdots & a_{r-1n}^{(r-2)} \\ & & & a_{rr}^{(r-1)} & \cdots & a_{rn}^{(r-1)} \\ & & & \vdots & & \vdots \\ & & & a_{nr}^{(r-1)} & \cdots & a_{nn}^{(r-1)} \end{bmatrix}$$

- 则*A*的*r*阶顺序主子式 $\Delta_r=a_{11}^{(0)}a_{22}^{(1)}\cdots a_{r-1r-1}^{(r-2)}a_{rr}^{r-1}$
- 若 $\Delta_r\neq 0$，则 $a_{rr}^{r-1}\neq 0$

Gauss消元法的矩阵形式

- 定义 $\longrightarrow$ $$\boxed{c_{ir}=\frac{a_{ir}^{r-1}}{a_{rr}^{r-1}}}$$
- 构造**Frobenius**矩阵

$$L_r=\begin{bmatrix}1&&&&&\\&\ddots&&&&\\&&1&&&\\&&c_{r+1r}&1&&\\&&\vdots&&\ddots&\\&&c_{nr}&&&1\end{bmatrix}\qquad L_r^{-1}=\begin{bmatrix}1&&&&&\\&\ddots&&&&\\&&1&&&\\&&-c_{r+1r}&1&&\\&&\vdots&&\ddots&\\&&-c_{nr}&&&1\end{bmatrix}$$

$$A^{(r)}=L_r^{-1}A^{r-1}=\begin{bmatrix}a_{11}^{(0)}&\cdots&a_{1r}^{(0)}&a_{1r+1}^{(0)}&\cdots&a_{1n}^{(0)}\\&\ddots&\vdots&\vdots&\cdots&\\&&a_{rr}^{(r-1)}&a_{rr+1}^{(r-1)}&\cdots&a_{rn}^{(r-1)}\\&&&a_{r+1r+1}^{(r)}&\cdots&a_{r+1n}^{(r)}\\&&&\vdots&&\vdots\\&&&a_{nr+1}^{(r)}&\cdots&a_{nn}^{(r)}\end{bmatrix}$$

$$\boxed{A^{(r-1)}=L_rA^{(r)}}$$

Gauss消元法的矩阵形式

- 第(n－1)步，得到

$$A^{(n-1)}=\begin{bmatrix} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & \cdots & a_{1n}^{(0)} \\ & a_{22}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn}^{(n-1)} \end{bmatrix}$$

- 完成了消元的过程
- 消元法能进行下去的条件是 $\Delta_r \neq 0 \quad (r=1,2,\cdots,n-1)$
- **Gauss**消元过程未用行、列交换

❖显然，由Gauss消元过程可知

$$A = A^{(0)} = L_1 A^{(1)} = L_1 L_2 A^{(2)} = \cdots = \boxed{L_1 L_2 L_3 \cdots L_{n-1}} A^{(n-1)}$$

下三角矩阵

$$L = L_1 L_2 \cdots L_{n-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ c_{21} & 1 & & & \\ \vdots & & \ddots & & \\ c_{n-11} & c_{n-12} & & 1 & \\ c_{n1} & c_{n2} & & c_{nn-1} & 1 \end{bmatrix}$$

$$U = A^{(n-1)}$$

上三角矩阵

*LU*分解与*LDU*分解

- 以上将***A***分解成一个下三角矩阵与上三角矩阵的乘积，就称为***LU***分解或***LR***分解
  - **L: lower U: upper**
  - **L: left R: right**
- ***LU***分解不唯一
  - 令***D***为对角元素不为零的***n***阶对角阵

$$A = LU = LDD^{-1}U = \hat{L}\hat{U}$$

LU分解与LDU分解

❖ 可采用如下方法将分解完全确定

- L为单位下三角矩阵
- U为单位上三角矩阵
- 将A分解为LDU
  - L，U分别为单位下三角，单位上三角矩阵
  - D为对角阵 $D = \mathrm{diag}[d_1, d_2, \cdots, d_n]$

$$\boxed{d_k = \Delta_k / \Delta_{k-1}}$$

$$\boxed{(k = 1, 2, \cdots, n) \quad \Delta_0 = 1}$$

- ***n*阶非奇异矩阵*A*有三角分解*LU*或*LDU*的充要条件**
  - ***A*的顺序主子式 $\Delta_r \neq 0 \quad (r = 1, 2, \cdots, n)$**
- **Note**
  - ***n*个顺序主子式全不为零的实际上较严格**
    - 特别是在数值计算中，$a_{kk}^{(k\text{-}1)}$很小时可能会带来大的计算误差
    - 因此，有必要采取选主元消元方法
      - 理论基础：对于任何可逆矩阵*A*，存在置换矩阵*P*使得*PA*的所有顺序主子式全不为零

