

第三章 离散傅里叶变换 (DFT) 及其快速算法 (FFT)

王柯俨

kywang@mail.xidian.edu.cn

<http://web.xidian.edu.cn/kywang/teach.html>

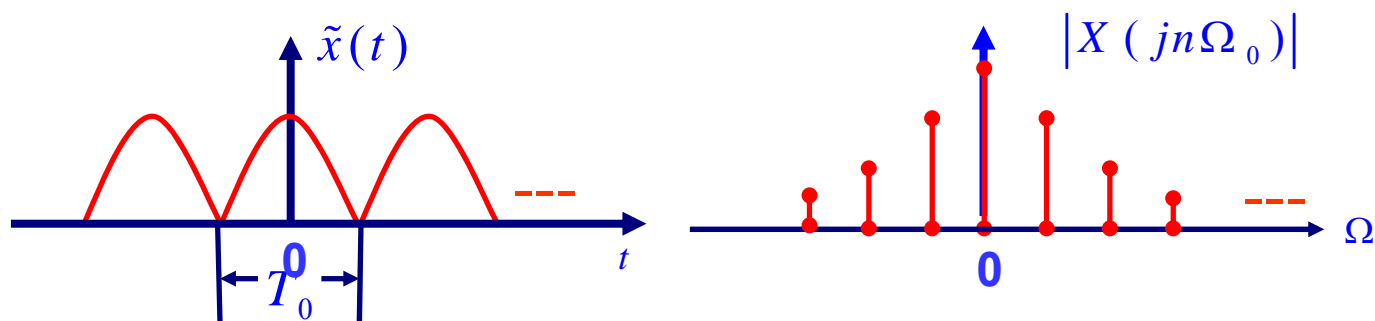


问题:

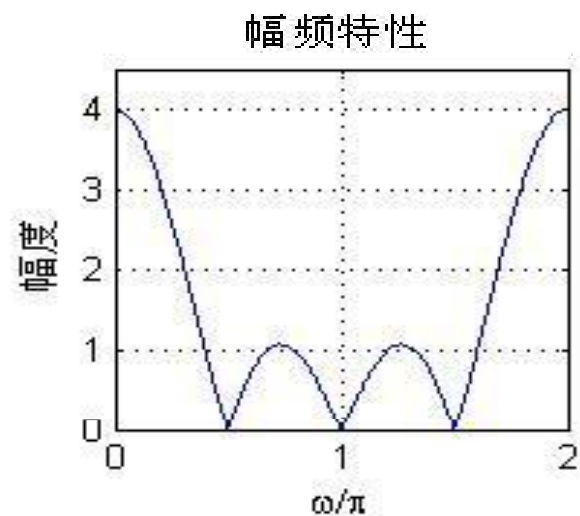
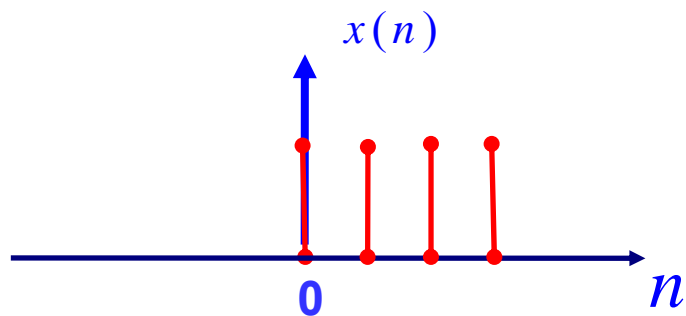
- 序列的傅里叶变换、**Z**变换是时域离散信号及系统分析与设计的重要数学工具;
- 但变换结果均为连续函数, 无法用计算机进行处理;
- **离散傅里叶变换 (DFT)** 对有限长时域离散信号的频谱进行等间隔采样, 频域函数被离散化了, 便于信号的计算机处理。
- **DFT**运算量较大, **快速离散傅里叶变换算法 (FFT)** 是解决方案

复习

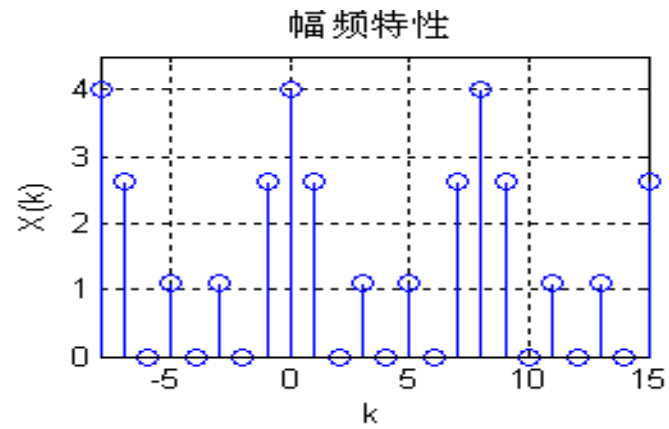
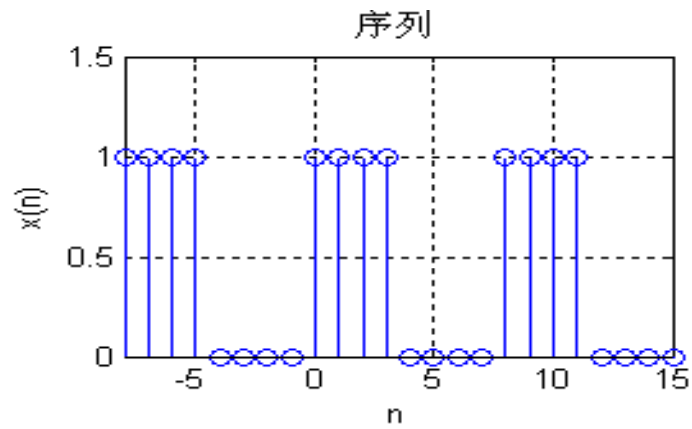
■ 连续周期信号的傅立叶级数(FS)



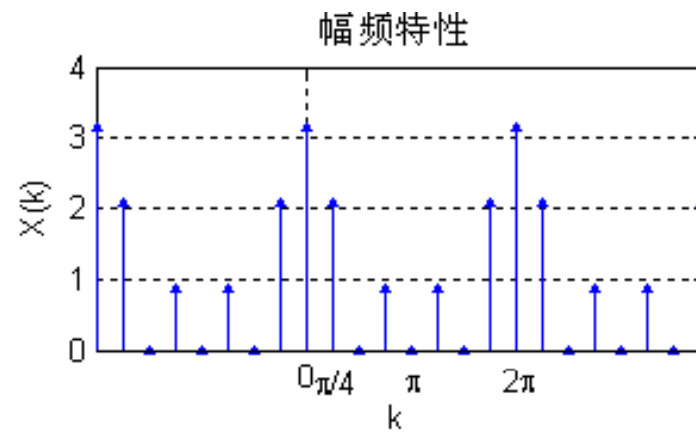
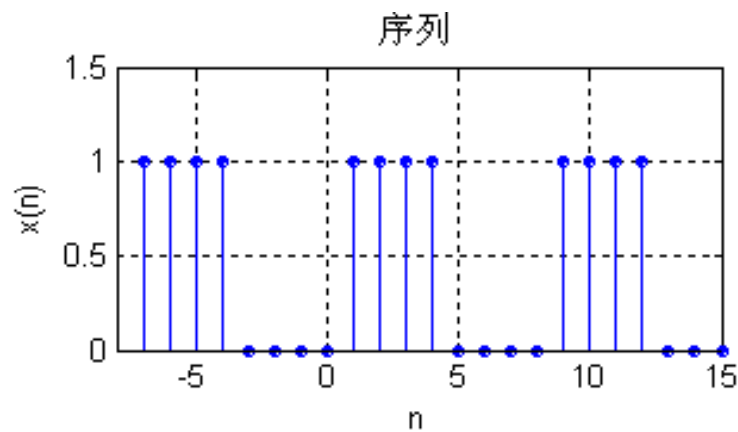
■ 绝对可和离散信号的傅立叶变换(DTFT)



■ 周期序列的离散傅里叶级数系数(DFS)



■ 周期序列的傅里叶变换(DTFT)



3.1 离散傅里叶变换(DFT)的定义

■ 3.1.1 DFT的定义

设 $x(n)$ 是一个长度为 M 的有限长序列， $x(n)$ 的 N 点离散傅立叶变换：


$$X(k) = DFT[x(n)]_N = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \quad 0 \leq k \leq N-1$$

□ N 称为DFT变换区间长度， $N \geq M$

■ 令 $W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$ (简化书写)

■ 离散傅立叶变换与逆变换对为：

$$X(k) = DFT[x(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn} \quad 0 \leq k \leq N-1$$
$$x(n) = IDFT[X(k)] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-kn} \quad 0 \leq n \leq N-1$$


$$X(k) = DFT[x(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{kn} \quad 0 \leq k \leq N-1$$

证明:

$$\begin{aligned} \text{IDFT}[X(k)] &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)W_N^{-kn} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left[\sum_{m=0}^{N-1} x(m)W_N^{mk} \right] W_N^{-kn} \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} x(m) \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} W_N^{k(m-n)} \end{aligned}$$

由于

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} W_N^{k(m-n)} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{-j\frac{2\pi}{N}k(m-n)} = \begin{cases} 1, & m-n = MN, M \text{ 为整数} \\ 0, & m-n \neq MN, M \text{ 为整数} \end{cases}$$

于是

$$\text{IDFT}[X(k)] = \sum_{m=0}^{N-1} x(m)\delta(m-n) = x(n) \quad 0 \leq n \leq N-1$$

因此离散傅立叶逆变换是唯一的

例3.1.1 $x(n) = R_8(n)$ 分别计算序列的**8点**、**16点DFT**

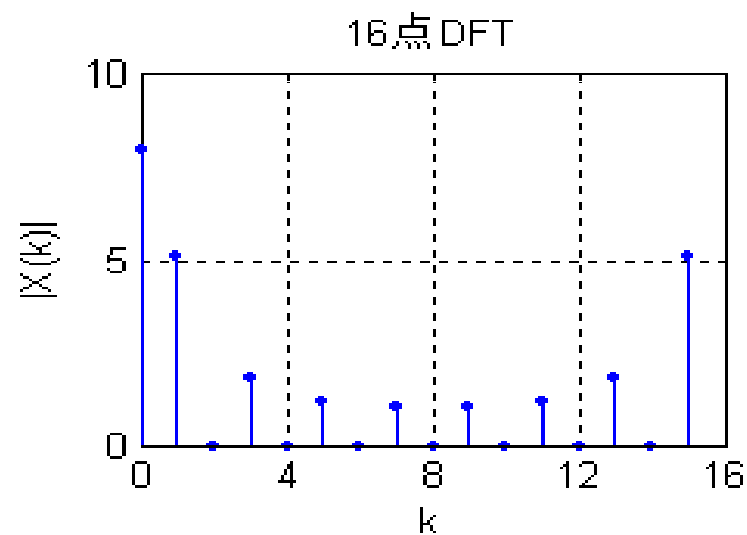
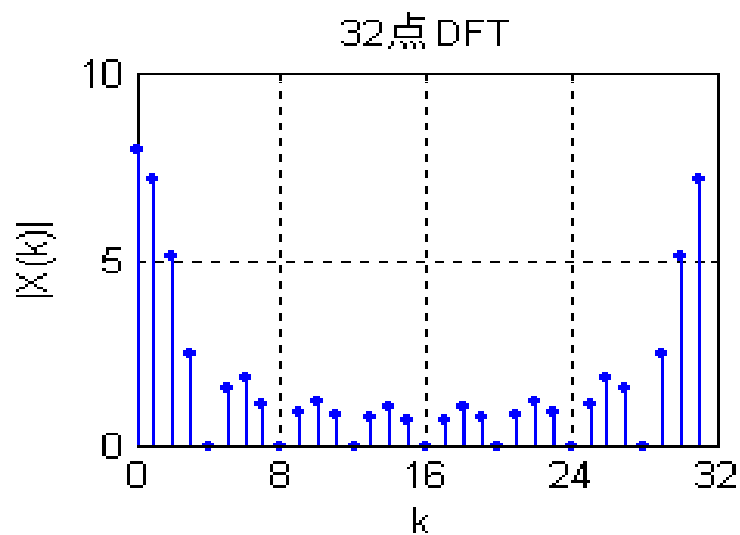
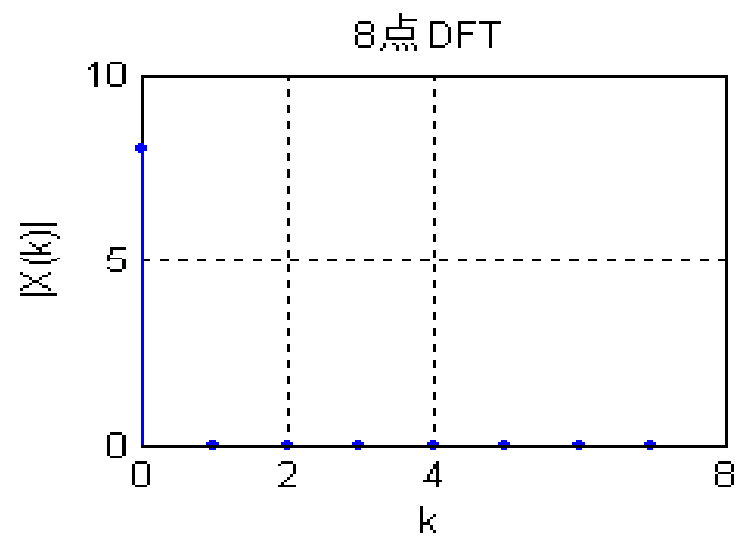
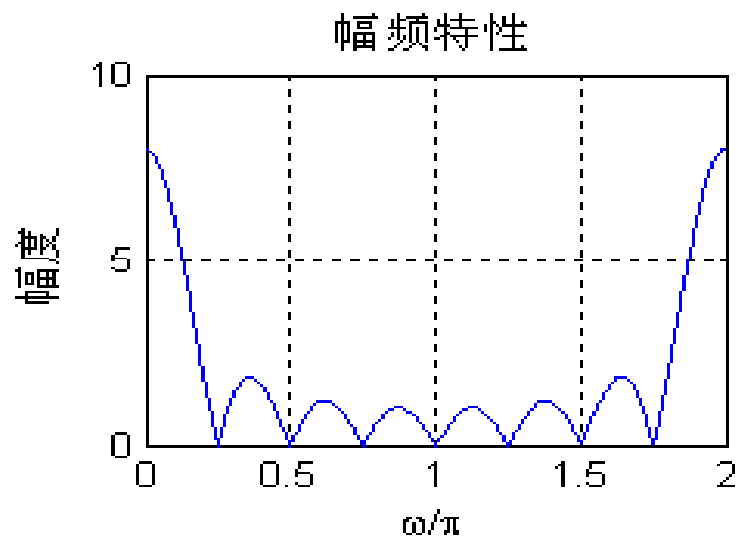
解：8点DFT

$$\begin{aligned} X(k) &= \sum_{n=0}^7 R_8(n)W_8^{kn} = \sum_{n=0}^7 e^{-j\frac{2\pi}{8}kn} \\ &= \begin{cases} 8 & k = 0 \\ 0 & k = 1, 2, 3, \dots, 7 \end{cases} \end{aligned}$$

