矩 阵 论

主讲教师：徐乐

2014年9月24日星期三

上讲回顾

- 第二讲 线性空间及线性子空间
  - 线性空间
    - 坐标
    - 基变换与坐标变换
  - 线性子空间
    - 定义及其性质
    - 子空间的交与和

线性空间的坐标

❖ 坐标的定义

- 称线性空间V^n的一个基$x_1, x_2, \ldots, x_n$为V^n的一个坐标系
- $\forall x \in V^n$它在该基下的线性表示为：

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_i x_i \quad (\xi_i \in K, x_i \in V^n, i = 1,2\cdots,n)$$

$\xi_1, \xi_2 \cdots, \xi_n$为$x$在该坐标系中的坐标或分量

$$(\xi_1, \xi_2 \cdots, \xi_n)^T$$

线性空间的坐标

$$\begin{cases} x = (\xi_1, \xi_2 \cdots, \xi_n) \\ y = (\eta_1, \eta_2 \cdots, \eta_n) \end{cases} \to x + y = (\xi_1 + \eta_1, \xi_2 + \eta_2 \cdots, \xi_n + \eta_n)$$

$$x = (\xi_1, \xi_2 \cdots, \xi_n) \to kx = (k\xi_1, k\xi_2 \cdots, k\xi_3)$$

- 同一元素在不同坐标系中的坐标是不同的
- 基是不唯一的
- 研究基改变时坐标变换的规律

$$[y_1, y_2 \cdots, y_n] = [x_1, x_2 \cdots, x_n]\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix} = [x_1, x_2 \cdots, x_n]C$$

过渡矩阵

线性子空间的定义及其性质

❖定义

- V_1是数域K上的线性空间V的一个非空子集合
- 对V已有的线性运算满足以下条件
  - （1）如果$x,y\in V_1$，则$x+y\in V_1$
  - （2）如果$x\in V_1$，$k\in K$，则$kx\in V_1$
- 则称V_1是V的一个线性子空间或子空间

❖ 性质

- 线性子空间V_1与线性空间V享有共同的零元素
- V_1中元素的负元素仍在V_1中

❖生成子空间

- 设 $x_1, x_2 \cdots, x_m$ 为 V 中的元素
- 它们所有线性组合的集合也是V的线性子空间

$$\left\{\sum_{i=1}^{m} k_i x_i \middle| k_i \in K, i = 1,2\cdots, m\right\}$$

  - 称为由 $x_1, x_2 \cdots, x_m$ 生（张）成的子空间
  - 记为 $L(x_1, x_2 \cdots, x_m)$
  - 或者 $Span(x_1, x_2 \cdots, x_m)$
- 若$x_1, x_2 \cdots, x_m$线性无关，则 $\dim\{L(x_1, x_2 \cdots, x_m)\} = m$

❖基扩定理

- 设V_1是数域K上线性空间V^n的一个m维子空间
- $x_1, x_2 \cdots, x_m$是V_1的一个基
- 则这m个基向量必可扩充为V^n的一个基
- 换言之
  - 在V^n中必可找到$n-m$个元素$x_{m+1}, x_{m+2} \cdots, x_n$
  - 使得 $x_1, x_2 \cdots, x_n$ 成为V^n的一个基
  - 这$n-m$个元素必不在V_1中

子空间的交与和

❖定义

- 设V_1、 V_2是线性空间V的两个子空间

交 $$V_1 \cap V_2 = \{x \mid x \in V_1, x \in V_2\}$$

和 $$V_1 + V_2 = \{x + y \mid x \in V_1, y \in V_2\}$$

❖维数公式

- 若V_1 和 V_2是线性空间V的子空间
- 则有 $\dim(V_1 + V_2) + \dim(V_1 \cap V_2) = \dim V_1 + \dim V_2$

第三讲 直和及线性变换

- 线性子空间的直和
- 线性变换的定义及性质

子空间的直和

❖定义

- 设V_1 和 V_2是线性空间V的子空间
  - 若其和空间V_1+V_2中的任一元素只能唯一的表示为V_1的一个元素与V_2的一个元素之和
    - 即 $\forall x \in V_1 + V_2$
    - 存在唯一的 $y \in V_1, z \in V_2$
    - 使 $x = y + z$
  - 则称V_1+V_2为V_1与V_2的直和
  - 记为 $V_1 \oplus V_2$

