第一节　概率论的基本概念

一、 概率论的诞生及应用
二、 随机现象
三、 随机试验
四、 小结

一、概率论的诞生及应用

1. 概率论的诞生

1654年,一个名叫梅累的骑士就“两个赌徒约定赌若干局, 且谁先赢 *c* 局便算赢家, 若在一赌徒胜 *a* 局 ($a<c$),另一赌徒胜b局($b<c$)时便终止赌博,问应如何分赌本” 为题求教于帕斯卡, 帕斯卡与费马通信讨论这一问题, 于1654 年共同建立了概率论的第一个基本概念

—— 数学期望.

2. 概率论的应用

概率论是数学的一个分支，它研究随机现象的数量规律， 概率论的应用几乎遍及所有的科学领域，例如天气预报、 地震预报、产品的抽样调查，在通讯工程中概率论可用以提高信号的抗干扰性、分辨率等等.

二、随机现象

自然界所观察到的现象: 确定性现象　随机现象

1.确定性现象

在一定条件下必然发生的现象称为确定性现象.

实例

“太阳不会从西边升起”，
“水从高处流向低处”，
“同性电荷必然互斥”，

确定性现象的特征　条件完全决定结果

2. 随机现象

在一定条件下可能出现也可能不出现的现象称为随机现象.

实例1　在相同条件下掷一枚均匀的硬币，观察正反两面出现的情况.

结果有可能出现正面也可能出现反面.

实例2　用同一门炮向同一目标发射同一种炮弹多发，观察弹落点的情况.

结果: 弹落点会各不相同.

实例3　抛掷一枚骰子,观察出现的点数.

结果有可能为:
1, 2, 3, 4, 5 或 6.

随机现象的特征　条件不能完全决定结果

概率论就是研究随机现象规律性的一门数学学科.

说明

1. 随机现象揭示了条件和结果之间的非确定性联系，其数量关系无法用函数加以描述.

2. 随机现象在一次观察中出现什么结果具有偶然性，但在大量试验或观察中，这种结果的出现具有一定的统计规律性，概率论就是研究随机现象这种本质规律的一门数学学科.

如何来研究随机现象?

随机现象是通过随机试验来研究的.

问题 什么是随机试验?

三、随机试验

定义

在概率论中,把具有以下三个特征的试验称为随机试验.

1. 可以在相同的条件下重复地进行;

2. 每次试验的可能结果不止一个,并且能事先明确试验的所有可能结果;

3. 进行一次试验之前不能确定哪一个结果会出现.

说明

1. 随机试验简称为试验，是一个广泛的术语.它包括各种各样的科学实验，也包括对客观事物进行的“调查”、“观察”或“测量”等.

2. 随机试验通常用 E 来表示.

实例 “抛掷一枚硬币,观察字面,花面出现的情况”

分析

(1) 试验可以在相同的条件下重复地进行;

(2) 试验的所有可能结果:

字面、花面;

(3) 进行一次试验之前不能确定哪一个结果会出现. 故为随机试验.

同理可知下列试验都为随机试验.

1. 抛掷一枚骰子,观察出现的点数.

2. 从一批产品中,依次任选三件,记录出现正品与次品的件数.

3. 记录某公共汽车站某日上午某时刻的等车人数.

4. 考察某地区 10 月份的平均气温.

5. 从一批灯泡中任取一只,测试其寿命.

四、小结

1. 概率论是研究随机现象规律性的一门数学学科.

随机现象的特征：条件不能完全决定结果.

2. 随机现象是通过随机试验来研究的.

随机试验：
- (1) 可以在相同的条件下重复地进行;
- (2) 每次试验的可能结果不止一个，并且能事先明确试验的所有可能结果;
- (3) 进行一次试验之前不能确定哪一个结果会出现.

第二节　样本空间、随机事件

一、样本空间　样本点

二、随机事件的概念

三、随机事件间的关系及运算

四、小结

一、样本空间　样本点

问题　随机试验的结果?

定义　随机试验 E 的所有可能结果组成的集合称为 E 的样本空间, 记为 S .

样本空间的元素，即试验E 的每一个结果, 称为样本点.

实例1　抛掷一枚硬币,观察字面,花面出现的情况.

$S_1 = \{H, T\}$.　　$H \rightarrow$ 字面朝上　　$T \rightarrow$ 花面朝上

实例2　抛掷一枚骰子,观察出现的点数.

$S_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

实例3　从一批产品中,依次任选三件,记录出现正品与次品的情况.

记　$N \rightarrow$ 正品,　$D \rightarrow$ 次品.

则 $S_3 = \{NNN, NND, NDN, DNN, NDD, DDN, DND, DDD\}$.

实例4　记录某公共汽车站某日上午某时刻的等车人数.

$S_4 = \{0, 1, 2, \cdots\}$.

实例5　考察某地区 12月份的平均气温.

$S_5 = \{t \mid T_1 < t < T_2\}$.

其中 t 为平均温度 .

课堂练习

写出下列随机试验的样本空间.

1. 同时掷三颗骰子,记录三颗骰子之和.
2. 生产产品直到得到10件正品,记录生产产品的总件数.

答案

1. $S = \{3, 4, 5, \cdots, 18\}$.
2. $S = \{10, 11, 12, \cdots\}$.

说明　1. 试验不同, 对应的样本空间也不同.

2. 同一试验，若试验目的不同,则对应的样本空 间也不同.

例如　对于同一试验: "将一枚硬币抛掷三次" .

若观察正面 H、反面 T 出现的情况 ,则样本空间为

$S = \{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, TTH, THT, TTT\}$.

若观察出现正面的次数，则样本空间为

$S = \{0, 1, 2, 3\}$.

说明　3. 建立样本空间,事实上就是建立随机现象的数学模型. 因此，一个样本空间可以概括许多内容大不相同的实际问题.

例如　只包含两个样本点的样本空间

$$S = \{H, T\}$$

它既可以作为抛掷硬币出现正面或出现反面的模型，也可以作为产品检验中合格与不合格的模型，又能用于排队现象中有人排队与无人排队的模型等.

所以在具体问题的研究中，描述随机现象的第一步就是建立样本空间.

二、随机事件的概念

1. 基本概念

随机事件　随机试验 E 的样本空间 S 的子集称为 E 的随机事件, 简称事件.

实例　抛掷一枚骰子, 观察出现的点数.

试验中,骰子“出现1点”，“出现2点”，…，“出现6点”，“点数不大于4”，“点数为偶数”等都为随机事件.

基本事件　由一个样本点组成的单点集.

