# 第六章 样本及抽样分布
## 习 题 课

一、重点与难点

二、主要内容

三、典型例题

## 一、重点与难点

**1.重点**

(1) 正态总体某些常用统计量的分布.

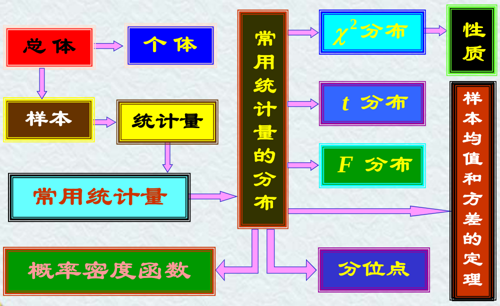
(2) 临界值的查表计算.

**2.难点**

(1) 几个常用统计量的构造.

(2) 标准正态分布和$F$分布临界值的查表计算.

## 二、主要内容




## 三、典型例题

**例1** 设 $X$ 服从 $N(0,1)$, $(X_1, X_2, \cdots, X_6)$为来自总体 $X$ 的简单随机样本,

$$Y=(X_1+X_2+X_3)^2+(X_4+X_5+X_6)^2$$

试决定常数 $C$, 使得 $CY$ 服从 $\chi^2$ 分布.

**解** 根据正态分布的性质,

$$X_1+X_2+X_3 \sim N(0,3),$$

$$X_4+X_5+X_6 \sim N(0,3),$$

则 $\dfrac{X_1+X_2+X_3}{\sqrt{3}} \sim N(0,1)$,

$$\frac{X_4+X_5+X_6}{\sqrt{3}} \sim N(0,1),$$

故 $\left(\dfrac{X_1+X_2+X_3}{\sqrt{3}}\right)^2 \sim \chi^2(1)$,

$$\left(\frac{X_4+X_5+X_6}{\sqrt{3}}\right)^2 \sim \chi^2(1),$$

因为 $X_1, X_2, \cdots, X_6$相互独立及 $\chi^2$ 分布的可加性,

$$\left(\frac{X_1+X_2+X_3}{\sqrt{3}}\right)^2+\left(\frac{X_4+X_5+X_6}{\sqrt{3}}\right)^2$$

$$=\frac{1}{3}[(X_1+X_2+X_3)^2+(X_4+X_5+X_6)^2] \sim \chi^2(2),$$

所以$C=\dfrac{1}{3}$, $CY$ 服从 $\chi^2$ 分布.

**例2** 设 $\bar{X}_1$ 和 $\bar{X}_2$ 是来自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的容量为 $n$ 的两样本 $(X_{11},X_{12},\cdots,X_{1n})$ 和 $(X_{21},X_{22},\cdots,X_{2n})$ 的样本均值，试确定 $n$，使得这两个样本均值之 差超过 $\sigma$ 的概率大约为 0.01.

**解** $\bar{X}_1 \sim N\left(\mu,\dfrac{\sigma^2}{n}\right)$， $\bar{X}_2 \sim N\left(\mu,\dfrac{\sigma^2}{n}\right)$，

则 $\bar{X}_1-\bar{X}_2 \sim N\left(0,\dfrac{2\sigma^2}{n}\right)$，

$$P\{|\bar{X}_1-\bar{X}_2|>\sigma\}=P\left\{\frac{|\bar{X}_1-\bar{X}_2|}{\sqrt{2/n}\,\sigma}>\sqrt{\frac{n}{2}}\right\}$$

$$=1-P\left\{\left|\frac{\bar{X}_1-\bar{X}_2}{\sqrt{2/n}\,\sigma}\right|\le\sqrt{\frac{n}{2}}\right\}$$

$$\approx 1-\left[\Phi\left(\sqrt{\frac{n}{2}}\right)-\Phi\left(-\sqrt{\frac{n}{2}}\right)\right]=2-2\Phi\left(\sqrt{\frac{n}{2}}\right)=0.01,$$

有 $\Phi\left(\sqrt{\dfrac{n}{2}}\right)\approx 0.995$， 查标准正态分布表知

$\sqrt{\dfrac{n}{2}}=2.58$， 于是 $n=14$.