16点DFT

$$\begin{aligned} X(k) &= \sum_{n=0}^{15} R_8(n)W_{16}^{kn} = \sum_{n=0}^7 R_8(n)W_{16}^{kn} = \frac{1 - W_{16}^{k8}}{1 - W_{16}^k} = \frac{1 - e^{-j\frac{2\pi}{16}k8}}{1 - e^{-j\frac{2\pi}{16}k}} \\ &= \frac{1 - e^{-j\pi k}}{1 - e^{-j\frac{\pi}{8}k}} = \frac{e^{-j\frac{\pi k}{2}} (e^{j\frac{\pi k}{2}} - e^{-j\frac{\pi k}{2}})}{e^{-j\frac{\pi}{16}k} (e^{j\frac{\pi}{16}k} - e^{-j\frac{\pi}{16}k})} = e^{-j\frac{7\pi}{16}k} \frac{\sin \frac{\pi}{2} k}{\sin \frac{\pi}{16} k} \end{aligned}$$

$$k = 0, 1, 2, \dots, 15$$



- **N**不同，**DFT**变换结果不同，因此**N**是**DFT**的一个参数
- $|X(k)|$ 是 $|X(e^{j\omega})|$ 在频率区间 $[0, 2\pi]$ 上的**N**点等间隔采样

3.1.2 DFT与FT、ZT、DFS之间的关系

1. DFT与FT、ZT之间的关系

■ 有限长序列

$$x(n) \quad n = 0, 1, 2, \dots, M-1 \quad N \geq M$$

■ DFT与FT、ZT

$$X(k) = DFT[x(n)]_N = \sum_{n=0}^{M-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \quad 0 \leq k \leq N-1$$

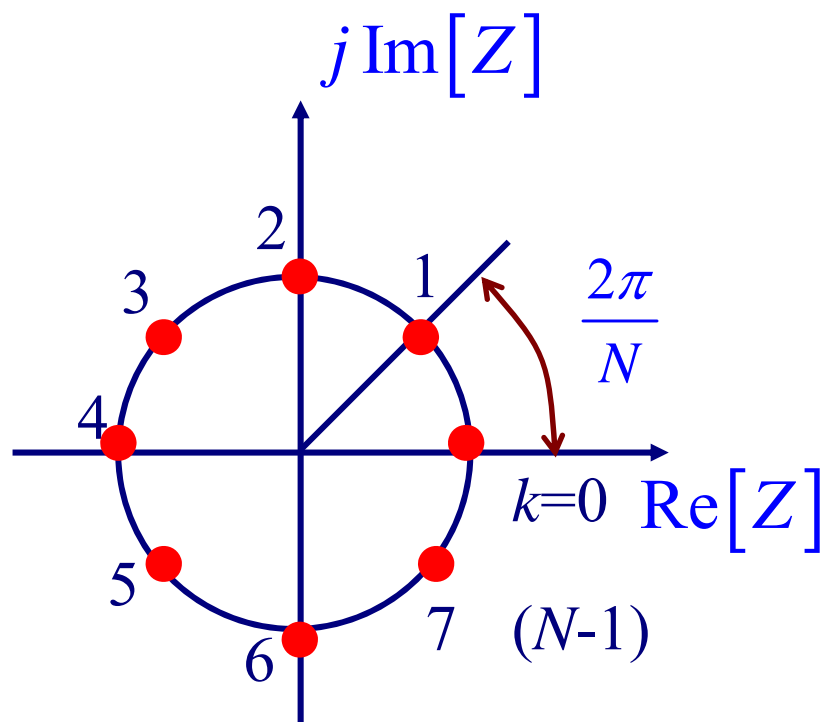
$$X(z) = ZT[x(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{M-1} x(n) z^{-n}$$

$$X(e^{j\omega}) = FT[x(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{M-1} x(n) e^{-j\omega n}$$

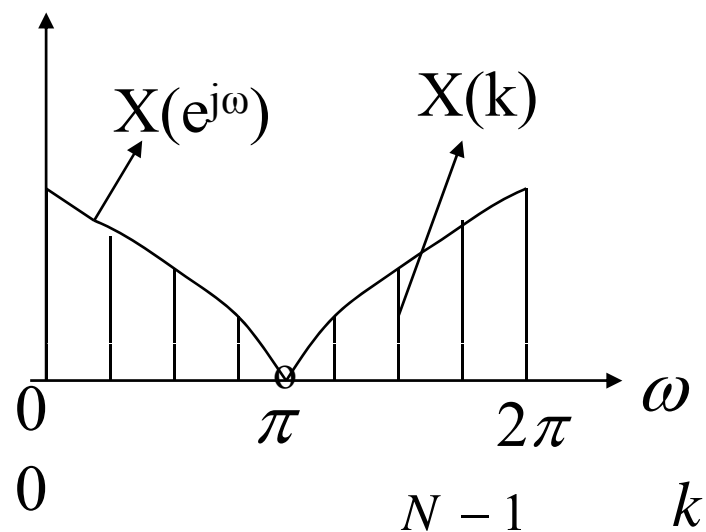
$$X(k) = X(z) \Big|_{z=e^{j\frac{2\pi}{N}k}}, \quad X(k) = X(e^{j\omega}) \Big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k}, \quad 0 \leq k \leq N-1$$

$$X(k) = X(z) \Big|_{z=e^{j\frac{2\pi}{N}k}}, \quad X(k) = X(e^{j\omega}) \Big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k}, \quad 0 \leq k \leq N-1$$

- 序列 $x(n)$ 的 N 点 DFT 是 $x(n)$ 的 Z 变换在单位圆上的 N 点等间隔采样，频率采样间隔为 $2\pi / N$;
- $X(k)$ 为 $x(n)$ 的傅立叶变换 $X(e^{j\omega})$ 在区间 $[0, 2\pi]$ 上的 N 点等间隔采样。这就是 DFT 的 物理意义。



DFT与z变换



DFT与FT变换

3.1.2 DFT与DFS、ZT、FT之间的关系

2. DFT与DFS之间的关系

- 有限长序列 $x(n) \quad n = 0, 1, 2, \dots, M - 1$
- 将 $x(n)$ 以 N 为周期进行周期延拓, 得到周期序列

$$\tilde{x}_N(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(n + mN) = x((n))_N$$


$$x_N(n) = \tilde{x}_N(n)R_N(n)$$

显然, 当

$$N \geq M, \quad x_N(n) = x(n)$$

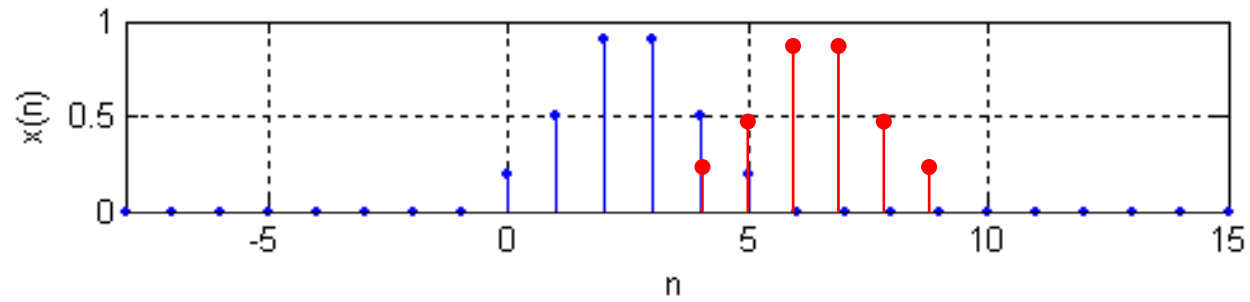
$\tilde{x}_N(n)$ 是 $x(n)$ 的周期延拓序列

$x(n)$ 是 $\tilde{x}_N(n)$ 的主值区间序列

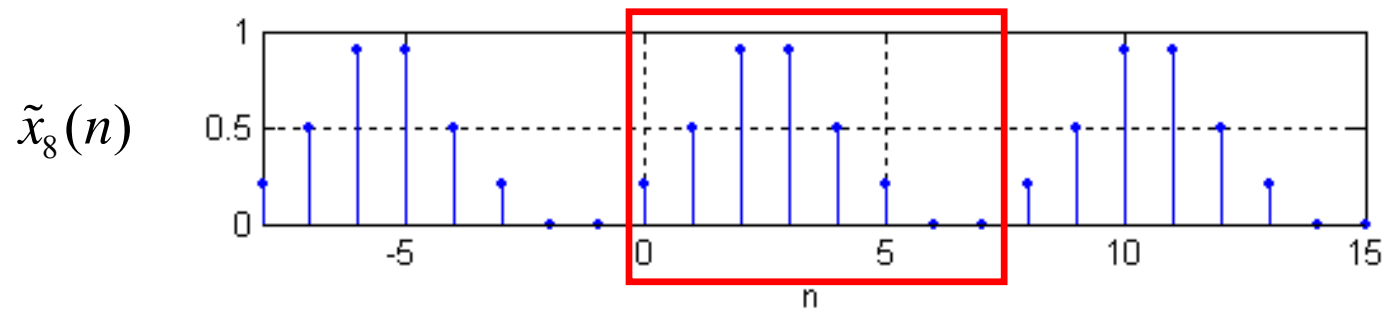


主值区间: 设有限长序列 $x(n)$, $0 \leq n \leq N-1$, 将其延拓为周期序列 $\tilde{x}(n)$, 周期长度为 N , 则:
 $n = 0 \sim N-1$ 区间称为主值区间.

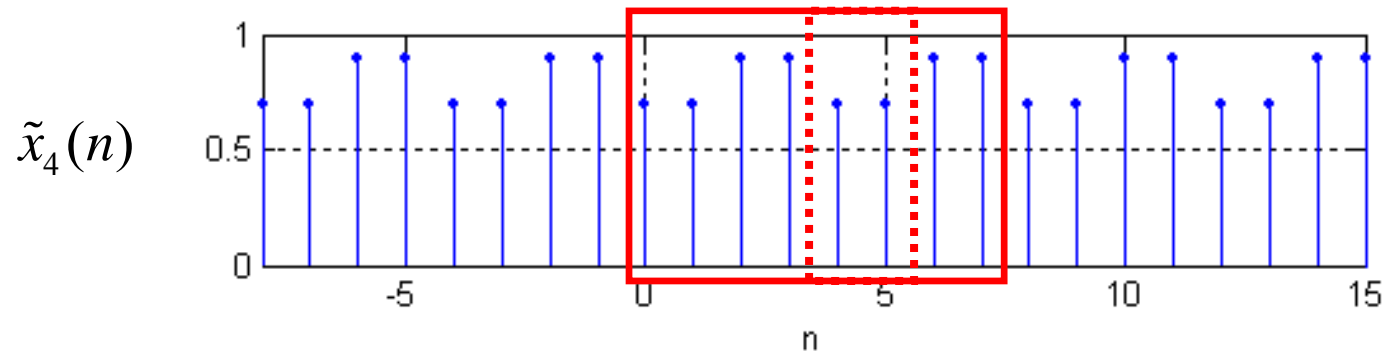
主值区间序列: 在 $n = 0 \sim N-1$ 主值区间内的序列称为主值区间序列.