实例　“出现1点”，“出现2点”，…，“出现6点”

必然事件　随机试验中必然会出现的结果.

实例　上述试验中“点数不大于6”就是必然事件.

不可能事件　随机试验中不可能出现的结果.

实例　上述试验中“点数大于6”就是不可能事件.

必然事件的对立面是不可能事件,不可能事件的对立面是必然事件,它们互称为对立事件.

2. 几点说明

(1) 随机事件可简称为事件, 并以大写英文字母 $A, B, C, \cdots$ 来表示事件

例如　抛掷一枚骰子, 观察出现的点数.

可设　$A =$ “点数不大于4”，

　　　$B =$ “点数为奇数”　等等.

(2) 事件发生的概念

在一次试验中，当且仅当这一子集中的一个样本点出现时，称这一事件发生。

(3) 随机试验、样本空间与随机事件的关系

每一个随机试验相应地有一个样本空间, 样本空间的子集就是随机事件.

随机试验 $\longrightarrow$ 样本空间 $\xrightarrow{\text{子集}}$ 随机事件

随机事件 $\begin{cases} \text{基本事件} \\ \text{复合事件} \\ \left.\begin{array}{l}\text{必然事件} \\ \text{不可能事件}\end{array}\right\} \text{互为对立事件} \end{cases}$

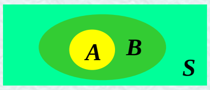
三、随机事件间的关系及运算

设试验 E 的样本空间为 S，而 $A, B, A_k\ (k=1,2,\cdots)$ 是 S 的子集.

1. 包含关系 若事件 A 出现，必然导致 B 出现，则称事件 B 包含事件 A，记作 $B \supset A$ 或 $A \subset B$.

实例 “长度不合格” 必然导致 “产品不合格” 所以“产品不合格”包含“长度不合格”.

图示 B 包含 A.



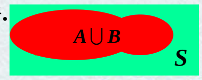
2. A等于B 若事件 A 包含事件 B，而且事件 B 包含事件 A，则称事件 A 与事件 B 相等，记作 $A=B$.

3. 事件 A 与 B 的并(和事件)

事件 $A \cup B = \{x \mid x \in A$ 或 $x \in B\}$ 称为事件 A 与事件B的和事件.

实例 某种产品的合格与否是由该产品的长度与直径是否合格所决定，因此 “产品不合格” 是 “长度不合格” 与 “直径不合格” 的并.

图示事件 A 与 B 的并.



推广 称 $\bigcup_{k=1}^{n} A_k$ 为 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的和事件;

称 $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ 为可列个事件 $A_1, A_2, \cdots$ 的和事件.

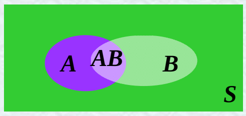
4. 事件 A 与 B 的交 (积事件)

事件 $A \cap B = \{x \mid x \in A$ 且 $x \in B\}$ 称为事件 A 与事件 B 的积事件.

积事件也可记作 $A \cdot B$ 或 AB.

实例 某种产品的合格与否是由该产品的长度与直径是否合格所决定,因此 “产品合格” 是 “长度合格” 与 “直径合格” 的交或积事件.

图示事件A与B的积事件.



推广 称 $\bigcap_{k=1}^{n} A_k$ 为n个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的积事件;

称 $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$ 为可列个事件 $A_1, A_2, \cdots$ 的积事件.

和事件与积事件的运算性质

$$A \cup A = A, \quad A \cup S = S, \quad A \cup \varnothing = A,$$

$$A \cap A = A, \quad A \cap S = A, \quad A \cap \varnothing = \varnothing.$$

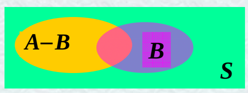
5. 事件 A 与 B 的差

由事件 A 出现而事件 B 不出现所组成的事件称为事件 A 与 B 的差. 记作 $A-B$.

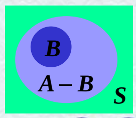
实例 “长度合格但直径不合格” 是 “长度合格” 与 “直径合格” 的差.

图示 A 与 B 的差.

$B \not\subset A$



$B \subset A$



6. 事件 A 与 B 互不相容（互斥）

若事件 A 的出现必然导致事件 B 不出现, B 出现也必然导致 A不出现,则称事件 A与B互不相容, 即

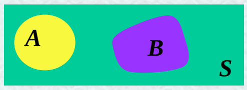
$$A \cap B = AB = \varnothing.$$

实例 抛掷一枚硬币, “出现花面” 与 “出现字面” 是互不相容的两个事件.

实例 抛掷一枚骰子, 观察出现的点数 .

“骰子出现1点” $\xleftrightarrow{\text{互斥}}$ “骰子出现2点”

图示 A 与 B 互斥.

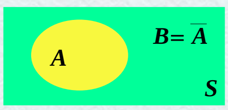


7. 事件 A 的对立事件

设 A 表示 “事件 A 出现” , 则 “事件 A 不出现” 称为事件 A 的对立事件或逆事件. 记作 $\bar{A}$.

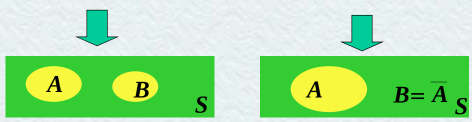
实例 “骰子出现1点” $\xleftrightarrow{\text{对立}}$ “骰子不出现1点”

图示 A 与 B 的对立.



若 A 与 B 互逆,则有 $A \cup B = S$ 且 $AB = \varnothing$.

对立事件与互斥事件的区别



$AB = \varnothing$　　　　$A \cup B = S$ 且 $AB = \varnothing$

互　斥　　　　对　立

事件间的运算规律 设 A, B, C 为事件, 则有

(1) 交换律　$A \cup B = B \cup A,\ AB = BA.$

(2) 结合律　$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C),$

$(AB)C = A(BC).$

(3) 分配律

$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C) = AC \cup BC,$

$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C) = (A \cup C)(B \cup C).$

(4)德 · 摩根律：$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B},\ \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}.$

例1　设A,B,C 表示三个随机事件, 试将下列事件用A,B,C 表示出来.

(1) A 出现 , B, C 不出现;

(2) A, B都出现, C 不出现;

(3) 三个事件至少有一个出现;

(4) 三个事件都出现;

(5) 三个事件都不出现;

(6) 不多于一个事件出现;

解

(1) $A\bar{B}\bar{C}$;

(2) $AB\bar{C}$;

(3) $A \cup B \cup C$;

(4) ABC;

(5) $\bar{A}\,\bar{B}\,\bar{C}$;

(6) $\bar{A}\bar{B}\bar{C} \cup A\bar{B}\bar{C} \cup \bar{A}B\bar{C} \cup \bar{A}\bar{B}C$;

(7) 不多于两个事件出现;

(8) 三个事件至少有两个出现;

(9) A, B 至少有一个出现, C 不出现;

(10) A, B, C 中恰好有两个出现.