**例3** 设总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，从此总体中取一个容量为 $n=16$ 的样本 $(X_1,X_2,\cdots,X_{16})$，求概率

(1) $P\left\{\dfrac{\sigma^2}{2}\le\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2\le 2\sigma^2\right\}$;

(2) $P\left\{\dfrac{\sigma^2}{2}\le\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2\le 2\sigma^2\right\}$.

**解** (1) 因为 $X_1,X_2,\cdots,X_{16}$ 是来自正态总体的样本，

所以 $\dfrac{1}{\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 \sim \chi^2(n)$，

于是 $P\left\{\dfrac{\sigma^2}{2}\le\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2\le 2\sigma^2\right\}$

$$=P\left\{8\le\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{16}(X_i-\mu)^2\le 32\right\}$$

$$=P\{8\le\chi^2(16)\le 32\}$$

$$=P\{\chi^2(16)\le 32\}-P\{\chi^2(16)\le 8\}$$

$$=[1-P\{\chi^2(16)\ge 32\}]-[1-P\{\chi^2(16)\ge 8\}]$$

$$=0.94;$$

(2) 因为 $\dfrac{1}{\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2 \sim \chi^2(n-1)$，

于是 $P\left\{\dfrac{\sigma^2}{2}\le\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2\le 2\sigma^2\right\}$

$$=P\left\{8\le\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{16}(X_i-\bar{X})^2\le 32\right\}$$

$$=P\{8\le\chi^2(15)\le 32\}$$

$$=P\{\chi^2(15)\ge 8\}-P\{\chi^2(15)\ge 32\}$$

$$=0.92$$

备用例题

抽样分布

$\chi^2$分布 设 $X_1,\cdots,X_n$ 相互独立，且均服从正态分布 $N(0,1)$，则称随机变量 $\chi^2=\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2$ 服从自由度为 $n$ 的 $\chi^2$ 分布，记为 $\chi^2\sim\chi^2(n)$.

$t$ 分布 设 $X\sim N(0,1)$， $Y\sim\chi^2(n)$，且 $X$ 与 $Y$ 相互独立，则称随机变量 $t=\dfrac{X}{\sqrt{Y/n}}$ 服从自由度为 $n$ 的 $t$ 分布，记为 $t\sim t(n)$.

$F$分布 设 $U\sim\chi^2(n_1)$， $V\sim\chi^2(n_2)$，$U$ 与 $V$ 相互独立，则称随机变量 $F=\dfrac{U/n_1}{V/n_2}$ 服从自由度为（$n_1,n_2$）的分布，记为 $F\sim F(n_1,n_2)$.

## 抽样分布de定理四

样本均值的分布

设$X \sim N(\mu,\sigma^2)$，$X_1,\cdots,X_n$是来自总体$X$的样本，则样本均值$\overline{X}$有$\overline{X} \sim N(\mu,\sigma^2/n)$. 定理四(1)

样本方差、均值的分布

设$X_1,\cdots,x_n$是来自总体$N(\mu,\sigma^2)$的样本，$\overline{X},S^2$分别是样本均值和样本方差，则有

(1) $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$ 定理四(3)

(2) $\overline{X}$与$S^2$独立.

(3) $\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$ 定理四(4)

## 两总体样本均值差、样本方差比的分布

设$X_1,\cdots,X_{n_1}$与$Y_1,\cdots,Y_{n_2}$分别来自总体$N(\mu_1,\sigma_1^2)$和$N(\mu_2,\sigma_2^2)$的样本，且这两个样本相互独立.$\overline{X},\overline{Y}$分别是这两个样本的样本均值；$S_1^2,S_2^2$分别是这两个样本的样本方差，则有

(1) $\dfrac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2} \sim F(n_1-1,n_2-1)$; 定理四(8)

(2) 当$\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$时, 定理四(6)

$$\frac{\overline{X}-\overline{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}} \sim t(n_1+n_2-2)$$