M=6



N=8, N>M



N=4, N<M

$$\tilde{x}_N(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(n+mN) = x((n))_N$$

■ 周期序列的DFS

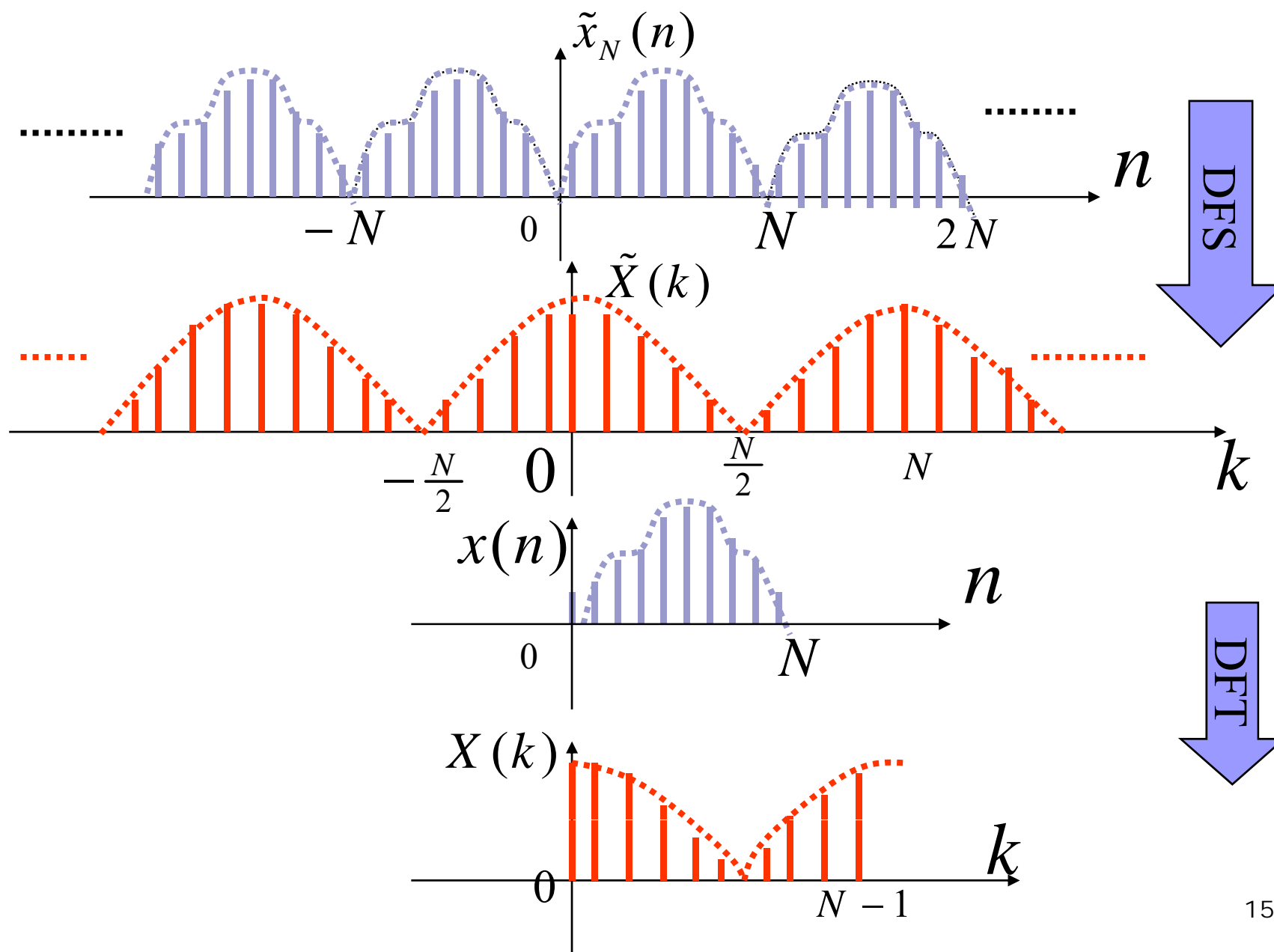
$$\begin{aligned}\tilde{X}(k) &= DFS[\tilde{x}_N(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}_N(n) W_N^{kn} \\ &= \sum_{n=0}^{M-1} x(n) W_N^{kn} \quad -\infty < k < \infty\end{aligned}$$

■ 有限长序列的DFT

$$\begin{aligned}X(k) &= DFT[x(n)]_N = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W^{kn} \\ &= \sum_{n=0}^{M-1} x(n) W^{kn} \quad 0 \leq k \leq N-1\end{aligned}$$

- $X(k)$ 是 $\tilde{X}(k)$ 的主值区间序列，成立条件 $N \geq M$

$$\tilde{X}(k) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} X(k+mN), \quad X(k) = \tilde{X}(k) R_N(k)$$



DFT与DFS之间的关系:

$$DFT : x(n) \Leftrightarrow X(k)$$

$$DFS : \tilde{x}_N(n) \Leftrightarrow \tilde{X}(k)$$

$$\begin{cases} x(n) = \tilde{x}_N(n)R_N(n) & \tilde{x}_N(n) = x((n))_N \\ X(k) = \tilde{X}(k)R_N(k) & \tilde{X}(k) = X((k))_N \end{cases}$$

$$N \geq M$$

- 有限长序列 $x(n)$ 的DFT变换 $X(k)$, 就是 $x(n)$ 的周期延拓序列 $\tilde{x}_N(n)$ 的DFS系数 $\tilde{X}(k)$ 的主值序列

DFT与DFS之间的关系:

$$DFT : x(n) \Leftrightarrow X(k)$$

$$DFS : \tilde{x}_N(n) \Leftrightarrow \tilde{X}(k)$$

- 当条件不满足, 即 $N < M$ 时, $\mathbf{x}(n)$ 的周期延拓序列 $\tilde{x}_N(n)$ 会发生时域混叠, 此时 $\tilde{x}_N(n)$ 的DFS系数 $\tilde{X}(k)$ 的主值序列将不再是 $\mathbf{x}(n)$ 的DFT变换 $\mathbf{X}(k)$ 。

例： $x(n) = R_8(n)$, 求： (1) $X(z)$ (2) $X(e^{j\omega})$

(3) 令 $x_N(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(n+mN) \cdot R_N(n)$, 求 $X_N(k) = DFT[x_N(n)]$, $N = 16$

解： (1) $X(z) = \frac{1-z^{-8}}{1-z^{-1}}, \quad |z| > 0$

(2) $X(e^{j\omega}) = \frac{1-e^{-j\omega 8}}{1-e^{-j\omega}} = e^{-j\frac{7}{2}\omega} \frac{\sin \frac{8}{2}\omega}{\sin \frac{1}{2}\omega}$

(3) $X_N(k) = X(e^{j\omega}) \Big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k}$
 $= e^{-j\frac{7\pi}{16}k} \frac{\sin \frac{\pi}{2}k}{\sin \frac{\pi}{16}k} \quad k = 0, 1, 2, \dots, 15$

3.1.3 DFT的矩阵方程表示 (1)

$$X(k) = DFT[x(n)]_N = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{kn} \quad 0 \leq k \leq N-1$$

$$\mathbf{X} = \mathbf{D}_N \mathbf{x}$$

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ \vdots \\ X(N-1) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \vdots \\ x(N-1) \end{bmatrix}$$

**N点
DFT矩阵**

$$D_N = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & W_N^1 & W_N^2 & \dots & W_N^{N-1} \\ 1 & W_N^2 & W_N^4 & \dots & W_N^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & W_N^{(N-1)} & W_N^{2(N-1)} & \dots & W_N^{(N-1) \times (N-1)} \end{bmatrix}$$

3.1.3 DFT的矩阵方程表示 (2)

$$\mathbf{X} = \mathbf{D}_N \mathbf{x}$$

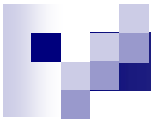
■ IDFT的矩阵表示

$$x(n) = IDFT[X(k)] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-kn} \quad 0 \leq n \leq N-1$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{D}_N^{-1} \mathbf{X}$$

**N点
IDFT矩阵**

$$D_N^{-1} = \frac{1}{N} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & W_N^{-1} & W_N^{-2} & \dots & W_N^{-(N-1)} \\ 1 & W_N^{-2} & W_N^{-4} & \dots & W_N^{-2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & W_N^{-(N-1)} & W_N^{-2(N-1)} & \dots & W_N^{-(N-1)(N-1)} \end{bmatrix}$$



$$D_N = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & W_N^1 & W_N^2 & W_N^3 & \dots & W_N^{N-1} \\ 1 & W_N^2 & W_N^4 & W_N^6 & \dots & W_N^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & W_N^{(N-1)} & W_N^{2(N-1)} & W_N^{3(N-1)} & \dots & W_N^{(N-1)\times(N-1)} \end{bmatrix}$$

$$D_N^{-1} = \frac{1}{N} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & W_N^{-1} & W_N^{-2} & W_N^{-3} & \dots & W_N^{-(N-1)} \\ 1 & W_N^{-2} & W_N^{-4} & W_N^{-6} & \dots & W_N^{-2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & W_N^{-(N-1)} & W_N^{-2(N-1)} & W_N^{-3(N-1)} & \dots & W_N^{-(N-1)\times(N-1)} \end{bmatrix}$$

\therefore

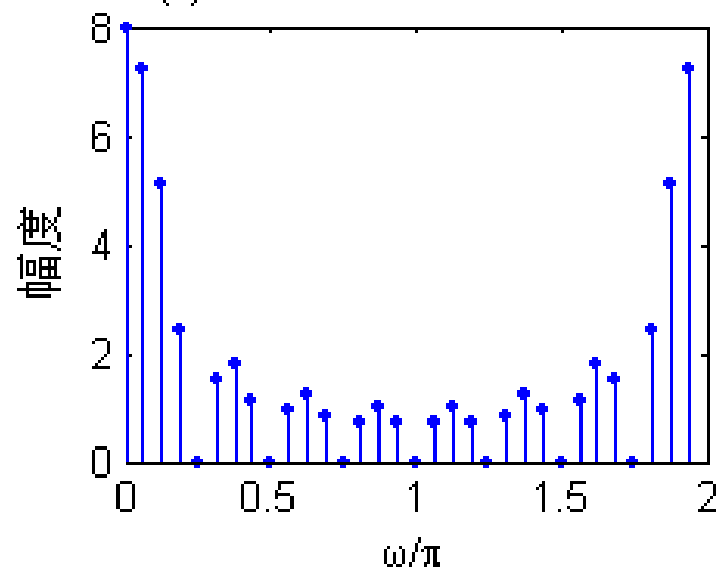
$$D_N^{-1} = \frac{1}{N} D_N^*$$

3.1.4用MATLAB计算序列的DFT

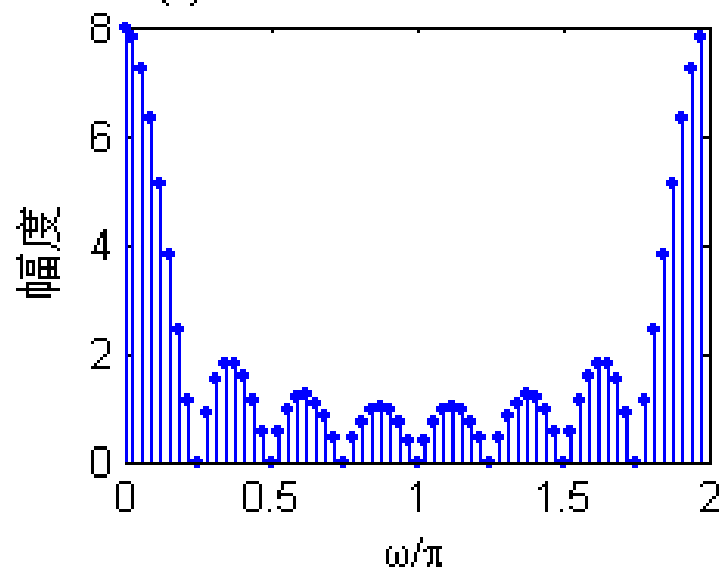
- `xn=[1 1 1 1 1 1 1 1];` %输入时域序列向量 $xn=R8(n)$
- `Xk32=fft(xn,32);` %计算 xn 的32点DFT
- `Xk64=fft(xn,64);` %计算 xn 的64点DFT
- %以下为绘图部分
- `k=0:31;wk=2*k/32;` %产生32点DFT对应的采样点频率(关于 π 归一化值)
- `subplot(2,2,1);stem(wk,abs(Xk32),'.');` %绘制32点DFT的幅频特性图
- `title('(a)32点DFT的幅频特性图');``xlabel('ω/π');``ylabel('幅度')`
- `subplot(2,2,3);stem(wk,angle(Xk32),'.');` %绘制32点DFT的相频特性图
- `title('(b)32点DFT的相频特性图');`
- `xlabel('ω/π');``ylabel('相位');``axis([0,2,-3.5,3.5])`
- `k=0:63;wk=2*k/64;` %产生64点DFT对应的采样点频率(关于 π 归一化值)
- `subplot(2,2,2);stem(wk,abs(Xk64),'.');` %绘制64点DFT的幅频特性图
- `title('(c)64点DFT的幅频特性图');``xlabel('ω/π');``ylabel('幅度')`
- `subplot(2,2,4);stem(wk,angle(Xk64),'.');` %绘制64点DFT的相频特性图
- `title('(d)64点DFT的相频特性图');`
- `xlabel('ω/π');``ylabel('相位');``axis([0,2,-3.5,3.5])`



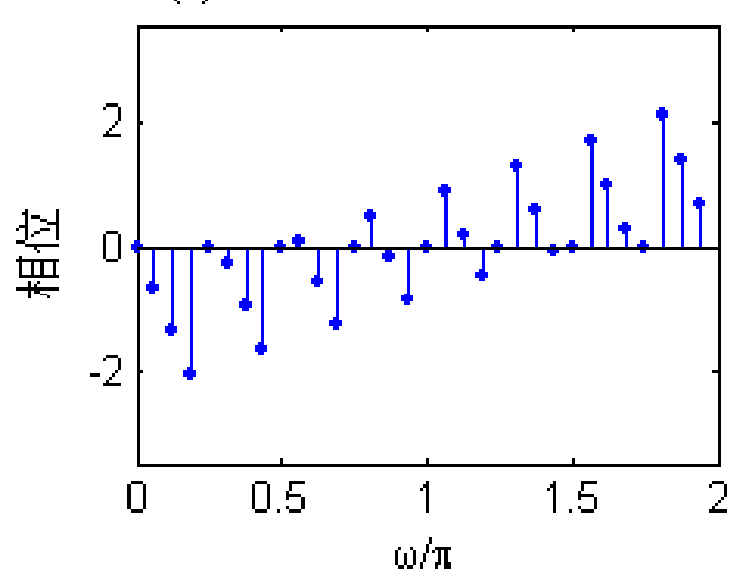
(a)32点DFT的幅频特性图



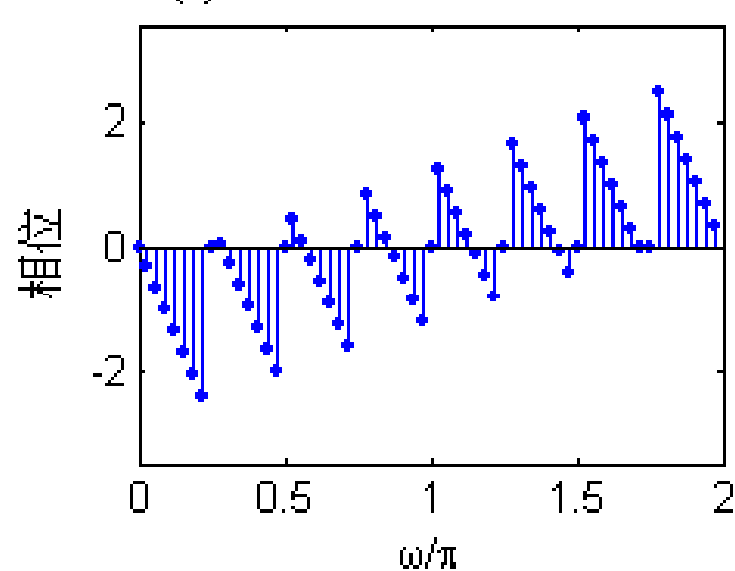
(c)64点DFT的幅频特性图



(b)32点DFT的相频特性图



(d)64点DFT的相频特性图





小结

- **DFT** 引入的目的
- **DFT** 的定义
- **DFT**与**DFS**、**ZT**、**FT**之间的关系
- **DFT**、**IDFT**的计算
- **DFT**的矩阵表示

