矩 阵 论

主讲教师：徐乐

2014年12月10日星期三

上讲回顾

❖第8讲 Jordan标准形应用

- Jordan标准形的幂及多项式
- 矩阵序列
- 矩阵级数
- 方阵的幂级数
- 矩阵函数

❖Jordan标准形的幂

$$C_k^t\lambda_i^t$$

$$J^k = \begin{bmatrix} J_1^k & & & \\ & J_2^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s^k \end{bmatrix}$$

- j_i^k亦为类似上三角形条带矩阵
- 在与主对角线平行的斜线上各元素相等

$$J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & 0 \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_i \end{bmatrix}$$

$$J_i^2 = \begin{bmatrix} \lambda_i^2 & 2\lambda_i & 1 & & & 0 \\ & \lambda_i^2 & 2\lambda_i & 1 & & \\ & & \lambda_i^2 & 2\lambda_i & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda_i^2 & 2\lambda_i \\ 0 & & & & & \lambda_i^2 \end{bmatrix}$$

❖Jordan标准形多项式

$$f(x)=\sum_{k=0}^{m}a_k x^k=a_0+a_1x+\ldots+a_mx^m$$

$$f(J_i)=a_0\begin{bmatrix}1 & & & & 0\\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ 0 & & & & 1\end{bmatrix}+a_1\begin{bmatrix}\lambda_i & 1 & & & 0\\ & \lambda_i & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda_i & 1\\ 0 & & & & \lambda_i\end{bmatrix}+a_2\begin{bmatrix}\lambda_i^2 & 2\lambda_i & 1 & & 0\\ & \lambda_i^2 & 2\lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1\\ & & & \lambda_i^2 & 2\lambda_i\\ 0 & & & & \lambda_i^2\end{bmatrix}+\cdots$$

$$=\begin{bmatrix}f(\lambda) & f'(\lambda) & \frac{1}{2!}f''(\lambda) & \cdots & \frac{1}{(m_i-1)!}f^{(m_i-1)}(\lambda)\\ & f(\lambda) & f'(\lambda) & \cdots & \frac{1}{(m_i-2)!}f^{(m_i-2)}(\lambda)\\ & & & \ddots & \vdots\\ & & & \ddots & f'(\lambda)\\ & & & & f(\lambda)\end{bmatrix}_{\lambda=\lambda_i}$$

❖矩阵序列

▪ 定义

- 设有矩阵序列$\{A^{(k)}\}$，其中 $A^{(k)}=\left(a_{ij}^{(k)}\right)$
- 且当$k\to\infty$时$a_{ij}^{(k)}\to a_{ij}$
- 称$\left\{A^{(k)}\right\}$收敛
- 把$A=\left(a_{ij}\right)$叫做$\left\{A^{(k)}\right\}$的极限
- 或称$\left\{A^{(k)}\right\}$收敛于A

$$\lim_{k\to\infty} A^{(k)}=A \quad 或 \quad A^{(k)}\xrightarrow[k\to\infty]{} A$$

矩阵序列

❖收敛矩阵的定义

- 设 A 为方阵
- 若当 $k\to\infty$ 时 $A^k\to 0$ $\Longleftrightarrow$ $|\lambda_i|<1$
- 称 A 为收敛矩阵

矩阵级数

❖定义

- 矩阵序列$\left\{A^{(k)}\right\}$的无穷和$A^{(1)}+A^{(2)}+\cdots+A^{(k)}+\cdots$

  $$\sum_{k=1}^{\infty} A^{(k)}$$ 记为 矩阵级数

- 部分和 $S^{(N)}=\sum_{k=1}^{N} A^{(k)}$

- 若矩阵序列$\{S^{(N)}\}$收敛,且有极限S, 则称该矩阵级数收敛,且有和S，记为 $S=\sum_{k=1}^{\infty} A^{(k)}$

- 不收敛的矩阵级数称为是发散的

❖定义

- A为方阵
- $\sum_{k=0}^{\infty} c_k A^k, (A^0 = I)$ 称为 A 的幂级数
- $\sum_{k=0}^{\infty} A^k$ 称为A的Neumann级数
  - [定理] Neumann级数收敛的充要条件是
    - A为收敛矩阵
    - 且在收敛时其和为 $(I - A)^{-1}$