子空间的直和

❖子空间的直和并不是一种特殊的和

❖仍然是

$$V_1 + V_2 = \{x + y \mid x \in V_1, y \in V_2\}$$

- 反映的是两个子空间的关系特殊
- 一般和空间中向量的表示方法并不唯一

子空间的直和

❖定理

- 关于直和如下四种表述等价
  - （1） V_1+V_2成为直和 $V_1 \oplus V_2$
  - （2） $V_1 \cap V_2=\{0\}$
  - （3） $\dim(V_1+V_2)=\dim V_1+\dim V_2$
  - （4）若
    - $x_1,x_2\cdots,x_s$ 为V_1的基
    - $y_1,y_2\cdots,y_t$ 为V_2的基
    - 则 $x_1,x_2\cdots,x_s,y_1,y_2\cdots,y_t$ 为V_1+V_2的基

子空间的直和

- [证明]
  - 由维数公式可知（2）和（3）显然等价
  - 采用循环证法：（1）→（2）→（4）→（1）
    - （1）→（2）
      - » 已知 $V_1+V_2=V_1\oplus V_2$
      - » 假定 $x\neq 0$ 且 $x\in V_1\cap V_2$，则
      - » 对0元素存在两种分解
      - » 这与直和的定义矛盾
      - » 所以假定不成立
      - » 在$V_1\cap V_2$中只能存在0元素，即$V_1\cap V_2=\{0\}$

$$\underbrace{0}_{\in V_1}+\underbrace{0}_{\in V_2}=\underbrace{0}_{\in V_1+V_2}=\underbrace{x}_{\in V_1}+\underbrace{(-x)}_{\in V_2}$$

子空间的直和

- （2）→（4）
  - 已知 $V_1 \cap V_2 = \{0\}$
  - 成为基的两个条件：
    - » 可以线性表示V_1+V_2中的任意元素
    - » 线性无关
  - 则 $\forall x \in V_1 \quad y \in V_2$
  - 存在坐标表示式 $x=\sum_{i=1}^{s}\xi_i x_i \quad y=\sum_{i=1}^{t}\eta_i y_i$
  - 由于 $x+y$ 可表示V_1+V_2中的任一元素
  - 则 $x_1, x_2 \cdots, x_s, y_1, y_2 \cdots, y_t$ 可表示V_1+V_2中的任意元素

子空间的直和

- 假设 $x_1, x_2 \cdots, x_s, y_1, y_2 \cdots, y_t$ 线性相关
- 即存在不全为0的 $\xi_1, \xi_2 \cdots, \xi_s, \eta_1, \eta_2 \cdots, \eta_t$
- 使 $\sum_{i=1}^{s} \xi_i x_i + \sum_{i=1}^{t} \eta_i y_i = 0$

$$x = \sum_{i=1}^{s} \xi_i x_i \in V_1$$

$$y = \sum_{i=1}^{t} \eta_i y_i \in V_2$$

$$\sum_{i=1}^{s} \xi_i x_i = -y \in V_2$$

$$\sum_{i=1}^{s} \xi_i x_i \in V_1 \cap V_2 \xrightarrow{(2)} \sum_{i=1}^{s} \xi_i x_i = 0$$

$$\xi_1 = \xi_2 = \cdots = \xi_s = 0$$

同理

$$\eta_1 = \eta_2 = \cdots = \eta_s = 0$$

$x_1, x_2 \cdots, x_s, y_1, y_2 \cdots, y_t$ 可作为 $V_1 + V_2$ 的基

矛盾

- （4）→（1）
  - 已知（4）成立
  - 在 $x_1,x_2\cdots,x_s,y_1,y_2\cdots,y_t$ 这组基下 $\forall x\in V_1+V_2$
  - 存在唯一的坐标 $\xi_1,\xi_2\cdots,\xi_s,\eta_1,\eta_2\cdots,\eta_t$
  - 使得 $x=\sum_{i=1}^{s}\xi_i x_i+\sum_{i=1}^{t}\eta_i y_i$