3.2 离散傅里叶变换 (DFT) 的主要性质

1. 线性性质

- 设 $x_1(n)$, $x_2(n)$ 为有限长序列, 长度分别为 N_1 、 N_2
- 它们的离散傅里叶变换分别为

$$X_1(k) = DFT[x_1(n)]_N$$

$$X_2(k) = DFT[x_2(n)]_N \quad N \geq \max[N_1, N_2]$$

- 若

$$x(n) = ax_1(n) + bx_2(n)$$

- 则

$$X(k) = DFT[x(n)]_N = aX_1(k) + bX_2(k),$$
$$k = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

2. DFT的隐含周期性

- 由于 $W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$, $W_N^k = W_N^{(k+mN)}$

- 所以 $\mathbf{X(k)}$ 满足:

$$\begin{aligned} X(k+mN) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{(k+mN)n} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{kn} = X(k) \end{aligned}$$

- 物理意义: $\mathbf{X(k)}$ 为 $X(e^{j\omega})$ 在区间 $[0, 2\pi]$ 上的 \mathbf{N} 点等间隔采样。
- $X(e^{j\omega})$ 以 2π 为周期, $\mathbf{X(k)}$ 以 \mathbf{N} 为周期。

3. 循环移位性质

- 循环移位:

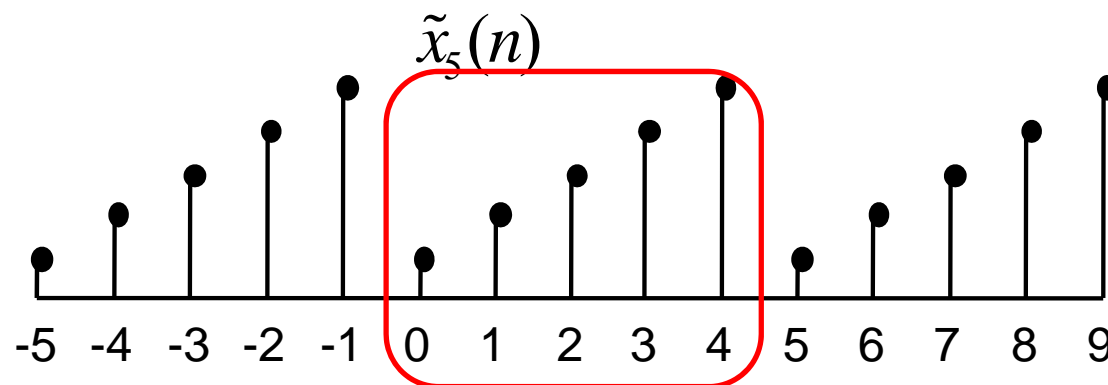
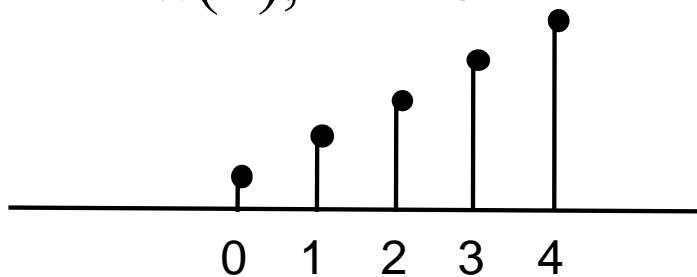
- 有限长序列 $\mathbf{x(n)}$,序列长度为 \mathbf{M} , 对序列进行周期延拓, 周期 $\mathbf{N \geq M}$

$$\tilde{x}_N(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(n + mN) = x((n))_N$$

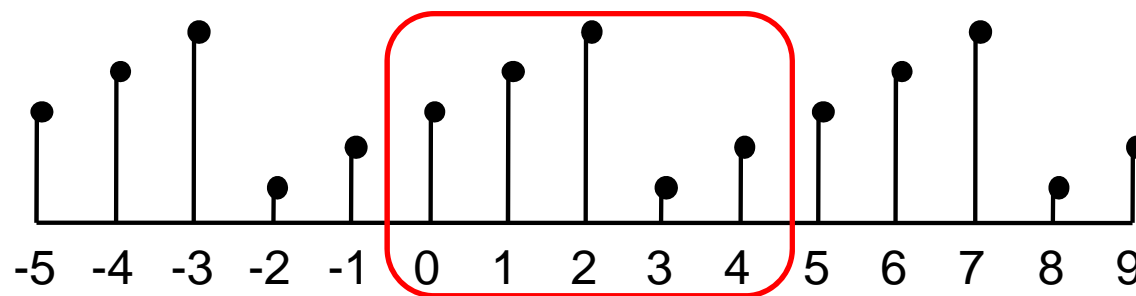
- $\mathbf{x(n)}$ 的循环移位序列: $\tilde{x}_N(n)$ 左移 \mathbf{m} 个单位, 取主值序列

$$y(n) = \tilde{x}_N(n + m)R_N(n) = x((n + m))_N R_N(n)$$

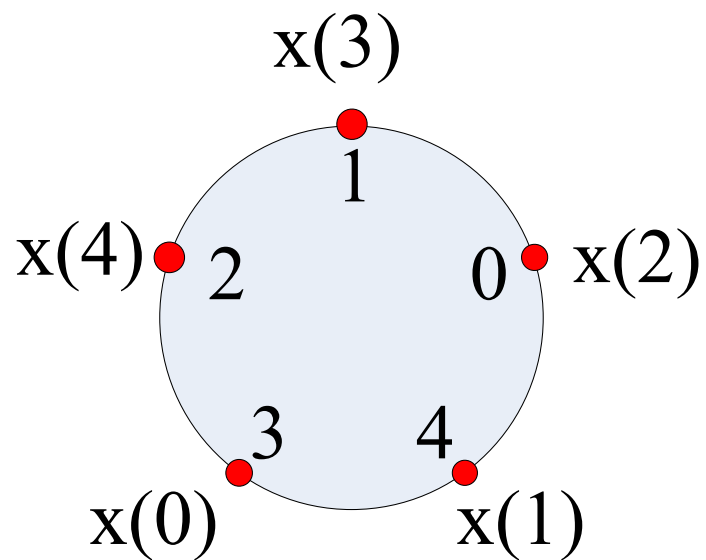
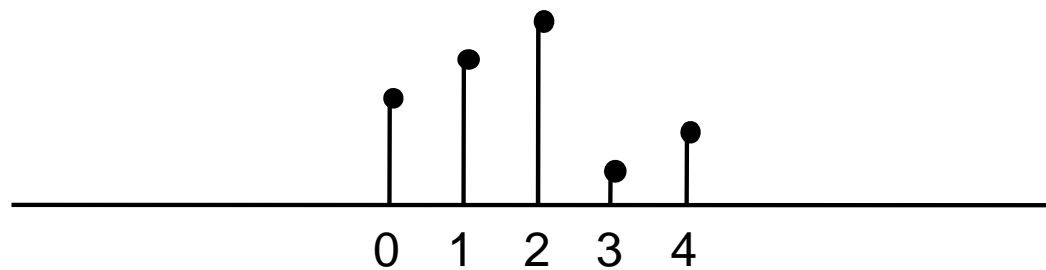
$x(n), M = 5$



$\tilde{x}_5(n+2)$



$\tilde{x}_5(n+2)R_5(n)$



3. 循环移位性质

- 循环移位:

- 有限长序列 $\mathbf{x(n)}$,序列长度为 \mathbf{M} ,对序列进行周期延拓,周期 $\mathbf{N \geq M}$

$$\tilde{x}_N(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(n + mN) = x((n))_N$$

- $\mathbf{x(n)}$ 的循环移位序列: $\tilde{x}_N(n)$ 左移 \mathbf{m} 个单位,取主值序列

$$y(n) = \tilde{x}_N(n + m)R_N(n) = x((n + m))_N R_N(n)$$

- **Q:** 循环移位序列的**DFT**与原序列 $\mathbf{x(n)}$ 的**DFT**有何关系?

序列循环移位后的DFT

$$y(n) = x((n+m))_N R_N(n), \quad N \geq M \quad X(k) = DFT[x(n)]_N$$

■ 则

$$Y(k) = DFT[y(n)]_N = W_N^{-km} X(k)$$

■ 证明:

$$Y(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x((n+m))_N R_N(n) W_N^{kn} \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} x((n+m))_N W_N^{kn} = \sum_{l=m}^{N-1+m} x((l))_N W_N^{k(l-m)}$$

$$= W_N^{-km} \sum_{l=m}^{N-1+m} x((l))_N W_N^{kl} = W_N^{-km} \sum_{l=0}^{N-1} x(l) W_N^{kl}$$

$$= W_N^{-km} X(k)$$

3. 循环移位性质 -- 总结

- 对时域有限长序列 $x(n)$ 的循环移位序列，其DFT具有如下性质：

$$DFT[x((n+m))_N R_N(n)]_N = W_N^{-km} X(k)$$

- 对于频域有限长序列 $X(k)$ 的循环移位，有如下反变换特性：

$$IDFT[X((k+l))_N R_N(k)] = W_N^{nl} x(n)$$

4. 复共轭序列的DFT

- 设 $x^*(n)$ 为 $x(n)$ 的复共轭序列，长度为 N

$$X(k) = DFT[x(n)]_N$$

- 则 $DFT[x^*(n)]_N = X^*(N - k), \quad k = 0, 1, \dots, N - 1$

- 证明:

$$\begin{aligned} X^*(N - k) &= \left[\sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{(N-k)n} \right]^* = \sum_{n=0}^{N-1} x^*(n) W_N^{(k-N)n} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x^*(n) W_N^{kn} = DFT[x^*(n)]_N \end{aligned}$$

- 类似地:

$$X(N) = X(0)$$

$$DFT[x^*(N - n)]_N = X^*(k) \quad x(0) = x(N)$$

5. DFT的共轭对称性

- FT的共轭对称性：关于坐标原点共轭对称
- DFT的共轭对称性：DFT变换涉及到的 $x(n)$ 和 $X(k)$ 均为有限长序列，定义区间为0到N-1，所以这里的对称性是指关于N/2点的对称性。

- 有限长共轭对称序列 $x_{ep}(n)$

$$x_{ep}(n) = x_{ep}^*(N-n), \quad 0 \leq n \leq N-1$$

- 当N为偶数时，用N/2-n替代n

$$x_{ep}\left(\frac{N}{2} - n\right) = x_{ep}^*\left(\frac{N}{2} + n\right), \quad 0 \leq n \leq \frac{N}{2} - 1$$

共轭反对称序列 $x_{op}(n)$

$$x_{op}(n) = -x_{op}^*(N-n), \quad 0 \leq n \leq N-1$$

■ 当N为偶数时，用N/2-n替代n

$$x_{op}\left(\frac{N}{2} - n\right) = -x_{op}^*\left(\frac{N}{2} + n\right), \quad 0 \leq n \leq \frac{N}{2} - 1$$

■ 对于任何有限长序列 $x(n)$ ，均可表示为

$$x(n) = x_{ep}(n) + x_{op}(n), \quad 0 \leq n \leq N-1$$

■ 用N-n替代n，取共轭

$$x^*(N-n) = x_{ep}^*(N-n) + x_{op}^*(N-n) = x_{ep}(n) - x_{op}(n)$$

■ 于是

$$x_{ep}(n) = \frac{1}{2}[x(n) + x^*(N-n)] \quad x_{op}(n) = \frac{1}{2}[x(n) - x^*(N-n)]$$

DFT的共轭对称性

■ 1. 将序列分成实部与虚部之和

$$x(n) = x_r(n) + jx_i(n)$$

其中, $x_r(n) = \text{Re}[x(n)] = \frac{1}{2}[x(n) + x^*(n)]$

$$jx_i(n) = j \text{Im}[x(n)] = \frac{1}{2}[x(n) - x^*(n)]$$

■ 则: $DFT[x_r(n)] = \frac{1}{2}DFT[x(n) + x^*(n)]$
 $= \frac{1}{2}[X(k) + X^*(N-k)] = X_{ep}(k)$

$$DFT[jx_i(n)] = \frac{1}{2}DFT[x(n) - x^*(n)]$$
$$= \frac{1}{2}[X(k) - X^*(N-k)] = X_{op}(k)$$

■ 2. 将序列分成共轭对称和共轭反对称之和

$$x(n) = x_{ep}(n) + x_{op}(n), \quad 0 \leq n \leq N-1$$

其中,
$$x_{ep}(n) = \frac{1}{2}[x(n) + x^*(N-n)]$$

$$x_{op}(n) = \frac{1}{2}[x(n) - x^*(N-n)]$$

■ 则:
$$\begin{aligned} DFT[x_{ep}(n)] &= \frac{1}{2} DFT[x(n) + x^*(N-n)] \\ &= \frac{1}{2}[X(k) + X^*(k)] = \mathbf{Re}[X(k)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} DFT[x_{op}(n)] &= \frac{1}{2} DFT[x(n) - x^*(N-n)] \\ &= \frac{1}{2}[X(k) - X^*(k)] = \mathbf{j Im}[X(k)] \end{aligned}$$