LU分解与LDU分解

❖列主元素法

- 在矩阵的某列中选取模值最大者作为新的对角元素
  - 选取范围为对角线元素以下的各元素，比如
    - 第一步：找第一个未知数前的系数最大的一个，将其所在的方程作为第一个方程，即交换矩阵的两行，自由项也相应变换
    - 第二步变换时，找 $|a_{i2}|(i \geq 2)$ 中最大的一个，然后按照第一步的方法继续

❖行主元素法

- 在矩阵的某行中选取模值最大者作为新的对角元素
  - 选取范围为对角线元素以后的各元素
  - 需要记住未知数变换的顺序，最后再还原回去
  - 需要更多的存储空间，不如列主元素法方便

LU分解与LDU分解

❖全主元素法

- 若某列元素均较小或某行元素均较小时，可在各行各列中选取模值最大者作为对角元素
  - 与以上两种方法相比
  - 其计算稳定性更好，精度更高，计算量增大

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{U}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{L}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{U}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} \end{cases} \leftarrow \text{两个三角形方程回代即可}$$

其他三角分解

❖定义 设A具有唯一的LDU分解

- A的Doolittle分解
  - 将 D，U 结合起来得 $A = L\hat{U}$ （$\hat{U} = DU$）
- A的Crout分解
  - 将 L, D 结合起来得 $A = \hat{L}U$（$\hat{L} = LD$）

❖算法

Crout分解

- 设

$$\hat{L}=\begin{bmatrix} l_{11} & & & \\ l_{21} & l_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix} \quad U=\begin{bmatrix} 1 & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ & 1 & \cdots & u_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

- 由 $A=\hat{L}U$ 乘出得

其他三角分解

❖

（1） $l_{i1} = a_{i1}$ (第1列)　　$(i = 1,2,3,\cdots n)$　　$(A, \hat{L}$第1列$)$

（2） $u_{1j} = a_{1j} / l_{11}$ (第1行)　　$(j = 2,3,\cdots n)$　　$(A, U$第1行$)$

（3） $l_{i2} = a_{i2} - l_{i1}u_{12}$ (第2列)　　$(i = 2,3,\cdots n)$　　$(A, \hat{L}$第2列$)$

（4） $u_{2j} = \dfrac{1}{l_{22}}\left(a_{2j} - l_{21}u_{1j}\right)$　　$(j = 3,4,\cdots n)$　　$(A, U$第2行$)$

其他三角分解

❖ （5）一般地，对 $A,\hat{L}$ 的第 k 列运算，有

$$l_{ik}=a_{ik}-\sum_{m=1}^{k-1}l_{im}u_{mk}\qquad (k=1,2,\cdots,n;i=k,k+1,\cdots,n)$$

（6） 对 A，U 的第 k 行运算，有

$$u_{kj}=\frac{1}{l_{kk}}(a_{kj}-\sum_{m=1}^{k-1}l_{km}u_{mj})\qquad (k=1,2,\cdots n-1;j=k+1,k+2,\cdots n)$$

直至最后，得到的 l_{ij},u_{ij} 恰可排成

$$\begin{bmatrix} l_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1n} \\ l_{21} & l_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2n} \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & \cdots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & & l_{nn} \end{bmatrix}$$

先算列后算行

其他三角分解

❖ 厄米正定矩阵的**Cholesky**分解 $A = GG^{\mathrm{H}}$

$$
g_{ij} = \begin{cases} \left(a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} |g_{ik}|^2 \right)^{1/2} & i = j \\ \dfrac{1}{g_{jj}} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} g_{ik} \overline{g_{ik}} \right) & i > j \\ 0 & i < j \end{cases}
$$

- 理论上，**Cholesky**具有中间量可以控制 g_{ij}
- 应较稳健，但实际计算中发现，对希尔伯特矩阵问题，不如全主元方法

作业

- **p170-171**
  - **5、9**
- **p177**
  - **3、4**