$$\sum_{i=1}^{s}\xi_i x_i\in V_1 \qquad \sum_{i=1}^{t}\eta_i y_i\in V_2$$

V_1+V_2成为直和

即证

课间休息时间

线性变换及其运算

- 线性空间是某类客观事物从量的方面的一个抽象
- 线性变换研究线性空间中元素之间最基本的联系
- 本次课程主要介绍线性变换的基本概念和运算

❖定义

- 设V是数域K上的线性空间
- T是V到自身的一个映射
- 使得对于V中的任意元素 x 均存在唯一的 $y \in V$ 与之对应
- 则称T为V的一个变换或算子
- 记为

$$\boxed{Tx = y}$$

线性变换及其运算

$$\boxed{Tx = y}$$

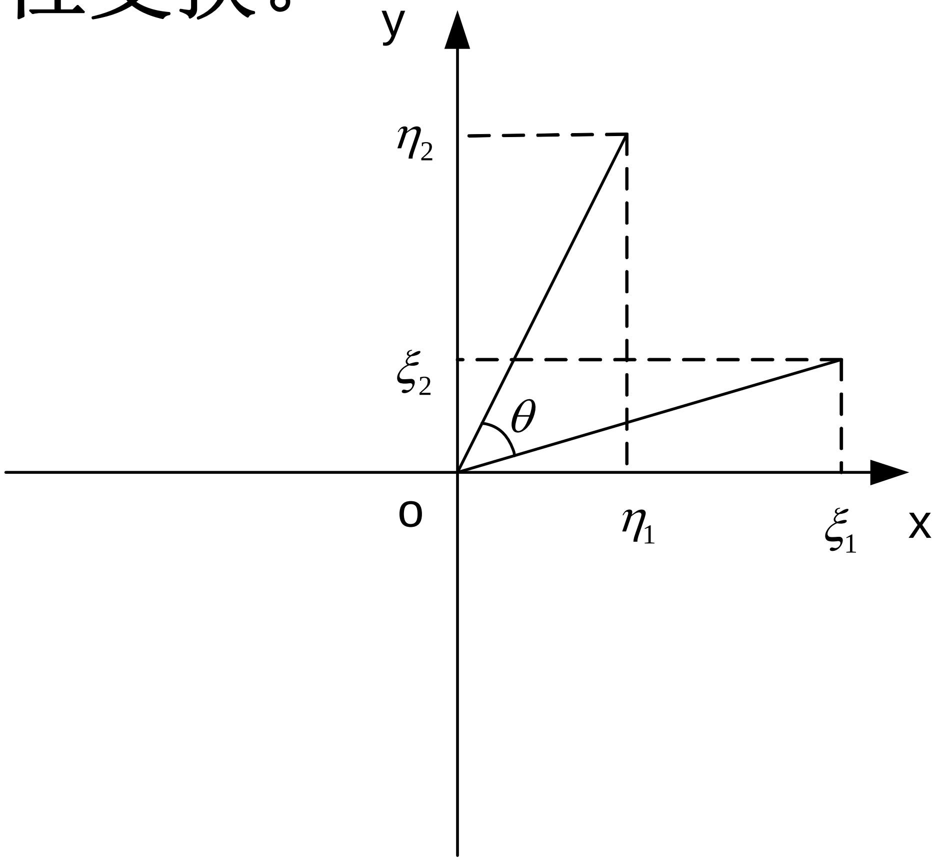
- 称 y 为 x 在变换 T 下的象
- x 为 y 的原象
- 若变化 T 还满足 $\forall x, y \in V, k, l \in K$

$$T(kx + ly) = k(Tx) + l(Ty)$$

- 称T为线性变换

❖[例1] 二维实向量空间将其绕原点旋转θ角的操作就是一个线性变换。

$$\mathbf{R}^2 = \left\{ \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} \middle| \ \xi_i \in \mathbf{R} \right\}$$



- [证明] $x=\begin{bmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{bmatrix}$ $y=Tx=\begin{bmatrix}\eta_1\\ \eta_2\end{bmatrix}$

$$\boxed{\begin{cases}\eta_1=\xi_1\cos\theta-\xi_2\sin\theta\\ \eta_2=\xi_1\sin\theta+\xi_2\cos\theta\end{cases}}$$

$$\boxed{\begin{bmatrix}\eta_1\\ \eta_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{bmatrix}}$$