小结: DFT的共轭对称性

实部 \longleftrightarrow 共轭对称分量

J虚部 \longleftrightarrow 共轭反对称分量

$$x(n) = x_r(n) + jx_i(n)$$

$$X(k) = DFT[x(n)] = X_{ep}(k) + X_{op}(k)$$

$$X_{ep}(k) = DFT[x_r(n)], \quad X_{op}(k) = DFT[jx_i(n)]$$

$$x(n) = x_{ep}(n) + x_{op}(n), \quad 0 \leq n \leq N-1$$

$$X(k) = DFT[x(n)] = X_R(k) + jX_I(k)$$

$$X_R(k) = \text{Re}[X(k)] = DFT[x_{ep}(n)],$$

$$jX_I(k) = j \text{Im}[X(k)] = DFT[x_{op}(n)]$$

实序列DFT的特点

- 设 $x(n)$ 为长度为 N 的实序列，且 $X(k)=\text{DFT}[x(n)]$ ，则

$$X(k) = X^*(N-k), \quad 0 \leq k \leq N-1$$

- 写成极坐标形式 $X(k) = |X(k)|e^{j\theta(k)}$

- 则

□ $|X(k)|$ 关于 $k=N/2$ 点偶对称

□ $\theta(k)$ 关于 $k=N/2$ 点奇对称

$$|X(k)| = |X(N-k)|$$

$$\theta(k) = -\theta(N-k)$$

- 实数序列的**DFT**满足共轭对称性，利用这一特性，只要知道一半数目的 $\mathbf{X(k)}$ ，就可得到另一半的 $\mathbf{X(k)}$ ，这一特点在 **DFT**运算中可以加以利用，以提高运算效率。

1. 计算一个复序列的**N**点**DFT**，可求得两个不同实序列的**DFT**

例： $x_1(n), x_2(n)$ 是实序列，长度均为**N**，构造一个复序列

$$x(n) = x_1(n) + jx_2(n)$$

- **DFT** $X(k) = DFT[x(n)]_N = X_{ep}(k) + X_{op}(k)$

$$X_1(k) = DFT[x_1(n)] = X_{ep}(k) = \frac{1}{2} [X(k) + X^*(N-k)]$$

$$X_2(k) = DFT[x_2(n)] = -jDFT[jx_2(n)]$$

复数乘法运算量比较
 $2N^2 \rightarrow N^2$

$$= -jX_{op}(k) = \frac{1}{2j} [X(k) - X^*(N-k)]$$

2. 实序列的2N点DFT，可以拆分重组为N点复序列的DFT

例： $v(n)$ 是实序列，长度为2N

- 拆分 $x_1(n) = v(2n) \quad x_2(n) = v(2n+1) \quad 0 \leq n \leq N-1$
- 重组 $x(n) = x_1(n) + jx_2(n) \quad 0 \leq n \leq N-1$
- 计算复序列 $x(n)$ 的N点DFT，可得实序列 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 的N点DFT： $X_1(k)$ 和 $X_2(k)$
- 由 $X_1(k)$ 和 $X_2(k)$ 可得实序列 $v(n)$ 的2N点DFT，即 $V(k)$

$$\begin{aligned}
V(k) &= \sum_{n=0}^{2N-1} v(n)W_{2N}^{kn} = \sum_{n=0}^{N-1} v(2n)W_{2N}^{k2n} + \sum_{n=0}^{N-1} v(2n+1)W_{2N}^{k(2n+1)} \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} x_1(n)W_N^{kn} + W_{2N}^k \sum_{n=0}^{N-1} x_2(n)W_N^{kn} \\
&= X_1(k) + W_{2N}^k X_2(k) \quad 0 \leq k \leq N-1
\end{aligned}$$

$$V(k+N) = X_1(k) - W_{2N}^k X_2(k)$$

复数乘法运算量比较
 $(2N)^2 \rightarrow N^2+N$

基2FFT基本思想

6. 循环卷积定理

1. 两个有限长序列的循环卷积

- 序列 $h(n), x(n)$ 的长度分别为**N**和**M**
- $x(n)$ 与 $h(n)$ 的**L点循环卷积**定义为

$$y_c(n) = h(n) \textcircled{L} x(n) = \left[\sum_{m=0}^{L-1} h(m)x((n-m))_L \right] R_L(n)$$

$$L \geq \max[N, M]$$

\textcircled{L} L点循环卷积

$\textcircled{*}$ 循环卷积

$*$ 线性卷积

- m, n 的范围：**0~L-1**
- 直接计算很麻烦，采用矩阵相乘计算

利用矩阵计算循环卷积

$$y_c(n) = \left[\sum_{m=0}^{L-1} h(m)x((n-m))_L \right] R_L(n)$$

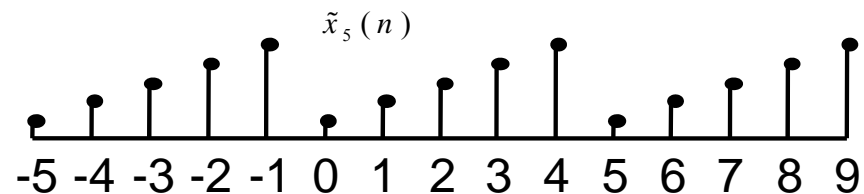
$$n = 0, m = 0, 1, 2, \dots, L-1$$

$x((n-m))_L$ 形成 $x(n)$ 的循环倒相序列

$$\begin{aligned} & \{x((0))_L, x((-1))_L, x((-2))_L, \dots, x((-l+1))_L\} \\ &= \{x(0), x(L-1), x(L-2), \dots, x(1)\} \end{aligned}$$

$$n = 1, m = 0, 1, 2, \dots, L-1$$

$x((n-m))_L$ 形成的序列为



$$\begin{aligned} & \{x((1))_L, x((0))_L, x((-1))_L, \dots, x((-L+2))_L\} \\ &= \{x(1), x(0), x(L-1), \dots, x(2)\} \end{aligned}$$

当n、m从0变换到L-1时，得到 $x((n-m))_L$ 的矩阵

**X(n)的L点
循环卷积矩阵
(循环矩阵)**

$$\begin{bmatrix} x(0) & x(L-1) & x(L-2) & \cdots & x(1) \\ x(1) & x(0) & x(L-1) & \cdots & x(2) \\ x(2) & x(1) & x(0) & \cdots & x(3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x(L-1) & x(L-2) & x(L-3) & \cdots & x(0) \end{bmatrix}$$

- 第一行是 $\{x(0), x(1), x(2), \cdots, x(L-1)\}$ 的循环倒相序列，若x(n) 的长度M<L，则需在x(n)末尾补L-M个零；
- 前一行向右循环移位形成其它各行；
- 与主对角线平行的线上，各元的值相等。

循环卷积的矩阵计算公式

$$y_c(n) = h(n) \textcircled{L} x(n) = \left[\sum_{m=0}^{L-1} h(m)x((n-m))_L \right] R_L(n)$$

$$L \geq \max[N, M]$$



$$\begin{bmatrix} y_c(0) \\ y_c(1) \\ y_c(2) \\ \vdots \\ y_c(L-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(0) & x(L-1) & x(L-2) & \cdots & x(1) \\ x(1) & x(0) & x(L-1) & \cdots & x(2) \\ x(2) & x(1) & x(0) & \cdots & x(3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x(L-1) & x(L-2) & x(L-3) & \cdots & x(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h(0) \\ h(1) \\ h(2) \\ \vdots \\ h(L-1) \end{bmatrix}$$

若 $h(n)$ 的长度 $N < L$, 则需在 $h(n)$ 末尾补 $L-N$ 个零

例3.2.1: 计算序列 $h(n), x(n)$ 的4点和8点循环卷积

$$h(n) = \{h(0), h(1), h(2), h(3)\} = \{1, 2, 0, 1\},$$

$$x(n) = \{x(0), x(1), x(2), x(3)\} = \{2, 2, 1, 1\},$$

解:

$$y_c(n) = h(n) \circledast x(n) = \sum_{m=0}^{L-1} h(m)x((n-m))_L R_L(n)$$

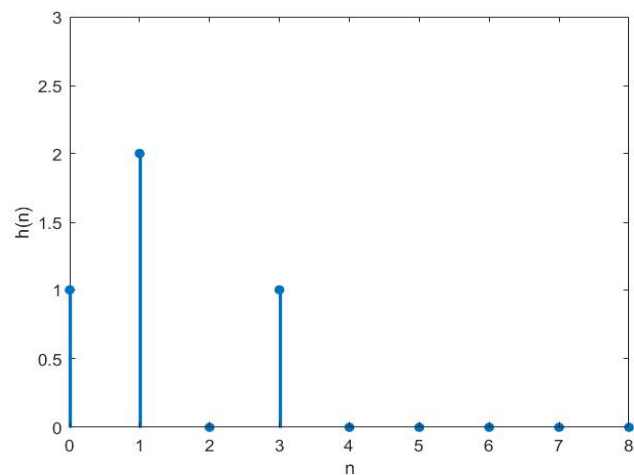
■ 4点循环卷积

$$\begin{bmatrix} y_c(0) \\ y_c(1) \\ y_c(2) \\ y_c(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix}$$

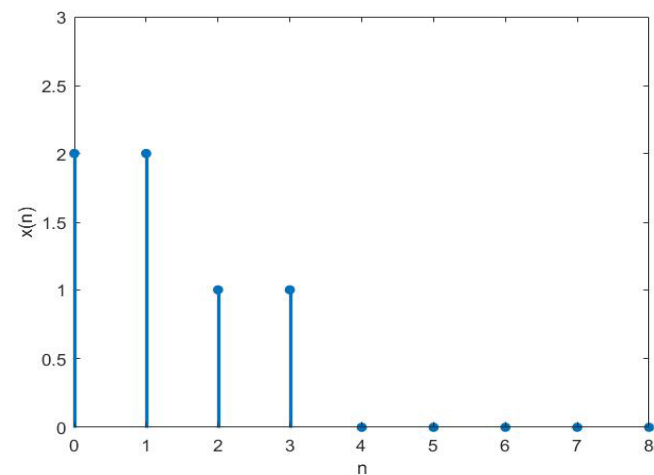
8点循环卷积

$$\begin{bmatrix} y_c(0) \\ y_c(1) \\ y_c(2) \\ y_c(3) \\ y_c(5) \\ y_c(6) \\ y_c(7) \\ y_c(8) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 5 \\ 5 \\ 4 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

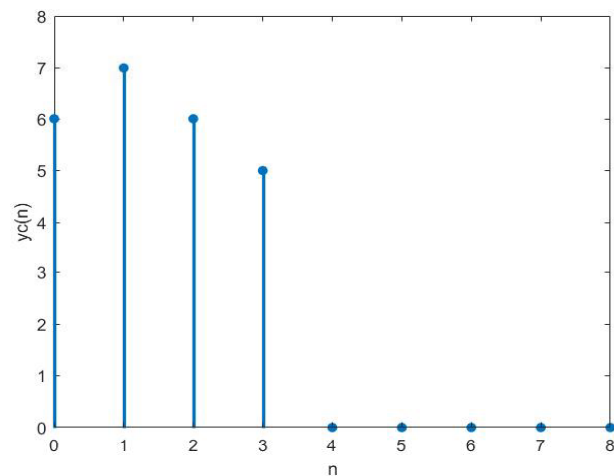
循环卷积结果



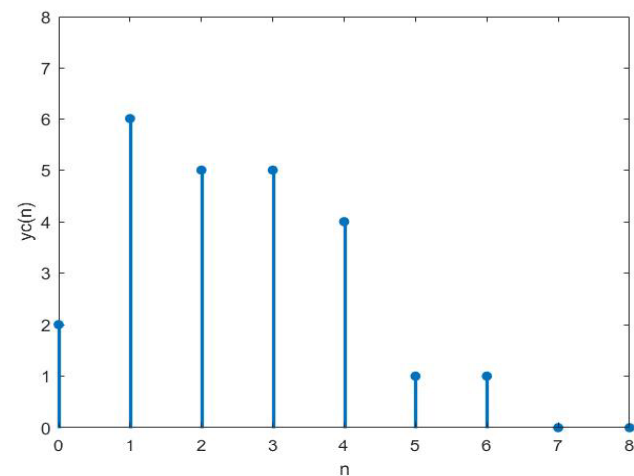
$h(n)$



$x(n)$



4点循环卷积



8点循环卷积

8点循环卷积

$$\begin{bmatrix} y_c(0) \\ y_c(1) \\ y_c(2) \\ y_c(3) \\ y_c(5) \\ y_c(6) \\ y_c(7) \\ y_c(8) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 5 \\ 5 \\ 4 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- $L \geq N + M - 1$ 循环卷积 = 线性卷积
- 循环卷积计算复杂

补充：循环卷积 V.S. 线性卷积

■ 区别：

- 循环卷积对序列的位移采取循环移位，而线性卷积对序列采取线性移位。
- 两个N点序列的N点循环卷积的结果仍为N点序列，而它们的线性卷积的结果的长度则为2N-1。

■ 联系：

- 两个序列的N点循环卷积是他们的线性卷积以N为周期延拓。

$$y(n) = [h(n) \otimes x(n)]_N = \left(\sum_{r=-\infty}^{\infty} y'(n - rN) \right) G_N(n)$$

$$y'(n) = h(n) * x(n)$$

DFT的时域循环卷积定理 (1)

- 序列 $h(n), x(n)$ 的长度分别为 N 和 M
- $y_c(n)$ 为 $x(n)$ 与 $h(n)$ 的 L 点循环卷积, 即

$$y_c(n) = h(n) \textcircled{L} x(n) \quad L \geq \max[N, M]$$

- 且 $X(k) = DFT[x(n)]_L$ $H(k) = DFT[h(n)]_L$

- 则

$$Y_c(k) = DFT[y_c(n)]_L = H(k)X(k)$$

DFT的时域循环卷积定理（2）

■ 证明:

$$\begin{aligned} Y_c(k) &= DFT[y_c(n)]_L = \sum_{n=0}^{L-1} y_c(n) W_L^{kn} \\ &= \sum_{n=0}^{L-1} \left\{ \left[\sum_{m=0}^{L-1} h(m) x((n-m))_L \right] R_L(n) \right\} W_L^{kn} \\ &= \sum_{m=0}^{L-1} h(m) \sum_{n=0}^{L-1} x((n-m))_L W_L^{kn} \\ &= \sum_{m=0}^{L-1} h(m) W_L^{km} \sum_{n=0}^{L-1} x((n-m))_L W_L^{k(n-m)} \\ &= \sum_{m=0}^{L-1} h(m) W_L^{km} \sum_{j=-m}^{L-1-m} x((j))_L W_L^{kj} \end{aligned}$$