解续

(7) $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} \cup A\overline{B}\,\overline{C} \cup \overline{A}B\overline{C} \cup \overline{A}\,\overline{B}C \cup AB\overline{C} \cup A\overline{B}C \cup \overline{A}BC$, 或 $\overline{ABC}$;

(8) $ABC \cup AB\overline{C} \cup A\overline{B}C \cup \overline{A}BC$;

(9) $(A \cup B)\overline{C}$;

(10) $AB\overline{C} \cup A\overline{B}C \cup \overline{A}BC$.

四、小结

1. 随机试验、样本空间与随机事件的关系

$$\text{随机试验} \longrightarrow \text{样本空间} \xrightarrow{\text{子集}} \text{随机事件}$$

随机事件 $\begin{cases} \text{基本事件} \\ \text{复合事件} \\ \text{必然事件} \\ \text{不可能事件} \end{cases}$

2. 概率论与集合论之间的对应关系

记号	概率论	集合论
S	样本空间，必然事件	空间
$\varnothing$	不可能事件	空集
e	基本事件	元素
A	随机事件	子集
$\overline{A}$	A的对立事件	A的补集
$A \subset B$	A出现必然导致B出现	A是B的子集
$A = B$	事件A与事件B相等	集合A与集合B相等

$A \cup B$	事件A与事件B的和	集合A与集合B的并集
AB	事件A与事件B的积事件	集合A与集合B的交集
$A - B$	事件A与事件B的差	A与B两集合的差集
$AB = \varnothing$	事件A与B互不相容	A与B 两集合中没有相同的元素

概率论与数理统计

第三节　频率与概率

一、频率的定义与性质

二、概率的定义与性质

三、小结

概率论与数理统计

一、频率的定义与性质

1. 定义

在相同的条件下，进行了 n 次试验，在这 n 次试验中，事件 A 发生的次数 n_A 称为事件 A 发生的频数。比值 $\frac{n_A}{n}$ 称为事件 A 发生的频率，并记成 $f_n(A)$.

概率论与数理统计

2. 性质

设 A 是随机试验 E 的任一事件，则

(1) $0 \le f_n(A) \le 1$;

(2) $f(S)=1, \quad f(\varnothing)=0$;

(3) 若 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 是两两互不相容的事件，则

$$f(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k) = f_n(A_1) + f_n(A_2) + \cdots + f_n(A_k).$$

概率论与数理统计

实例　将一枚硬币抛掷 5 次、50 次、500 次，各做 7 遍，观察正面出现的次数及频率.

试验序号	$n=5$		$n=50$		$n=500$	
	n_H	f	n_H	f	n_H	f
1	2	0.4	22	0.44	251	0.502
2	3	0.6	[illegible]	[illegible]	249	0.498
3	1	0.2	21	0.42	256	0.512
4	5	1.0	25	0.50	247	0.494
5	1	[illegible]	[illegible]	0.48	251	0.502
6	2	0.4	18	0.36	2[illegible]	[illegible]
7	4	0.8	27	0.54	258	0.516

在 $\frac{1}{2}$ 处波动较大

随 n 的增大，频率 f 呈现出稳定性

在 $\frac{1}{2}$ 处波动较小

波动最小

概率论与数理统计

从上述数据可得

(1) 频率有随机波动性，即对于同样的 n，所得的 f 不一定相同；

(2) 抛硬币次数 n 较小时，频率 f 的随机波动幅度较大，但随 n 的增大，频率 f 呈现出稳定性。即当 n 逐渐增大时频率 f 总是在 0.5 附近摆动，且逐渐稳定于 0.5.

概率论与数理统计

实验者	n	n_H	f
德·摩根	2048	1061	0.5181
蒲丰	4040	2048	0.5069
K·皮尔逊	12000	6019	0.5016
K·皮尔逊	24000	12012	0.5005

$$f(H) \xrightarrow{n\text{的增大}} \frac{1}{2}.$$

从上表中可以看出,出现{正面向上}的频率 $f_n(A)$ 虽然随 n 的不同而变动,但总的趋势是随着试验次数的增加而逐渐稳定在0.5这个数值上.

可见,在大量重复的试验中,随机事件出现的频率具有稳定性.即通常所说的统计规律性.

定义 在不变的一组条件下进行大量的重复试验,随机事件 A 出现的频率 $\frac{\mu}{n}$ 会稳定地在某个固定的数值 p 的附近摆动,我们称这个稳定值 p 为随机事件 A 的概率,即 $P(A)=p$.

这个定义也称为 概率的统计定义.

请同学们思考.

医生在检查完病人的时候摇摇头：“你的病很重，在十个得这种病的人中只有一个能救活.” 当病人被这个消息吓得够呛时，医生继续说：“但你是幸运的．因为你找到了我，我已经看过九个病人了，他们都死于此病.”

医生的说法对吗?

二、概率的定义与性质

1933年，苏联数学家柯尔莫哥洛夫提出了概率论的公理化结构，给出了概率的严格定义，使概率论有了迅速的发展.

Andrey Nikolaevich Kolmogorov

Born: 25 Apr. 1903 in Tambov, Tambov province,Russia

Died: 20 Oct. 1987 in Moscow, Russia

1. 概率的定义

设 E 是随机试验,S 是它的样本空间.对于 E 的每一事件 A 赋予一个实数,记为 $P(A)$,称为事件 A 的概率,如果集合函数 $P(\cdot)$ 满足下列条件：

(1) 非负性： 对于每一个事件 A, 有 $P(A)\geq 0$;

(2) 规范性： 对于必然事件 S,有 $P(S)=1$;

(3) 可列可加性 ：设 $A_1, A_2, \cdots$ 是两两互不相容的事件,即对于 $i\neq j$, $A_iA_j=\varnothing$, $i, j=1,2,\cdots$,则有

$$\underbrace{P(A_1\cup A_2\cup\cdots)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots}_{\text{概率的可列可加性}}$$

2. 性质

(1) $P(\varnothing)=0$.

证明 $A_n=\varnothing \ (n=1,2,\cdots)$,

则 $\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n=\varnothing$,且 $A_iA_j=\varnothing$, $i\neq j$.