- 可见该操作为变换
- 下面证明其为线性变换

线性变换及其运算

$$\forall x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\in R^2 \qquad z=\begin{bmatrix}z_1\\z_2\end{bmatrix}\in R^2 \qquad k,l\in \mathrm{R}$$

$$\boxed{kx+lz=\begin{bmatrix}kx_1\\kx_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}lz_1\\lz_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}kx_1+lz_1\\kx_2+lz_2\end{bmatrix}}$$

$$T(kx+lz)=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}kx_1+lz_1\\kx_2+lz_2\end{bmatrix}$$

$$=k\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}+l\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z_1\\z_2\end{bmatrix}$$

$$\boxed{=k(Tx)+l(Tz)}$$

- T是线性变换

- [例2] 次数不超过 n 的全体实多项式P_n构成实数域上的一个 $n+1$ 维的线性空间
- 其基可选为 $\{1, x, x^2, \cdots, x^n\}$
- 证明微分算子 $D = \dfrac{d}{dx}$是 P_n 上一个线性变换
  - [证明]
    - 显然 D 对 P_n 而言是变换
    - 验证其满足线性变换条件

❖证明 D 满足线性变换的条件

$\forall f, g \in \mathrm{P_n}$ $\qquad k, l \in \mathrm{R}$

$$D(kf + lg) = k(Df) + l(Dg)$$

- D 是 P_n 上的线性变换

❖性质

- 线性变换把零元素仍变为零元素
- 负元素的象为原来元素的象的负元素
- 线性变换把线性相关的元素组仍变为线性相关的元素组
  - **NOTE：** 线性无关的元素组经过线性变换不一定再是线性无关的
    - 变换后的情况与元素组和线性变换有关
    - 若线性变换将所有的元素组仍变换为线性无关的元素组，则称之为满秩的线性变换，其变换矩阵为满秩矩阵

❖[证明] 线性变换 $T(kx+ly)=k(Tx)+l(Ty)$

- （1） $T(O)=T(0x)=0(Tx)=O$
- （2） $T(-x)=(-1)(Tx)=-(Tx)$
- （3）元素组 $x_1,x_2,\cdots,x_m$ 线性相关，即存在一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 使

$$\sum_{i=1}^{m} k_i x_i = 0$$

$$T(\sum_{i=1}^{m} k_i x_i) = \sum_{i=1}^{m} k_i (Tx_i) = T(0) = 0$$

$\boxed{\{Tx_i\}\text{线性相关}}$

❖线性变换的运算

- （1）恒等变换T_e :$\forall x \in V, T_e x = x$
- （2）零变换 T_0： $\forall x \in V, T_0 x = 0$
- （3）变换的相等：
  - T_1、 T_2是的两个线性变换，$\forall x \in V$
  - 均有 $T_1 x = T_2 x$
  - 则称 $T_1 = T_2$
- （4）线性变换的和 $T_1 + T_2$： $\forall x \in V$

$$(T_1 + T_2)x = T_1 x + T_2 x$$

线性变换及其运算

- （5）线性变换的数乘kT：$\forall x \in V \quad (kT)x = k(Tx)$
  - 负变换： $(-T)x = -(Tx)$
- （6）线性变换的乘积 $T_1 T_2$：$\forall x \in V \quad (T_1T_2)x = T_1(T_2x)$
- （7）逆变换 T^{-1}： $\forall x \in V$
  - 若存在线性变换 S 使得 $(ST)\,x \equiv x$
  - 则称S为T的逆变换 $S=T^{-1}$
- （8）线性变换的多项式：$T^n = \underbrace{TT\cdots T}_{n个}$ 规定$T^0 = T_e$

$$f(T) = \sum_{n=0}^{N} a_n T^n \quad \to \quad f(T)x = \sum_{n=0}^{N} a_n T^n x$$

线性变换及其运算

- **Note1**： T_e也称为单位变换，它的矩阵表示为单位矩阵I
- **Note2**： T_0对应的矩阵表示为零矩阵
- **Note3**：和矩阵的乘积一样，线性变换的乘积不满足交换律
- **Note4**：不是所有的变换都具有逆变换，只有满秩变换才有逆变换， $ST = T_e$
- **Note5**：恒等变换、零变换、线性变换的和、乘积多项式及逆变换（若存在）均为线性变换

作业

- 77
  - 1