DFT的时域循环卷积定理（3）

$$Y_c(k) = \sum_{m=0}^{L-1} h(m)W_L^{km} \sum_{j=-m}^{L-1-m} x((j))_L W_L^{kj}$$

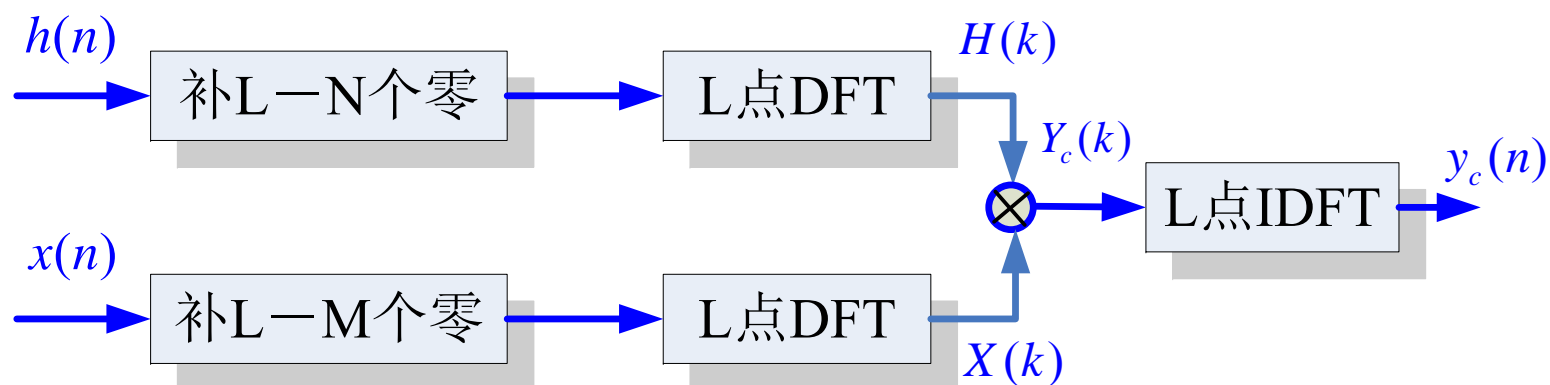
$x((j))_L W_L^{kj}$ 以L为周期，对其在任何一个周期上求和均相等

$$\begin{aligned} \therefore Y_c(k) &= \sum_{m=0}^{L-1} h(m)W_L^{km} \sum_{j=0}^{L-1} x((j))_L W_L^{kj} \\ &= H(k)X(k), \quad 0 \leq k \leq L-1 \end{aligned}$$

DFT: 时域循环卷积 \longrightarrow 频域乘积

快速卷积法

- 利用DFT计算两个有限长序列L点循环卷积的运算框图



DFT的频域循环卷积定理

- 序列 $h(n), x(n)$ 的长度分别为 **N** 和 **M**

$$y_m(n) = h(n)x(n), \quad H(k) = DFT[h(n)]_L, \quad X(k) = DFT[x(n)]_L,$$

- 则 $Y_m(k) = DFT[y_m(n)]_L = \frac{1}{L} H(k) \textcircled{L} X(k)$

- 证明:

$$\begin{aligned} Y_m(k) &= DFT[y_m(n)] = \sum_{n=0}^{L-1} h(n)x(n)W_L^{kn} \\ &= \sum_{n=0}^{L-1} \left[\frac{1}{L} \sum_{m=0}^{L-1} H(m)W_L^{-mn} \right] x(n)W_L^{kn} \\ &= \frac{1}{L} \sum_{m=0}^{L-1} H(m) \sum_{n=0}^{L-1} W_L^{-mn} x(n)W_L^{kn} = \frac{1}{L} \sum_{m=0}^{L-1} H(m) \sum_{n=0}^{L-1} x(n)W_L^{(k-m)n} \\ &= \frac{1}{L} \sum_{m=0}^{L-1} H(m) X((k-m))_L R_L(k) = \frac{1}{L} H(k) \textcircled{L} X(k) \end{aligned}$$

7. 离散巴塞伐尔定理 (1)

- 序列 $x(n)$ 的长度为 N
- **DFT** $X(k) = DFT[x(n)]_N$
- 则

$$\sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X(k)|^2$$

7. 离散巴塞伐尔定理 (2)

■ 证明

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2 &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n)x^*(n) = \sum_{n=0}^{N-1} \left[\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)W_N^{-kn} \right] x^*(n) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \sum_{n=0}^{N-1} x^*(n)W_N^{-kn} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \left[\sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{kn} \right]^* \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)X^*(k) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X(k)|^2\end{aligned}$$

- 序列在时域计算的能量等于其在频域计算的能量

3.3 频域采样

3.3.1 频域采样定理

- 回顾：时域采样

时域采样定理：对带限信号，采样频率大于等于奈奎斯特采样频率，可以由离散信号恢复原来的连续信号

- 问题：频域采样

频域抽样定理？

抽样条件？

内插公式？

- 思路：

- 任意信号频域采样 → 分析无失真恢复条件

- 任意序列 $x(n)$ ，其Z变换为

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

- 若Z变换 $X(z)$ 的收敛域包含单位圆，即序列绝对可和，在单位圆上对 $X(z)$ 等间隔采样得到

$$\tilde{X}_N(k) = X(z) \Big|_{z=e^{j\frac{2\pi}{N}k}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

- $\tilde{X}_N(k)$ 是以 N 为周期的周期序列，其对应的时域周期序列为

$$\tilde{x}_N(n) = IDFS \left[\tilde{X}_N(k) \right] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}_N(k) e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$

$$\tilde{x}_N(n) \Rightarrow x(n) \quad ?$$

$$\begin{aligned}\tilde{x}_N(n) &= IDFS[\tilde{X}_N(k)] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}_N(k) e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) e^{-j\frac{2\pi}{N}km} \right] e^{j\frac{2\pi}{N}kn} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}k(n-m)}\end{aligned}$$

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}k(n-m)} = \begin{cases} 1, & m = n + iN, i \text{ 为整数} \\ 0, & m \text{ 为其它值} \end{cases}$$

$$\tilde{x}_N(n) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x(n + iN)$$

- $\tilde{x}_N(n)$ 是 $\mathbf{x(n)}$ 的周期延拓序列，延拓周期为 \mathbf{N}
- 频域采样 \rightarrow 时域周期延拓

- 
- 截取 $\tilde{x}_N(n)$ 和 $\tilde{X}_N(k)$ 的主值区间序列

$$X_N(k) = \tilde{X}_N(k)R_N(k) = X(z)\Big|_{z=e^{j\frac{\pi}{N}k}}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

$$x_N(n) = \tilde{x}_N(n)R_N(n) = x(n)$$

则 $x_N(n)$ 和 $X_N(k)$ 构成一对**DFT**

$x_N(n) \Rightarrow x(n)$?

- 由 $\tilde{x}_N(n)$ 恢复出 **$x(n)$** 的条件:
 - **$x(n)$** 序列长度有限
 - **N** 大于 **$x(n)$** 序列长度

频域采样定理

总结:

- 原若序列 $\mathbf{x}(n)$ 长度为 M ，其傅里叶变换为 $X(e^{j\omega})$
- 对 $X(e^{j\omega})$ 在频率区间 $[0, 2\pi]$ 等间隔采样得到 $X_N(k)$
- 只有当频域采样点数 $N \geq M$

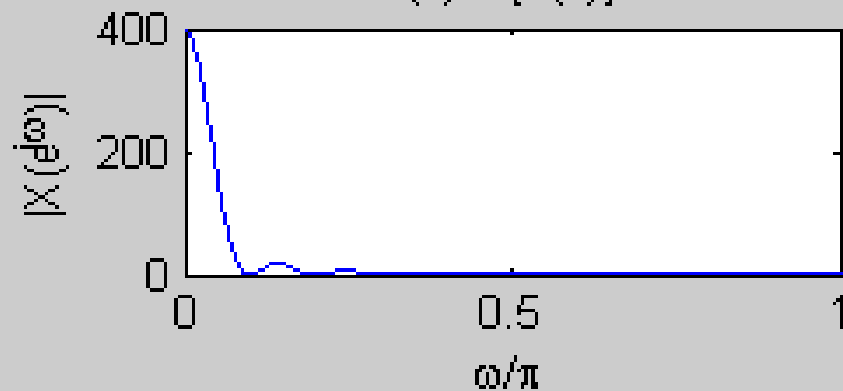
■ 有

$$\tilde{x}_N(n)R_N(n) = IDFS[\tilde{X}(k)]R_N(n) = x(n)$$

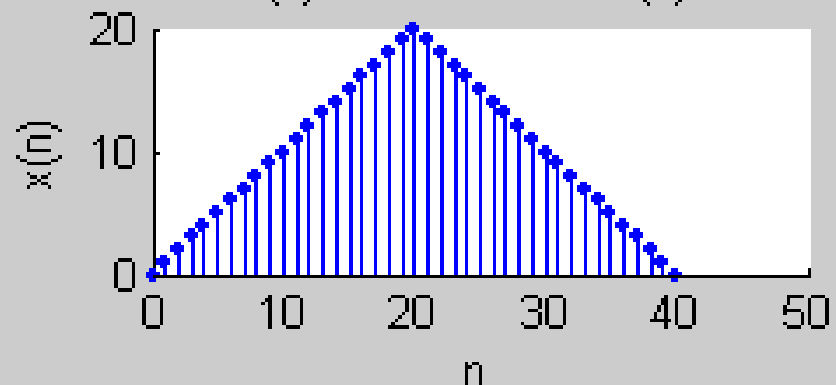
$$\text{或: } x(n) = IDFT[X_N(k)]_N$$

- 即可由频域采样 $X_N(k)$ 不失真地恢复原信号，否则产生时域混叠现象。
- 当时域序列 $\mathbf{x}(n)$ 有限长，以大于等于序列长度的采样间隔对其频谱函数进行采样，不会丢失信息。

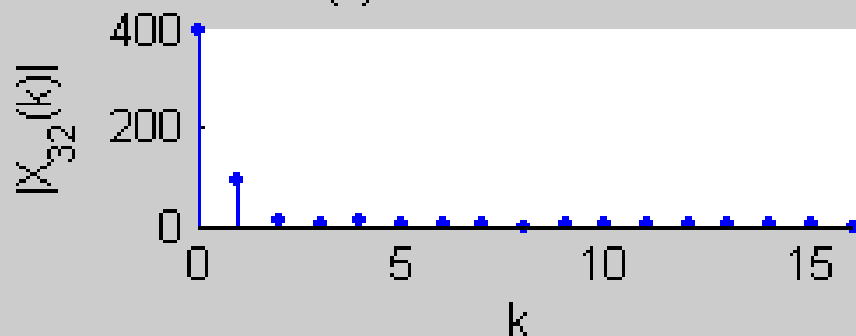
(a) FT[x(n)]



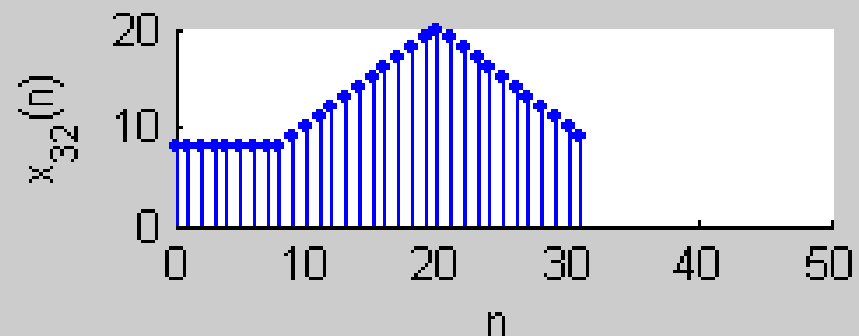
(b) 三角波序列 x(n)



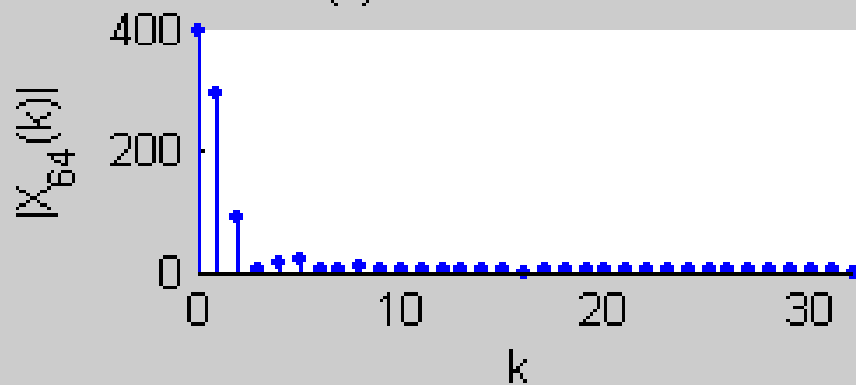
(c) 32点频域采样



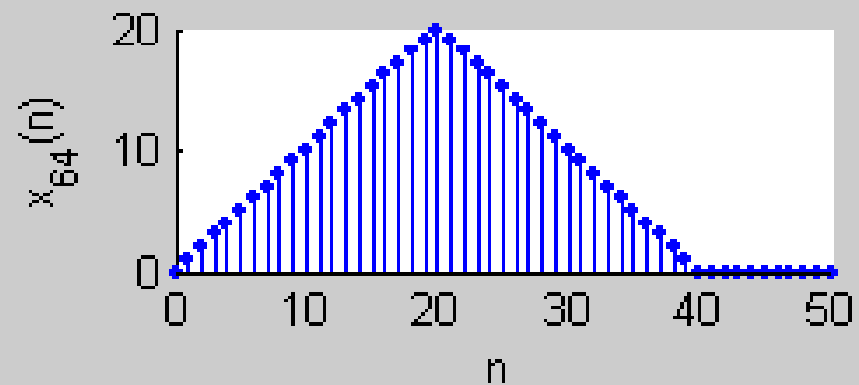
(d) 32点 IDFT[X_{32}(k)]



(e) 64点频域采样



(f) 64点 IDFT[X_{64}(k)]



3.3.2 频域内插公式

Q: 用频域采样 $X(k)$ 表示 $X(z)$ 和 $X(e^{j\omega})$ 的内插公式?

离散频谱 \rightarrow 连续频谱?