由概率的可列可加性得

$$P(\varnothing)=P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n)$$

$$\left.\begin{array}{l} =\sum_{n=1}^{\infty}P(\varnothing) \\ P(\varnothing)\geq 0 \end{array}\right\}\Rightarrow P(\varnothing)=0.$$

(2) 若 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是两两互不相容的事件 ,则有

$$\underbrace{\boxed{P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n).}}_{\text{概率的有限可加性}}$$

证明 令 $A_{n+1}=A_{n+2}=\cdots=\varnothing$,

$\Rightarrow A_iA_j=\varnothing$, $i\neq j$, $i, j=1,2,\cdots$.

由概率的可列可加性得

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=P(\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k)=\sum_{k=1}^{\infty}P(A_k)=\sum_{k=1}^{n}P(A_k)+0$$

$$=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n).$$

(3) 设 A,B 为两个事件，且 $A\subset B$，则

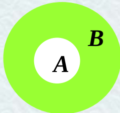
$$P(A)\le P(B),\quad P(B-A)=P(B)-P(A).$$

证明 因为 $A\subset B$,

所以 $B=A\cup(B-A)$.

又 $(B-A)\cap A=\varnothing$,

得 $P(B)=P(A)+P(B-A)$.



于是 $\boxed{P(B-A)=P(B)-P(A).}$

又因 $P(B-A)\ge 0$, 故 $P(A)\le P(B)$.

(4) 对于任一事件 A, $P(A)\le 1$.

证明 $A\subset S\Rightarrow P(A)\le P(S)=1$,

故 $P(A)\le 1$.

(5) 设 $\bar A$ 是 A 的对立事件，则 $P(\bar A)=1-P(A)$.

证明 因为 $A\cup\bar A=S$, $A\cap\bar A=\varnothing$, $P(S)=1$,

所以 $1=P(S)=P(A\cup\bar A)$

$=P(A)+P(\bar A)$.

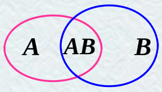
$\Rightarrow P(\bar A)=1-P(A)$.

(6) (加法公式) 对于任意两事件 A,B 有

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

证明 由图可得

$A\cup B=A+(B-AB)$,



且 $A\cap(B-AB)=\varnothing$,

故 $P(A\cup B)=P(A)+P(B-AB)$.

又由性质 3 得

$P(B-AB)=P(B)-P(AB)$,

因此得 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$.

推广 三个事件和的情况

$$P(A_1\cup A_2\cup A_3)$$
$$=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)-P(A_1A_2)-P(A_2A_3)$$
$$-P(A_1A_3)+P(A_1A_2A_3).$$

n 个事件和的情况

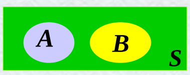
$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\le i<j\le n}P(A_iA_j)$$
$$+\sum_{1\le i<j<k\le n}P(A_iA_jA_k)+\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n).$$

例1 设事件 A,B 的概率分别为 $\frac{1}{3}$ 和 $\frac{1}{2}$，求在下列三种情况下 $P(B\bar A)$ 的值.

(1) A与B互斥; (2) $A\subset B$; (3) $P(AB)=\frac{1}{8}$.

解 (1) 由图示得 $P(B\bar A)=P(B)$,

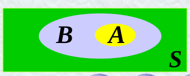
故 $P(B\bar A)=P(B)=\frac{1}{2}$.



(2) 由图示得

$P(B\bar A)=P(B)-P(A)$

$=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$.

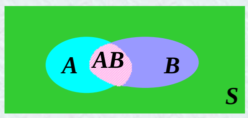


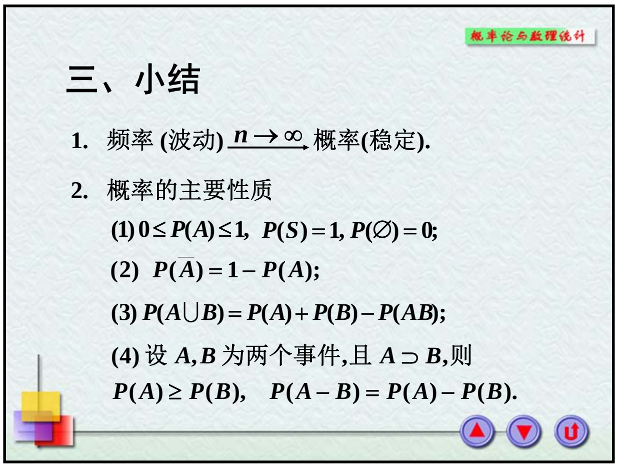
(3) 由图示得 $A\cup B=A\cup B\bar A$, 且 $A\cap B\bar A=\varnothing$,

$P(A\cup B\bar A)=P(A)+P(B\bar A)$,

又 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$,

因而 $P(B\bar A)=P(B)-P(AB)=\frac{1}{2}-\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$.




概率论与数理统计
三、小结
1. 频率 (波动) $\xrightarrow{n\to\infty}$ 概率(稳定).
2. 概率的主要性质
(1) $0 \le P(A) \le 1$, $P(S)=1$, $P(\varnothing)=0$;
(2) $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$;
(3) $P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$;
(4) 设 A,B 为两个事件,且 $A\supset B$,则
$P(A) \ge P(B)$, $P(A-B) = P(A) - P(B)$.

第四节 等可能概型(古典概型)

一、等可能概型

二、典型例题

三、几何概率

四、小结

一、等可能概型(古典概型)

1. 定义

(1) 试验的样本空间只包含有限个元素；

(2) 试验中每个基本事件发生的可能性相同.

具有以上两个特点的试验称为等可能概型或古典概型.

2. 古典概型中事件概率的计算公式

设试验 E 的样本空间由n 个样本点构成， A 为 E 的任意一个事件，且包含 m 个样本点，则事件 A 出现的概率记为:

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{A\text{ 所包含样本点的个数}}{\text{样本点总数}}.$$

称此为概率的古典定义.

加法原理:

完成一件工作, 有m类方法, 而第1类方法有n_1 种方法, 第2类方法有n_2种方法,…,第m类方法有n_m种方法, 任选一种此工作就完成, 那么完成这项工作共有 $N=n_1+n_2+\ldots+n_m$种不同的方法.

乘法原理:

完成一件工作, 需要m个步骤, 而第1步有n_1 种方法, 第2步有n_2种方法,…,第m步有n_m种方 法, 依次完成这m步时这项工作才完成, 那么完成这项工作共有 $N=n_1\times n_2\times\ldots\times n_m$种不同的方法.