方阵的幂级数

- 收敛圆

$$\varphi(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k z^k$$

  - 若矩阵A的特征值全部落在幂级数的收敛圆内
  - 则矩阵幂级数是绝对收敛的 $\varphi(A)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k A^k,(A^0=I)$
  - 反之, 若A存在落在的收敛圆φ(z)外的特征值, 则φ(A)是发散的

- [推论]
  - 若幂级数在整个复平面上收敛, 则对任何的方阵A, φ(A)均收敛

❖定义

- 以矩阵为自变量的“函数”(实际上是“函矩阵”)

$$e^{A}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}A^{n}$$

$$\sin(A)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{(2n+1)!}A^{2n+1}$$

$$\cos(A)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{(2n)!}A^{2n}$$

- 矩阵函数的计算
- 利用**Jordan**标准形求矩阵函数

❖ Hamilton-Cayley定理

- n阶矩阵A是其特征多项式的零点
  - 即令 $\varphi(\lambda)=\det(\lambda I-A)=\lambda^n+c_1\lambda^{n-1}+\cdots+c_{n-1}\lambda+c_n$
  - 则有 $\varphi(A)=A^n+c_1A^{n-1}+\cdots+c_{n-1}A+c_nI=0$
- [证明]
  - 设A的特征值为

$$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_\mathrm{n}$$

  - 则$\varphi(\lambda)$又可写成

$$\varphi(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_n)$$

矩阵函数的计算

- 由Schur引理知
  - 存在酉矩阵U, 使得 $U^{-1}AU=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & * \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n\end{bmatrix}$

$$U^{-1}\varphi(A)U=\varphi(U^{-1}AU)=(U^{-1}AU-\lambda_1 I)(U^{-1}AU-\lambda_2 I)\cdots(U^{-1}AU-\lambda_n I)$$

$$=\begin{bmatrix}0 & & & & * \\ & \lambda_2-\lambda_1 & & & \\ & & \lambda_3-\lambda_1 & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & \lambda_n-\lambda_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1-\lambda_2 & & & & * \\ & 0 & & & \\ & & \lambda_3-\lambda_2 & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & \lambda_n-\lambda_2\end{bmatrix}\cdots\begin{bmatrix}\lambda_1-\lambda_n & & & & * \\ & \lambda_2-\lambda_n & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \lambda_{n-1}-\lambda_n & \\ 0 & & & & 0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 0 & 0 & & \\ \vdots & \vdots & & \\ & & * & \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda_1-\lambda_3 & & & & \\ & \lambda_2-\lambda_3 & & * & \\ & & 0 & & \\ & & & \lambda_4-\lambda_3 & \\ 0 & & & & \ddots \end{bmatrix}\cdots\begin{bmatrix} \lambda_1-\lambda_n & & & & \\ & \lambda_2-\lambda_n & & * & \\ & & \ddots & & \\ & & & \lambda_{n-1}-\lambda_n & \\ 0 & & & & 0 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & * \\ & & & \\ 0 & 0 & 0 & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda_1-\lambda_4 & & & & * \\ & \lambda_2-\lambda_4 & & & \\ & & \lambda_3-\lambda_4 & & \\ & & & 0 & \\ 0 & & & & \ddots \end{bmatrix}\cdots\begin{bmatrix} \lambda_1-\lambda_n & & & & * \\ & \lambda_2-\lambda_n & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \lambda_{n-1}-\lambda_n & \\ 0 & & & & 0 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}=0$$

$$\boxed{\varphi(A)=0}$$

❖ 零化多项式

- 对于多项式 $f(z)$
- 若 $f(A)=0$
- 则称 $f(z)$ 为A的零化多项式

❖ 方阵A的特征多项式为A的零化多项式

❖例1: 四阶矩阵的特征值是 π 、- π 、 0、 0, 求矩阵指数函数、正弦函数、余弦函数

- 解:

$$\varphi(\lambda)=(\lambda-\pi)(\lambda+\pi)(\lambda-0)(\lambda-0)=\lambda^4-\pi^2\lambda^2$$

$$\Downarrow$$

$$\varphi(A)=A^4-\pi^2A^2=0$$

$$\Downarrow$$

$$A^4=\pi^2A^2$$

$$\Downarrow$$

$$A^5=\pi^2A^3, A^6=\pi^2A^4=\pi^4A^2,\cdots$$

- 正旋函数

$$\boxed{A^3=\pi^0 A^3, A^5=\pi^2 A^3, A^7=\pi^4 A^3, \cdots, A^{2n+1}=\pi^{2(n-1)} A^3}$$

$$\sin(A)=A+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}A^{2n+1}=A+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\pi^{2(n-1)}A^3$$

$$=A+\frac{1}{\pi^3}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\pi^{2n+1}\right)A^3$$

$$=A+\frac{1}{\pi^3}(\sin\pi-\pi)A^3$$

$$=A-\pi^{-2}A^3$$

矩阵函数的计算

- 余旋函数

$$\boxed{A^2=\pi^0A^2, A^4=\pi^2A^2, A^6=\pi^4A^2, \cdots A^{2n}=\pi^{2(n-1)}A^2}$$

$$\cos(A)=I+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}A^{2n}=I+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\pi^{2(n-1)}A^2$$

$$=I+\frac{1}{\pi^2}(\cos\pi-1)A^2$$

$$=I-2\pi^{-2}A^2$$

矩阵函数的计算

- 指数函数

$$e^{A}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}A^{n}$$

$$=I+A+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}A^{2n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!}A^{2n+1}$$

$$=I+A+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}\pi^{2(n-1)}A^{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!}\pi^{2(n-1)}A^{3}$$

$$=I+A+\frac{\cosh\pi-1}{\pi^{2}}A^{2}+\frac{\sinh\pi-\pi}{\pi^{3}}A^{3}$$

利用Jordan标准形求矩阵函数

❖对于矩阵的多项式 f，有 $f(A)=Pf(J)P^{-1}$

$$f(J)=\begin{bmatrix} f(J_1) & & & & \\ & f(J_2) & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & f(J_s) \end{bmatrix}$$

$$f(J_i)=\begin{bmatrix} f(\lambda_i) & f'(\lambda_i) & \frac{1}{2!}f''(\lambda_i) & \cdots & \frac{1}{(m_i-1)!}f^{(m_i-1)}(\lambda_i) \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \end{bmatrix}$$

不仅对矩阵的多项式成立，对矩阵的幂级数也成立

利用Jordan标准形求矩阵函数

❖矩阵函数的另一种定义及计算方法

- 设n阶矩阵A的Jordan标准形为J

$$J=\begin{bmatrix} J_1 & & & & \\ & J_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & J_s \end{bmatrix} \qquad J(\lambda_i)=\begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & & 0 \\ & \lambda_i & 1 & & \\ & & \lambda_i & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ 0 & & & & \lambda_i \end{bmatrix}$$

- 且有非奇异矩阵P使得：$P^{-1}AP=J$

利用Jordan标准形求矩阵函数

- 对于函数$f(z)$，若下列函数均有意义，则称矩阵函数$f(A)$有意义

$$f(\lambda_i), f'(\lambda_i), \cdots, f^{(m_i-1)}(\lambda_i) \qquad (\lambda = 1, 2, \cdots, s)$$

- 且有

$$f(A) = Pf(J)P^{-1} = P\begin{bmatrix} f(J_1) & & & & \\ & f(J_2) & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & f(J_s) \end{bmatrix}P^{-1}$$

$$f(J_i) = \begin{bmatrix} f(\lambda_i) & f'(\lambda_i) & \frac{1}{2!}f''(\lambda_i) & \cdots & \frac{1}{(m_i-1)!}f^{(m_i-1)}(\lambda_i) \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \end{bmatrix}_{m_i \times m_i}$$