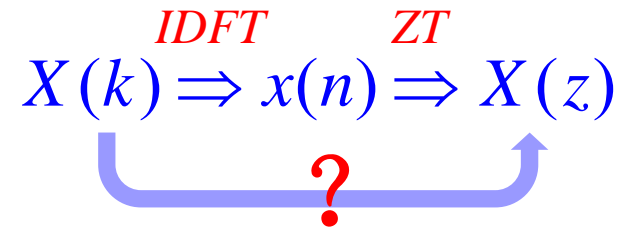
- 序列 $x(n)$ 长度为 M ，其 Z 变换为

$$X(z) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{M-1} x(n)z^{-n}$$

- 其中 $N \geq M$ ，满足频域采样定理
- 在 Z 平面的单位圆上，对 $X(z)$ 进行采样，采样点数为 N

$$X(k) = X(z) \Big|_{z=e^{j\frac{2\pi}{N}k}} \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

问题：如何由 $X(k)$ 恢复 $X(z)$?



$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1} \left[\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-nk} \right] z^{-n} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \left[\sum_{n=0}^{N-1} W_N^{-nk} z^{-n} \right] \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \sum_{n=0}^{N-1} \left(W_N^{-k} z^{-1} \right)^n \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \frac{1 - W_N^{-Nk} z^{-N}}{1 - W_N^{-k} z^{-1}} \end{aligned}$$

内插公式

$$X(z) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \frac{1 - W_N^{-Nk} z^{-N}}{1 - W_N^{-k} z^{-1}} \quad (W_N^{-Nk} = 1)$$

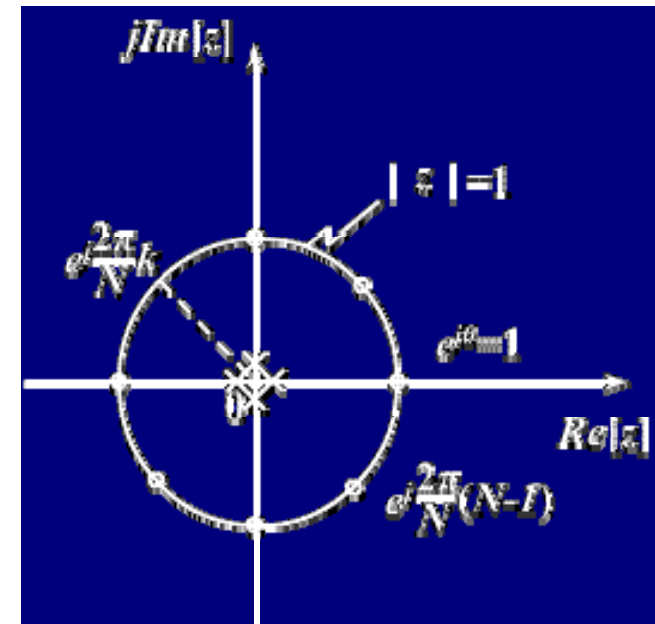
$$= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \frac{1 - z^{-N}}{1 - W_N^{-k} z^{-1}} = \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \varphi_k(z) \quad \text{Z域内插公式}$$

Z域内插函数

$$\varphi_k(z) = \frac{1}{N} \frac{z^N - 1}{z^{N-1} (z - W_N^{-k})}$$

零点: $z = e^{j\frac{2\pi}{N}r}, r = 0, 1, \dots, N-1$

极点: $z = e^{j\frac{2\pi}{N}k}, 0$ ($N-1$ 阶)



$$z = e^{j\omega}$$

$$X(z) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \frac{1 - z^{-N}}{1 - W_N^{-k} z^{-1}}$$

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \frac{1 - e^{-j\omega N}}{1 - e^{j\frac{2\pi}{N}k} e^{-j\omega}} = \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \varphi_k(\omega)$$

$$\varphi_k(\omega) = \frac{1}{N} \frac{e^{-j(\omega N - 2k\pi)/2} (e^{j(\omega N - 2k\pi)/2} - e^{-j(\omega N - 2k\pi)/2})}{e^{-j(\omega - \frac{2\pi}{N}k)/2} (e^{j(\omega - \frac{2\pi}{N}k)/2} - e^{-j(\omega - \frac{2\pi}{N}k)/2})}$$

$$= \frac{1}{N} \frac{\sin \left[N(\omega - \frac{2\pi}{N}k) / 2 \right]}{\sin \left[(\omega - \frac{2\pi}{N}k) / 2 \right]} e^{-j(\omega - \frac{2\pi}{N}k)(N-1)/2}$$

$$\text{令 } \varphi(\omega) = \frac{1}{N} \frac{\sin \frac{\omega N}{2}}{\sin \frac{\omega}{2}} e^{-j\omega(N-1)/2}$$

$$\therefore \varphi_k(\omega) = \varphi(\omega - \frac{2\pi}{N}k)$$

- 用 $X(k)$ 表示 $X(e^{j\omega})$ 的内插公式和内插函数

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \varphi\left(\omega - \frac{2\pi}{N}k\right)$$

$$\varphi(\omega) = \frac{1}{N} \frac{\sin \frac{\omega N}{2}}{\sin \frac{\omega}{2}} e^{-j\omega(N-1)/2}$$

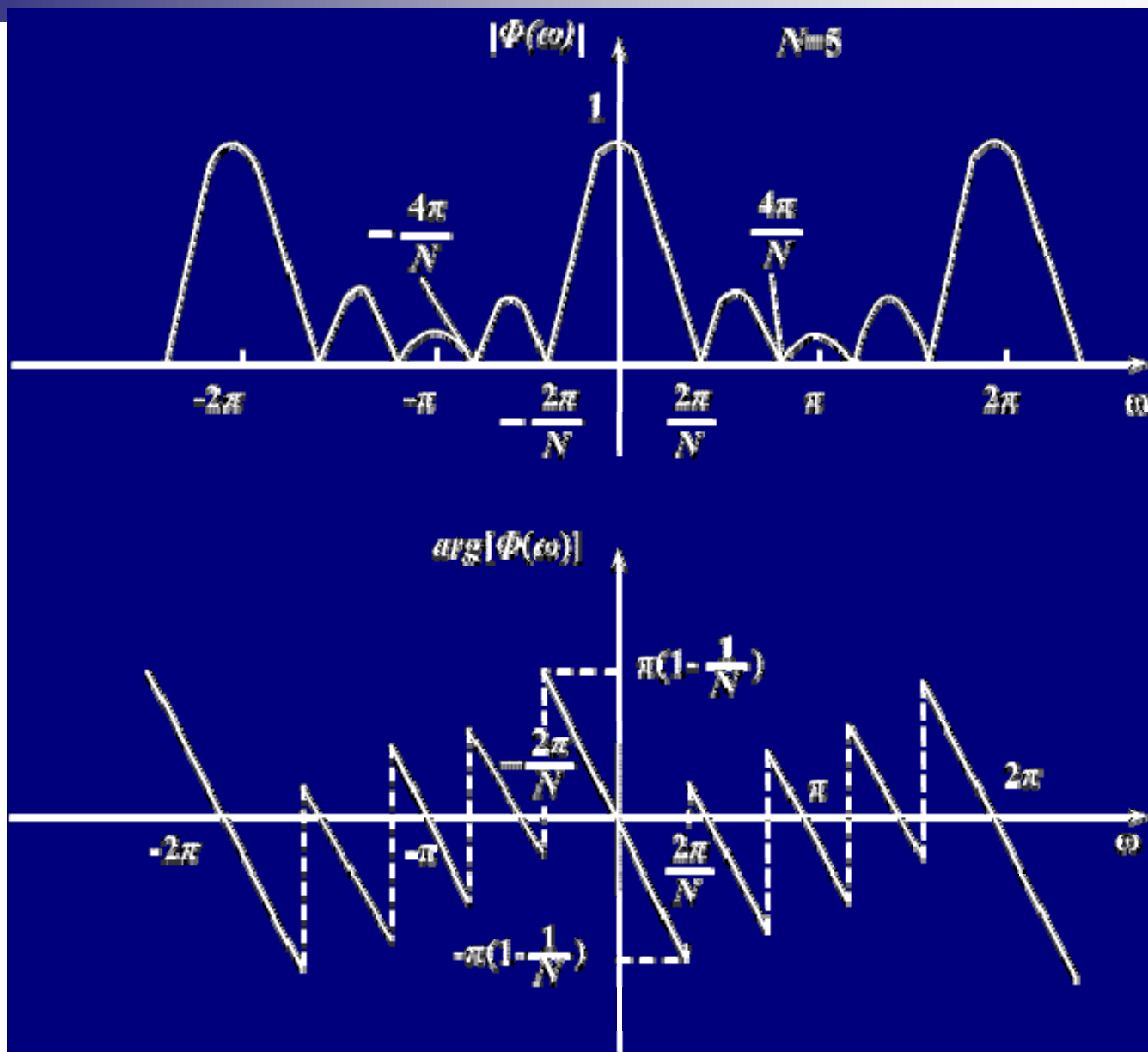
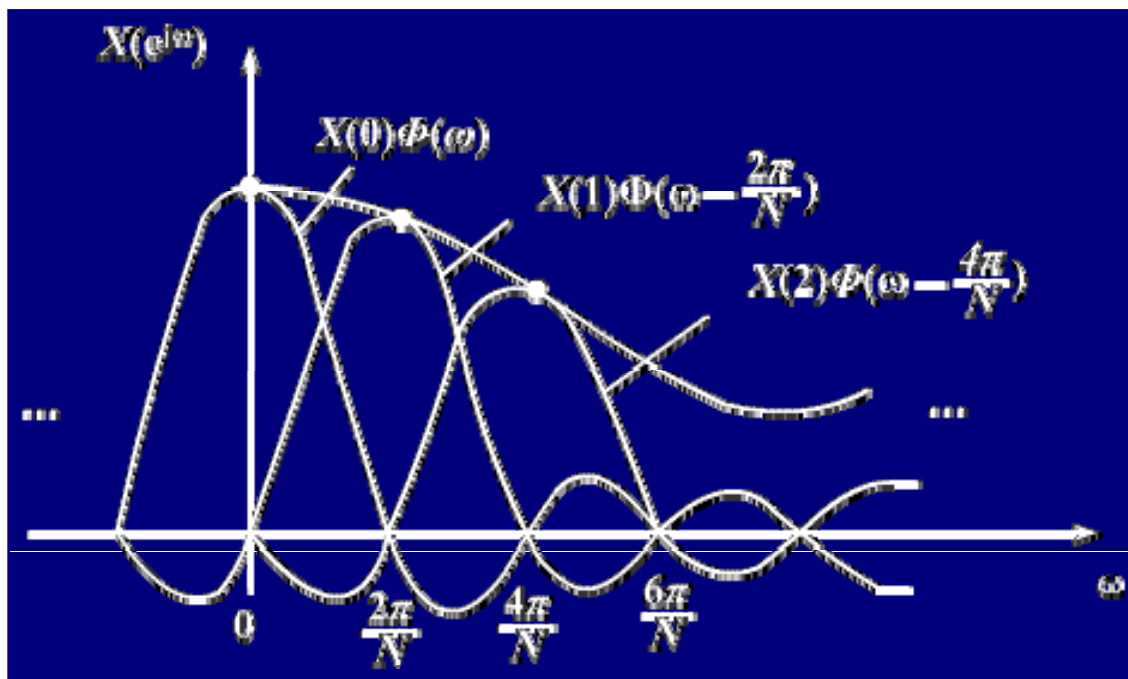


图3-13 插值函数 $\Phi(\omega)$ 的幅度特性与相位特性 ($N=5$)

内插公式:
$$X(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k)\varphi(\omega - \frac{2\pi}{N}k)$$

$$\varphi(\omega - \frac{2\pi}{N}k) = \begin{cases} 1 & \omega = \frac{2\pi}{N}k = \omega_k \\ 0 & \omega = \frac{2\pi}{N}i = \omega_i \quad i \neq k \end{cases}$$

- 保证了各采样点上的值与原序列的频谱相同;
- 采样点之间, 为采样值与对应点的内插公式相乘, 并叠加而成。



小结

- 频域采样定理

$$X(e^{j\omega}) \longrightarrow X(k)$$

□ 采样条件 \rightarrow 以保证恢复原序列 $\mathbf{x}(n)$

- 频域的内插公式

$$X(k) \longrightarrow X(e^{j\omega})$$

3.4 DFT的快速算法——

快速傅里叶变换 (FFT)

3.4.1问题的提出

4点序列{2, 3, 3, 2} DFT的计算复杂度

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{kn}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

$$X(0) = 2W_N^0 + 3W_N^0 + 3W_N^0 + 2W_N^0 = 10$$

$$X(1) = 2W_N^0 + 3W_N^1 + 3W_N^2 + 2W_N^3 = -1 - j$$

$$X(2) = 2W_N^0 + 3W_N^2 + 3W_N^4 + 2W_N^6 = 0$$

$$X(3) = 2W_N^0 + 3W_N^3 + 3W_N^6 + 2W_N^9 = -1 + j$$

复数加法 $N(N-1)$

复数乘法 N^2

1048576 (N=1024)

如何提高DFT的运算效率?