3. 典型例题

例1. 袋中装有4只白球和2只红球.（书例1-17）
从袋中摸球两次,每次任取一球.有两种方式:
(a)放回抽样; (b)不放回抽样.

求: (1)两球颜色相同的概率;
(2)两球中至少有一只白球的概率.

解: (a) 放回抽样 样本空间:取两次球, 共有6 ×6种取法.

定义事件:

A=“两球都是白球”,共有4×4 种取法,

B=“两球都是红球”,共有2×2 种取法,

C=“两球中至少有一只白球”，则事件$C=\overline{B}$,

$A\cup B$=“两个球颜色相同”，

故 $P(A)=(4\times4)/(6\times6)\approx0.444$,

$P(B)=(2\times2)/(6\times6)\approx0.111$,

则 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)\approx0.556$,

$P(C)=1-P(B)\approx0.889$

(b) 不放回抽样

样本空间： 共有6 × 5种取法.

事件A的样本点: 共有4×3种取法.

事件B的样本点: 共有2×1种取法.

$$\therefore P(A)=\frac{4\times3}{6\times5},\quad P(B)=\frac{2\times1}{6\times5}.$$

例2. 设一袋中有编号为1,2,…,9的球共9只，现从中任取3只,试求:
(1)取到1号球的概率,（事件A）
(2)最小号码为5的概率.（事件B）

解 从9个球中任取3只球,共有 C_9^3 种取法.
（1）取到1号球共有 C_8^2 种取法

$$P(A)=\frac{C_8^2}{C_9^3}=\frac{1}{3}.$$

（2）最小号码为5,共有 C_4^2 种取法.

$$P(B)=\frac{C_4^2}{C_9^3}=\frac{1}{14}.$$

例3. 将n只球随机地放入N (N≥n)个盒子 中去,试求每个盒子至多有 一只球的概率.(设盒子容量不限).(书例1-20)

则 $p=\dfrac{A_N^n}{N^n}.$

生日问题

假定每个人在一年365天的任一天都等可能, 随机选取n(小于365)人,他们生日至少有两个相同的概率为:

$$p=1-\frac{A_{365}^n}{365^n},\ 取n=64, p=0.997.$$

我们利用软件包进行数值计算.

人数	至少有两人生日相同的概率
10	0.11694817771107765187
20	0.41143838358057998762
30	0.70631624271926865996
40	0.89123180981794898965
50	0.97037357957798839992
60	0.99412266086534794247
70	0.99915957596515709135
80	0.99991433194931349469
90	0.99999384835612360355
100	0.99999969275107214842
110	0.99999998947129430621
120	0.99999999975608521895
130	0.99999999999624032317
140	0.99999999999996210395
150	0.9999999999999997549
160	0.99999999999999999900

例4. 设有N件产品,其中D件次品,从中任取n件,求其中恰有k(k≤D)件次品的概率.

$$p=\frac{\binom{D}{k}\binom{N-D}{n-k}}{\binom{N}{n}},(k=0,1,2,\cdots\min(D,n)).$$

例5. 箱中装有a个白球和b个黑球,k个人依次在袋中取一只球,(1)作放回抽样;(2)作不放回抽样,求第i(i=1,2,…,k)人取到白球的概率.（书例1-21）

解 （1）放回抽样 $P(B)=\dfrac{a}{a+b}$

(2)不放回抽样 $P(B)=\dfrac{aA_{a+b-1}^{k-1}}{A_{a+b}^k}=\dfrac{a}{a+b}$

注 此题结果与k无关。

例6. 15名新生中有3名是优秀生, 将这15名新生随机地平均分配到三个班级中去, 问每一个班级各分配到一名优秀生的概率是多少?（书例1-16(1)）

解: 15名新生平均分配到三个班 级中的分法总数为:

$$\binom{15}{5}\binom{10}{5}\binom{5}{5}=\frac{15!}{10!5!}\cdot\frac{10!}{5!5!}=\frac{15!}{5!5!5!}$$

将3名优秀生平均分到三个班级(每班一名)共3!种分法, 另外12名新生平均分到三个班级中共有 $\binom{12}{4}\binom{8}{4}\binom{4}{4}=\dfrac{12!}{4!4!4!}$

于是: $p=\dfrac{3!\times\dfrac{12!}{4!4!4!}}{\dfrac{15!}{5!5!5!}}=\dfrac{25}{91}\doteq 0.2747.$

例7.某接待站在某一周曾接待过12次来访, 且都是在周二和周四来访. 问是否可以推断接待时间是有规定的? （书例1-22）

解: 实际推断原理: “小概率事件在一次试验中实际上几乎不发生”.

经初步分析: 接待时间是有规定的.假定接待时间是没有规定的.则12次来访都在周二和周四的概率为

$$p = \frac{2^{12}}{7^{12}} = 3\times 10^{-7}(\text{千万分之三})$$

由实际推断原理, 认为其接待时间是有规定的.

（概率反证法）

课堂练习

1º **电话号码问题** 在7位数的电话号码中,第一位不能为0，求数字0出现3次的概率.

$$(\text{答案}: p = \binom{9}{1}\binom{6}{3}\cdot 9^3 \Big/ 9\times 10^6)$$

2º **骰子问题** 掷3颗均匀骰子,求点数之和为4的概率.

$$(\text{答案}: p = 3/6^3)$$

四、小结

最简单的随机现象 → 古典概型 $\xrightarrow{\text{试验结果连续无穷}}$ 几何概型

古典概型 ↓ 古典概率

↓

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{A\text{所包含样本点的个数}}{\text{样本点总数}}$$

第五节　条件概率

一、条件概率

二、乘法定理

三、全概率公式与贝叶斯公式

四、小结

一、条件概率

1. 引例　将一枚硬币抛掷两次，观察其出现正反两面的情况，设事件 A 为"至少有一次为正面"，事件 B 为"两次掷出同一面"。现在来求已知事件 A 已经发生的条件下事件 B 发生的概率.

分析，设 H 为正面，T 为反面. $S=\{HH, HT, TH, TT\}$.

$A=\{HH, HT, TH\}$,　$B=\{HH, TT\}$,　$P(B)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$.

事件 A 已经发生的条件下事件 B 发生的概率，记为

$P(B|A)$，则 $P(B|A)=\frac{1}{3}=\frac{1/4}{3/4}=\frac{P(AB)}{P(A)}\neq P(B)$.

2. 定义

设 A, B 是两个事件，且 $P(A)>0$，称

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$$

为在事件 A 发生的条件下事件 B 发生的条件概率.

同理可得　$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$

为事件 B 发生的条件下事件 A 发生的条件概率.