利用Jordan标准形求矩阵函数

❖矩阵函数的求法（步骤）

- 求出A的Jordan标准形J及变换矩阵P　$P^{-1}AP=J$
- 对于的各Jordan块 J_i 求出 $f(J_i)$
  - 即计算出 $f(\lambda_i), f'(\lambda_i), \ldots\ldots, f^{(m_i-1)}(\lambda_i)$
  - 按照顺序构成 $f(J_i)$

$$f(J_i)=\begin{bmatrix} f(\lambda_i) & f'(\lambda_i) & \frac{1}{2!}f''(\lambda_i) & \cdots & \frac{1}{(m_i-1)!}f^{(m_i-1)}(\lambda_i) \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & \end{bmatrix}_{m_i\times m_i}$$

利用Jordan标准形求矩阵函数

- 合成

$$f(J)=\begin{bmatrix} f(J_1) & & & & \\ & f(J_2) & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & f(J_s) \end{bmatrix}$$

- 矩阵乘积给出

$$\boxed{f(A)=Pf(J)P^{-1}}$$

- **Note：** 计算结果与**Jordan**标准形中**Jordan**块的顺序无关

利用Jordan标准形求矩阵函数

❖例2 （教材P70例1.27）

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3&4\\&1&2&3\\&&1&2\\&&&1\end{bmatrix} \longrightarrow \boxed{\sqrt{A}}$$

$$\boxed{\lambda_1=1, m_1=4, f(z)=\sqrt{z}}$$

- [解] 1.求出J及P

$$J=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\&1&1&0\\&&1&1\\&&&1\end{bmatrix}, P=\begin{bmatrix}8&4&0&0\\&4&-1&1\\&&2&-2\\&&&1\end{bmatrix}, P^{-1}=\frac{1}{16}\begin{bmatrix}2&-2&-1&0\\&4&2&0\\&&8&16\\&&&16\end{bmatrix}$$

利用Jordan标准形求矩阵函数

- 2. 求出 $f(\lambda_i), f'(\lambda_i), \ldots\ldots, f^{(m_i-1)}(\lambda_i)$

$$f(1)=1$$

$$f'(1)=\frac{1}{2}z^{-\frac{1}{2}}|_{z=1}=\frac{1}{2}$$

$$f''(1)=-\frac{1}{4}z^{-\frac{3}{2}}|_{z=1}=-\frac{1}{4}$$

$$f'''(1)=\frac{3}{8}z^{-\frac{5}{2}}|_{z=1}=\frac{3}{8}$$

- 构成 $f(J_i)$ $\quad f(J_1)=\begin{bmatrix}16 & 8 & -2 & 1\\ & 16 & 8 & -2\\ & & 16 & 8\\ & & & 16\end{bmatrix}\frac{1}{16}$

利用Jordan标准形求矩阵函数

- 3.合成 $f(J)=f(J_1)$
- 4.矩阵乘积给出

$$\boxed{f(A)=Pf(J)P^{-1}}$$

$$f(A)=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ & 1 & 1 & 1\\ & & 1 & 1\\ & & & 1\end{bmatrix}$$

利用Jordan标准形求矩阵函数

- **Note1：** $\sqrt{A}$ 确与 A^2 构成反函数

$$[f(A)]^2=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\&1&1&1\\&&1&1\\&&&1\end{bmatrix}^2=\begin{bmatrix}1&2&3&4\\&1&2&3\\&&1&2\\&&&1\end{bmatrix}=A$$

- **Note2：** 矩阵函数的种类不仅是我们介绍的这种，如辛矩阵

$$A=\begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix}$$

定义， $\sqrt{A}=\begin{bmatrix}\pm i&0\\0&\pm i\end{bmatrix}$

$$B=\begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix}$$

满足 $B^2=A$，即 B 也可以看作某种 $\sqrt{A}$

利用Jordan标准形求矩阵函数

❖ **Note3：**

- 当函数$f(z)$不存在泰勒展开(而存在洛朗展开)
- 如按原先的幂级数定义，则根本无从谈$f(A)$的计算
- 可见新的定义延拓了原来的定义

作业

- **P163**
  - **5，6**