3. 性质

(1) 非负性：$P(B|A)\geq 0$;

(2) 规范性：$P(S|B)=1$,　$P(\varnothing|B)=0$;

(3) $P(A_1\cup A_2|B)=P(A_1|B)+P(A_2|B)-P(A_1A_2|B)$;

(4) $P(A|B)=1-P(\bar{A}|B)$.

(5) 可列可加性：设 $B_1, B_2, \cdots$ 是两两不相容的事件，则有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}B_i\middle|A\right)=\sum_{i=1}^{\infty}P(B_i|A).$$

计算条件概率有两种方法：

设 $P(A)>0$，求 $P(B|A)$

(1) 根据A发生以后的情况直接计算.

(2) 先计算 $P(A)$, $P(AB)$，然后按公式计算

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}.$$

例1.（书例1-27）

3只一等品

1只二等品

任取一只，不放回

再任取一只

A= "第一次取到的是一等品"

B= "第二次取到的是一等品"，求 $P(B|A)$.

解：$P(A)=\frac{C_3^1C_3^1}{A_4^2}=\frac{9}{12}$,　$P(AB)=\frac{A_3^2}{A_4^2}=\frac{6}{12}$,

则 $P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{6/12}{9/12}=\frac{2}{3}$.

也可以直接计算：

$$P(B|A)=\frac{2}{3}$$

注：第一次取出1只一等品，剩下共3只，其中有2只一等品。

例2 某种动物由出生算起活20岁以上的概率为0.8，活到25岁以上的概率为0.4，如果现在有一个20岁的这种动物，问它能活到25岁以上的概率是多少？

解 设 A 表示"能活 20 岁以上"的事件，B 表示"能活 25 岁以上"的事件，

则有 $P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}$.

因为 $P(A)=0.8,\quad P(B)=0.4,\quad P(AB)=P(B)$,

所以 $P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}=\dfrac{0.4}{0.8}=\dfrac{1}{2}$.

二、乘法公式：

由条件概率定义，立即可得

若$P(A)>0$，则有$P(AB)=P(A)P(B|A)$.

推广：$P(AB)>0$，则有
$P(ABC)=P(A)P(B|A)P(C|AB)$.

摸球试验

例3 设袋中装有 r 只红球、t 只白球.每次自袋中任取一只球，观察其颜色然后放回，并再放入 a 只与所取出的那只球同色的球，若在袋中连续取球四次，试求第一、二次取到红球且第三、四次取到白球的概率.（书例1-31）

解 设 $A_i\ (i=1,2,3,4)$ 为事件"第 i 次取到红球"

则 $\overline{A_3}$、$\overline{A_4}$ 为事件第三、四次取到白球.

因此所求概率为

$$P(A_1A_2\overline{A_3}\,\overline{A_4})$$

$$=P(\overline{A_4}|A_1A_2\overline{A_3})P(\overline{A_3}|A_1A_2)P(A_2|A_1)P(A_1)$$

$$=\frac{t+a}{r+t+3a}\cdot\frac{t}{r+t+2a}\cdot\frac{r+a}{r+t+a}\cdot\frac{r}{r+t}.$$

此模型被波利亚用来作为描述传染病的数学模型.

例4 设某光学仪器厂制造的透镜，第一次落下时打破的概率为1/2，若第一次落下未打破，第二次落下打破的概率为7/10，若前两次落下未打破，第三次落下打破的概率为9/10.试求透镜落下三次而未打破的概率.（书例1-32）

解 以$A_i\ (i=1,2,3)$表示事件"透镜第 i 次落下打破"，以B 表示事件"透镜落下三次而未打破".

因为 $B=\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}$,

所以 $P(B)=P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3})=P(\overline{A_3}|\overline{A_1}\,\overline{A_2})P(\overline{A_2}|\overline{A_1})P(\overline{A_1})$

$$=(1-\frac{9}{10})(1-\frac{7}{10})(1-\frac{1}{2})=\frac{3}{200}.$$

三、全概率公式与贝叶斯公式

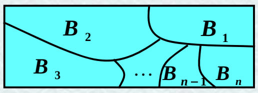
1. 样本空间的划分

定义 设 S 为试验E的样本空间, $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 为 E 的一组事件,若

(i) $B_i B_j = \varnothing, i \neq j, \ i, j = 1, 2, \cdots, n;$

(ii) $B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_n = S.$

则称 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 为样本空间 S 的一个划分.



2. 全概率公式

定理 设试验 E 的样本空间为 S, A 为 E 的事件, $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 为 S 的一个划分,且 $P(B_i) > 0 (i = 1, 2, \cdots, n)$, 则

$$\boxed{P(A) = P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + \cdots + P(A|B_n)P(B_n)}$$

全概率公式

证明 $A = AS = A \cap (B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_n)$

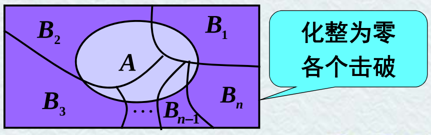
$= AB_1 \cup AB_2 \cup \cdots \cup AB_n.$

由 $B_i B_j = \varnothing \Rightarrow (AB_i)(AB_j) = \varnothing$

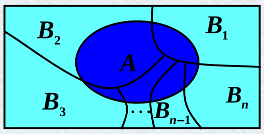
$\Rightarrow P(A) = P(AB_1) + P(AB_2) + \cdots + P(AB_n)$

$= P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + \cdots + P(A|B_n)P(B_n).$

图示



说明 全概率公式的主要用处在于它可以将一个复杂事件的概率计算问题,分解为若干个简单事件的概率计算问题,最后应用概率的可加性求出最终结果.



例5. 某电子设备厂所用的晶体管是由三家元件制造厂提供的,数据如下:

元件制造厂	次品率	提供的份额
1	0.02	0.15
2	0.01	0.80
3	0.03	0.05

任取一只晶体管,求它是次品的概率.

解: A — 取到的是一只次品,

B_i — 所取产品是由第 i 家工厂生产的, $i = 1, 2, 3.$

(B_1, B_2, B_3是样本空间S的一个划分)

则由全概率公式得

$$P(A) = \sum_{i=1}^{3} P(B_i)P(A|B_i)$$

$$= 0.15 \times 0.02 + 0.80 \times 0.01 + 0.05 \times 0.03$$

$$= 0.0125.$$

3. 贝叶斯公式

贝叶斯资料

定理 设试验 E 的样本空间为 S. A 为 E 的事件, $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 为 S 的一个划分, 且 $P(A) > 0$, $P(B_i) > 0$, $(i = 1,2,\cdots,n)$, 则

$$\boxed{P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A|B_j)P(B_j)},\quad i = 1,2,\cdots,n.}$$

称此为**贝叶斯公式**.

证明
$$P(B_i|A) = \frac{P(B_i A)}{P(A)}$$
$$= \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A|B_j)P(B_j)},\quad i = 1,2,\cdots,n.$$

Thomas Bayes

Born: 1702 in London, England

Died: 17 Apr. 1761 in Tunbridge Wells, Kent, England

例6（续例5） 任取一只, 若它是次品, 则由三家工厂生产的概率分别是多少?

解 由Bayes公式得

$$P(B_1|A) = \frac{P(B_1)P(A|B_1)}{P(A)} = \frac{0.15 \times 0.02}{0.0125} = 0.24,$$

$$P(B_2|A) = 0.64,\qquad P(B_3|A) = 0.12.$$

故这只次品来自第 2 家工厂的可能性最大.

例7 对以往数据分析结果表明, 当机器调整得良好时, 产品的合格率为 98%, 而当机器发生某种故障时, 其合格率为 55%. 每天早上机器开动时, 机器调整良好的概率为 95%. 试求已知某日早上第一件产品是合格品时, 机器调整得良好的概率是多少?

解 设 A 为事件"产品合格",

B 为事件"机器调整良好".

则有

$$P(A|B) = 0.98,\qquad P(A|\overline{B}) = 0.55,$$

$$P(B) = 0.95,\qquad P(\overline{B}) = 0.05,$$

由贝叶斯公式得所求概率为

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A|B)P(B) + P(A|\overline{B})P(\overline{B})}$$

$$= \frac{0.98 \times 0.95}{0.98 \times 0.95 + 0.55 \times 0.05} = 0.97.$$

即当生产出第一件产品是合格品时, 此时机器调整良好的概率为 0.97.

先验概率与后验概率

上题中概率 0.95 是由以往的数据分析得到的, 叫做**先验概率**.

而在得到信息之后再重新加以修正的概率 0.97 叫做**后验概率**.

四、小结

1.条件概率 $P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)} \longrightarrow$ 乘法定理 $P(AB)=P(B|A)P(A)$

全概率公式

$$P(A)=P(A|B_1)P(B_1)+P(A|B_2)P(B_2)+\cdots+P(A|B_n)P(B_n)$$

贝叶斯公式

$$P(B_i|A)=\frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_{j=1}^{n}P(A|B_j)P(B_j)},\ i=1,2,\cdots,n$$

2. 条件概率 $P(A|B)$ 与积事件概率 $P(AB)$ 的区别.

$P(AB)$ 表示在样本空间 S 中, AB 发生的概率,而 $P(B|A)$ 表示在缩小的样本空间 S_A 中, B 发生的概率.用古典概率公式,则

$$P(B|A)=\frac{AB\text{ 中基本事件数}}{S_A\text{ 中基本事件数}},$$

$$P(AB)=\frac{AB\text{ 中基本事件数}}{S\text{ 中基本事件数}},$$

一般来说, $P(B|A)$ 比 $P(AB)$ 大.

第六节　独立性

一、事件的相互独立性

二、几个重要定理

三、例题讲解

四、小结

一、事件的相互独立性

1.引例

盒中有5个球(3绿2红),每次取出一个,有放回地取两次.记

$A=$ 第一次抽取,取到绿球,

$B=$ 第二次抽取,取到绿球,

则有

$$P(B|A)=P(B),$$

它表示 A 的发生并不影响 B 发生的可能性大小.

$$P(B|A)=P(B)\Leftrightarrow P(AB)=P(A)P(B)$$

2.定义

设 A,B 是两事件，如果满足等式

$$P(AB)=P(A)\,P(B)$$

则称事件 A,B 相互独立,简称 A,B 独立.

说明

事件 A 与事件 B 相互独立,是指事件 A 的发生与事件 B 发生的概率无关.

请同学们思考

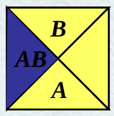
两事件相互独立与两事件互斥的关系.

两事件相互独立　$P(AB)=P(A)P(B)$

两事件互斥　$AB=\varnothing$

二者之间没有必然联系

例如



若 $P(A)=\frac{1}{2}, P(B)=\frac{1}{2}$,

则 $P(AB)=P(A)P(B)$.

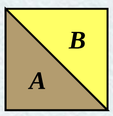
由此可见两事件相互独立，但两事件不互斥.

若 $P(A)=\frac{1}{2}, P(B)=\frac{1}{2}$

则 $P(AB)=0$,

$P(A)P(B)=\frac{1}{4}$,

故 $P(AB)\neq P(A)P(B)$.



由此可见两事件互斥但不独立.

3.三事件两两相互独立的概念

定义　设 A,B,C 是三个事件,如果满足等式

$$\begin{cases} P(AB)=P(A)P(B), \\ P(BC)=P(B)P(C), \\ P(AC)=P(A)P(C), \end{cases}$$

则称事件 A,B,C 两两相互独立.

4.三事件相互独立的概念

定义 设 A,B,C 是三个事件，如果满足等式

$$\begin{cases} P(AB)=P(A)P(B), \\ P(BC)=P(B)P(C), \\ P(AC)=P(A)P(C), \\ P(ABC)=P(A)P(B)P(C), \end{cases}$$

则称事件 A,B,C 相互独立.

注意

三个事件相互独立 $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ 三个事件两两相互独立

推广 设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是 n 个事件，如果对于任意 $k\,(1<k\le n)$，任意 $1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n$，具有等式

$$P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k})=P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_k}),$$

则称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为相互独立的事件.

n 个事件相互独立 $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ n 个事件两两相互独立

二、几个重要定理

定理一 设 A,B 是两事件，且 $P(A)>0$. 若 A,B 相互独立，则 $P(B|A)=P(B)$. 反之亦然.

证明

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(A)P(B)}{P(A)}=P(B)$$

$$\Leftrightarrow P(B|A)=P(B).$$

定理二 若 A,B 相互独立，则下列各对事件，$\bar{A}$ 与 B，A 与 $\bar{B}$，$\bar{A}$ 与 $\bar{B}$ 也相互独立.

证明 先证 A 与 $\bar{B}$ 独立.

因为 $A=AB\cup A\bar{B}$ 且 $(AB)(A\bar{B})=\varnothing$，

所以 $P(A)=P(AB)+P(A\bar{B})$，

即 $P(A\bar{B})=P(A)-P(AB)$.

又因为 A、B 相互独立，所以有

$$P(AB)=P(A)P(B),$$

因而

$$P(A\bar{B})=P(A)-P(A)P(B)=P(A)(1-P(B))=P(A)P(\bar{B}).$$

从而 A 与 $\bar{B}$ 相互独立.

两个结论

1. 若事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n\ (n\ge 2)$ 相互独立，则其中任意 $k\ (2\le k\le n)$ 个事件也是相互独立.

2. 若 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n\,(n\ge 2)$ 相互独立，则将 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中任意多个事件换成它们的对立事件，所得的 n 个事件仍相互独立.

三、例题讲解

射击问题

例1 设每一名机枪射击手击落飞机的概率都是0.2, 若10名机枪射击手同时向一架飞机射击,问击落飞机的概率是多少?

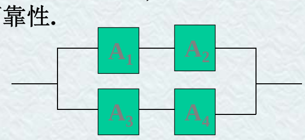
解 设事件 A_i 为“第 i 名射手击落飞机”, $i = 1,2,\cdots,10.$

事件 B 为“击落飞机”,

则 $B = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{10}$,

$$P(B) = P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{10})$$
$$= 1 - P(\overline{A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{10}})$$
$$= 1 - P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\cdots\overline{A_{10}})$$
$$= 1 - P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})\cdots P(\overline{A_{10}})$$
$$= 1 - (0.8)^{10} = 0.893.$$

例2. 设有4个元件,每个元件的可靠性为p_i(元件能正常工作的概率), 按如下方式组成系统, 试求该系统的可靠性.



设A表示系统能正常工作

$$A = A_1A_2 \cup A_3A_4$$
$$P(A) = P(A_1A_2) + P(A_3A_4) - P(A_1A_2A_3A_4)$$
$$= p_1p_2 + p_3p_4 - p_1p_2p_3p_4$$

例3. 100件乐器,验收方案是从中任 取3件测试(相互独立的), 3件测试后都认为音色纯则接收这批乐器,测试情况如下:

	经测试认为音色纯	音色不纯
乐器音色纯	0.99	0.01
乐器音色不纯	0.05	0.95

若100件乐器中恰有4件音色不纯, 试问:这批乐器被接收的概率是多少?

解: H_i表示"任取3件乐器, 其中恰有i件音色不纯, i = 0,1 , 2, 3".A表示这批乐器被接收.

$P(H_0) = C_{96}^3 / C_{100}^3$, $P(H_1) = C_4^1C_{96}^2 / C_{100}^3$,

$P(H_2) = C_4^2C_{96}^1 / C_{100}^3$, $P(H_3) = C_4^3 / C_{100}^3$,

$P(A|H_0) = (0.99)^3$, $P(A|H_1) = 0.05 \times (0.99)^2$,

$P(A|H_2) = (0.05)^2 \times 0.99$, $P(A|H_3) = 0.05^3$

由全概率公式:

$$P(A) = \sum_{i=0}^{3} P(H_i)P(A|H_i)$$
$$\approx 0.8574 + 0.0055 + 0 + 0 = 0.8629.$$

例4 甲、乙、丙三人同时对飞机进行射击,三人击中的概率分别为0.4,0.5,0.7.飞机被一人击中而被击落的概率为0.2,飞机被两人击中而被击落的概率为0.6,若三人都击中，飞机必定被击落。（1）求飞机被击落的概率.（2）若飞机被击落，则它是由两人击中的概率是多少？(书例1-49)

解　设A表示"飞机被击落”

A_i表示"飞机被第i人击中, $i=1,2,3,$

B_i表示"飞机被i人击中, $i=0,1,2,3$

$$P(B_1)=P(A_1\bar{A}_2\bar{A}_3)+P(\bar{A}_1A_2\bar{A}_3)+P(\bar{A}_1\bar{A}_2A_3)=0.36$$

$$P(B_2)=P(A_1A_2\bar{A}_3)+P(A_1\bar{A}_2A_3)+P(\bar{A}_1A_2A_3)=0.41$$

$$P(B_3)=P(A_1A_2A_3)=0.14.$$

$$P(A)=\sum_{i=1}^{3}P(B_i)P(A|B_i)$$　（全概率公式）

$$=0.2\times0.36+0.6\times0.41+0.14\times1=0.458.$$

$$(2)P(B_2|A)=\frac{P(B_2)P(A|B_2)}{P(A)}=\frac{0.41\times0.6}{0.458}=0.537$$

(贝叶斯公式）

伯恩斯坦反例

例5　一个均匀的正四面体，其第一面染成红色，第二面染成白色，第三面染成黑色，而第四面同时染上红、白、黑三种颜色.现以 A，B，C 分别记投一次四面体出现红、白、黑颜色朝下的事件，问 A，B，C是否相互独立?

解　由于在四面体中红、白、黑分别出现两面，

因此　$P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{2}$,

又由题意知 $P(AB)=P(BC)=P(AC)=\frac{1}{4}$,

故有
$$\begin{cases}P(AB)=P(A)P(B)=\frac{1}{4},\\ P(BC)=P(B)P(C)=\frac{1}{4},\\ P(AC)=P(A)P(C)=\frac{1}{4},\end{cases}$$

则三事件 A,B,C 两两独立.

由于　$P(ABC)=\frac{1}{4}\neq\frac{1}{8}=P(A)P(B)P(C)$,

因此 A，B，C 不相互独立.

例6　同时抛掷一对骰子,共抛两次,求两次所得点数分别为7与11的概率.

解 设事件 A_i 为“第 i 次得7点” $i=1,2.$

设事件 B_i 为“第 i 次得11点” $i=1,2.$

事件 C 为两次所得点数分别为 7 与 11.

则有　$P(C)=P(A_1B_2\cup B_1A_2)=P(A_1B_2)+P(B_1A_2)$

$$=P(A_1)P(B_2)+P(B_1)P(A_2)$$

$$=\frac{6}{36}\times\frac{2}{36}+\frac{2}{36}\times\frac{6}{36}=\frac{1}{54}.$$

四、小结

1.　A,B 两事件独立 $\Leftrightarrow P(AB)=P(A)P(B)$

A,B,C 三个事件相互独立

$$\Leftrightarrow\begin{cases}P(AB)=P(A)P(B),\\ P(BC)=P(B)P(C),\\ P(AC)=P(A)P(C),\\ P(ABC)=P(A)P(B)P(C).\end{cases}$$

2.　重要结论

A,B 相互独立 $\Leftrightarrow \bar{A}$ 与 B, A 与 $\bar{B}$, $\bar{A}$ 与 $\bar{B}$相互独立.