解决问题的思路

1. 将长序列DFT分解为短序列的DFT
2. 利用旋转因子 W_N^m 的周期性、对称性。
减少重复运算

旋转因子 W_N^m 的性质

$$W_N^m = e^{-j\frac{2\pi}{N}m}$$

1) 周期性

$$W_N^{m+lN} = e^{-j\frac{2\pi}{N}(m+lN)} = e^{-j\frac{2\pi}{N}m} = W_N^m$$

2) 对称性

$$\left(W_N^{N-m}\right)^* = W_N^m$$

$$W_N^{m+\frac{N}{2}} = -W_N^m$$

3) 可约性

$$W_N^m = W_{N/n}^{m/n}, \quad N/n, m/n \text{ 为整数}$$

如何巧妙地利用周期性和对称性

3.4.2 基2FFT算法

J.W.Cooley & J.W.Tukey (1965)

$$N^2 \rightarrow N/2 \cdot \log_2 N$$

$$1048576 \rightarrow 5120 \text{ (204.8倍, } N=1024)$$

$N=2^M$, M 为自然数

将时域序列逐次分解为一组子序列，利用旋转因子的特性，由子序列的DFT来实现整个序列的DFT。

□ 基2时间抽取(Decimation in time)DIT-FFT算法

$$x(n) \rightarrow \begin{cases} x(2r) \\ x(2r+1) \end{cases} \quad r = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1$$

□ 基2频率抽取(Decimation in frequency)DIF-FFT算法

$$X(k) \rightarrow \begin{cases} X(2m) \\ X(2m+1) \end{cases} \quad m = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1$$

DIT-FFT算法

- 序列 $x(n)$ 的 N 点DFT为 $X(k) = DFT[x(n)]_N = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{kn}$

- 奇偶分解

$$\begin{aligned} X(k) &= \sum_{n \text{ 为偶数}} x(n)W_N^{kn} + \sum_{n \text{ 为奇数}} x(n)W_N^{kn} \\ &= \sum_{l=0}^{N/2-1} x(2l)W_N^{k2l} + \sum_{l=0}^{N/2-1} x(2l+1)W_N^{k(2l+1)} \end{aligned}$$

$$x_1(l) = x(2l), x_2(l) = x(2l+1), W_N^{2kl} = W_{N/2}^{kl} \quad N \text{ 为 } 2 \text{ 的整数倍}$$

$$X(k) = \sum_{l=0}^{N/2-1} x_1(l)W_{N/2}^{kl} + W_N^k \sum_{l=0}^{N/2-1} x_2(l)W_{N/2}^{kl}$$

$$X(k) = \sum_{l=0}^{N/2-1} x_1(l)W_{N/2}^{kl} + W_N^k \sum_{l=0}^{N/2-1} x_2(l)W_{N/2}^{kl}$$

- 分解为2个DFT

$$X_1(k) = \sum_{l=0}^{N/2-1} x_1(l)W_{N/2}^{kl}, \quad X_2(k) = \sum_{l=0}^{N/2-1} x_2(l)W_{N/2}^{kl}$$

$$k = 0, 1, 2, \dots, N/2 - 1$$

- 均以N/2为周期

- 利用 $W_N^{m+\frac{N}{2}} = -W_N^m$ 及DFT的隐含周期性, 得

$$X(k) = X_1(k) + W_N^k X_2(k) \quad k = 0, 1, 2, \dots, \frac{N}{2} - 1$$

$$X(k + \frac{N}{2}) = X_1(k + \frac{N}{2}) + W_N^{k+\frac{N}{2}} X_2(k + \frac{N}{2}) = X_1(k) - W_N^k X_2(k)$$

$$\left. \begin{aligned} X(k) &= X_1(k) + W_N^k X_2(k) \\ X\left(k + \frac{N}{2}\right) &= X_1(k) - W_N^k X_2(k) \end{aligned} \right\} k = 0, 1, 2, \dots, \frac{N}{2} - 1$$

$$X_1(k) = \sum_{l=0}^{N/2-1} x_1(l) W_{N/2}^{kl}, \quad X_2(k) = \sum_{l=0}^{N/2-1} x_2(l) W_{N/2}^{kl}$$

■ 运算量:

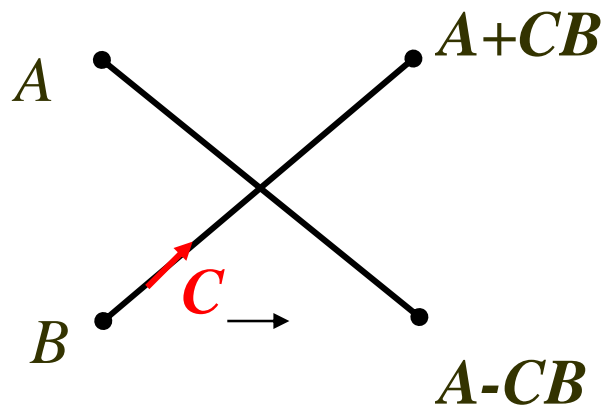
复数乘 $\frac{N}{2} \times \frac{N}{2} \times 2 + \frac{N}{2} = \frac{N}{2}(N+1) \approx \frac{N^2}{2} \quad N \gg 1$

复数加 $\frac{N}{2} \times \left(\frac{N}{2} - 1\right) \times 2 + \frac{N}{2} \times 2 = \frac{N^2}{2}$

运算量下降一半!

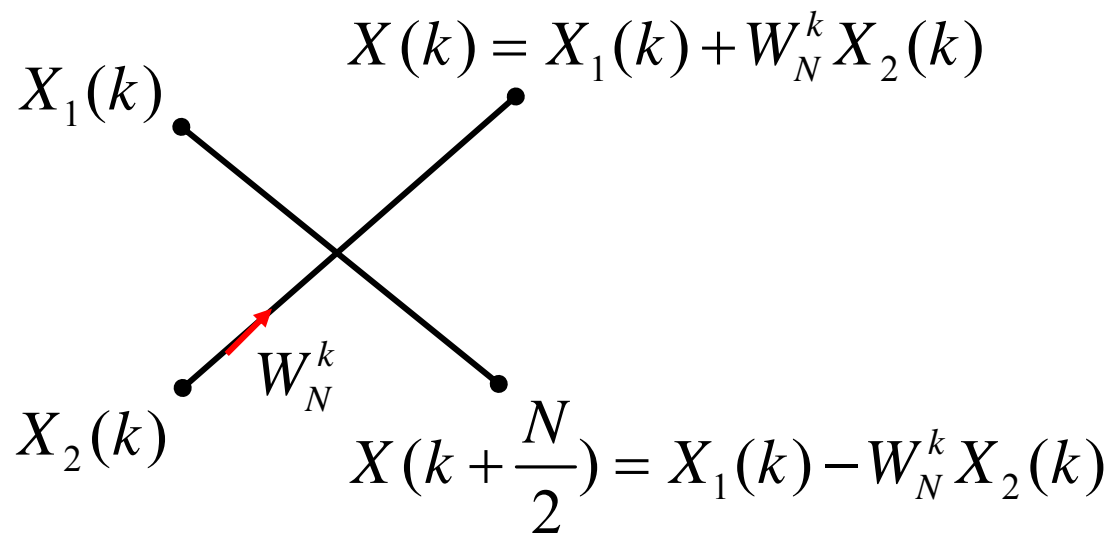
蝶形图及运算功能

$$\left. \begin{aligned} X(k) &= X_1(k) + W_N^k X_2(k) \\ X(k + \frac{N}{2}) &= X_1(k) - W_N^k X_2(k) \end{aligned} \right\} k = 0, 1, 2, \dots, \frac{N}{2} - 1$$



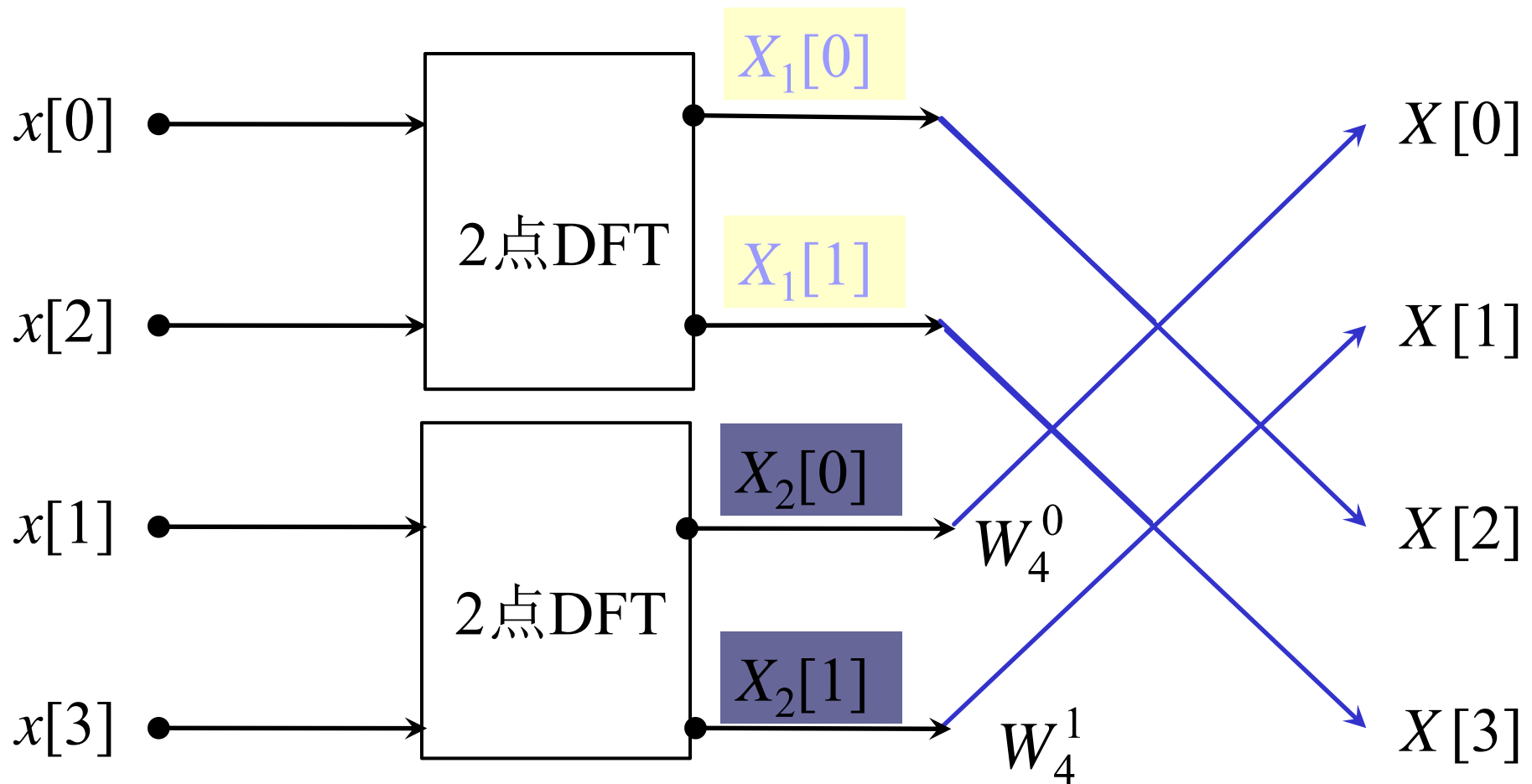
1次乘法

2次加法

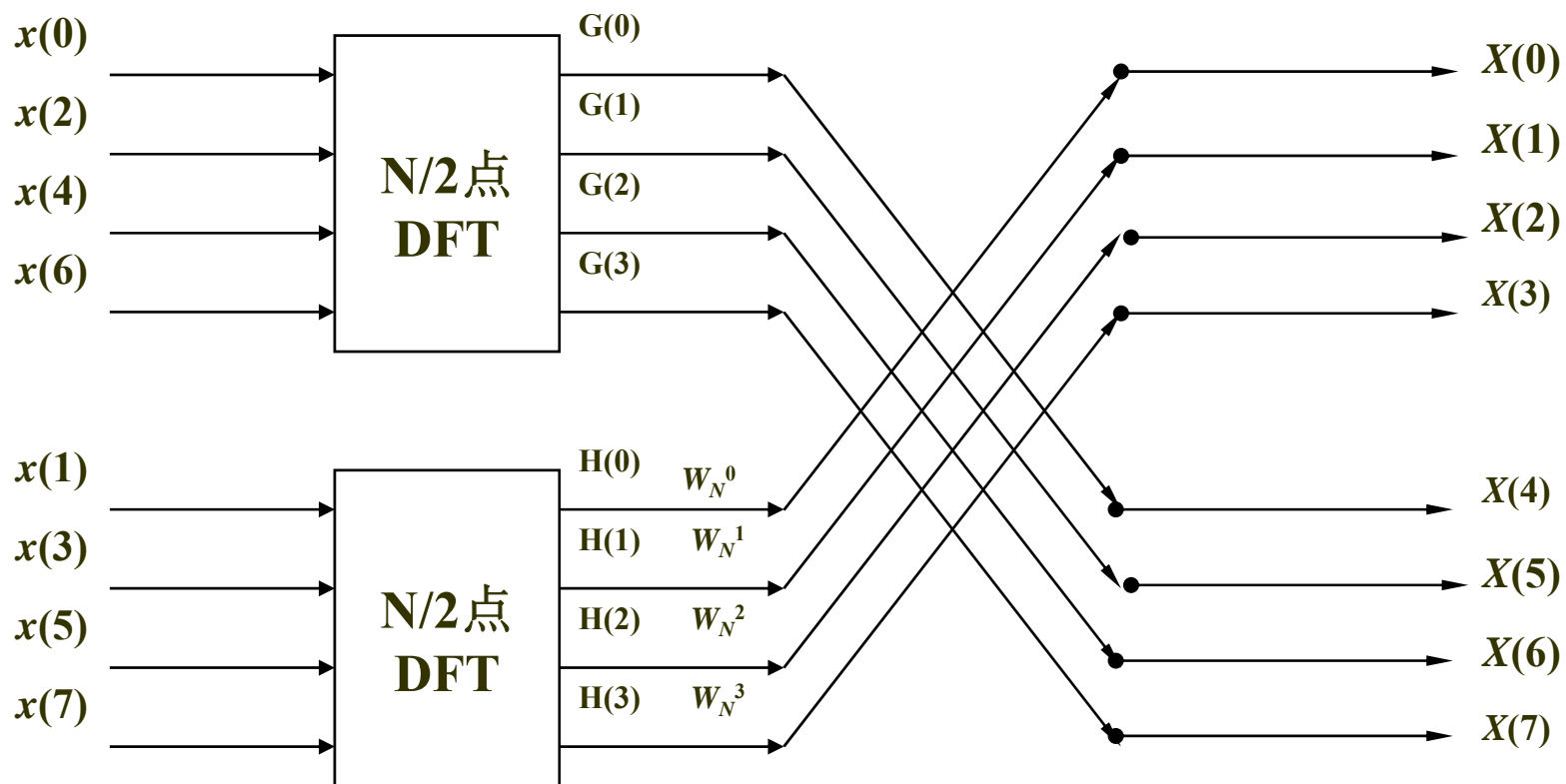


$$X(k) = X_1(k) + W_4^k X_2(k), \quad k = 0, 1$$

$$X(k+2) = X_1(k) - W_4^k X_2(k), \quad k = 0, 1$$

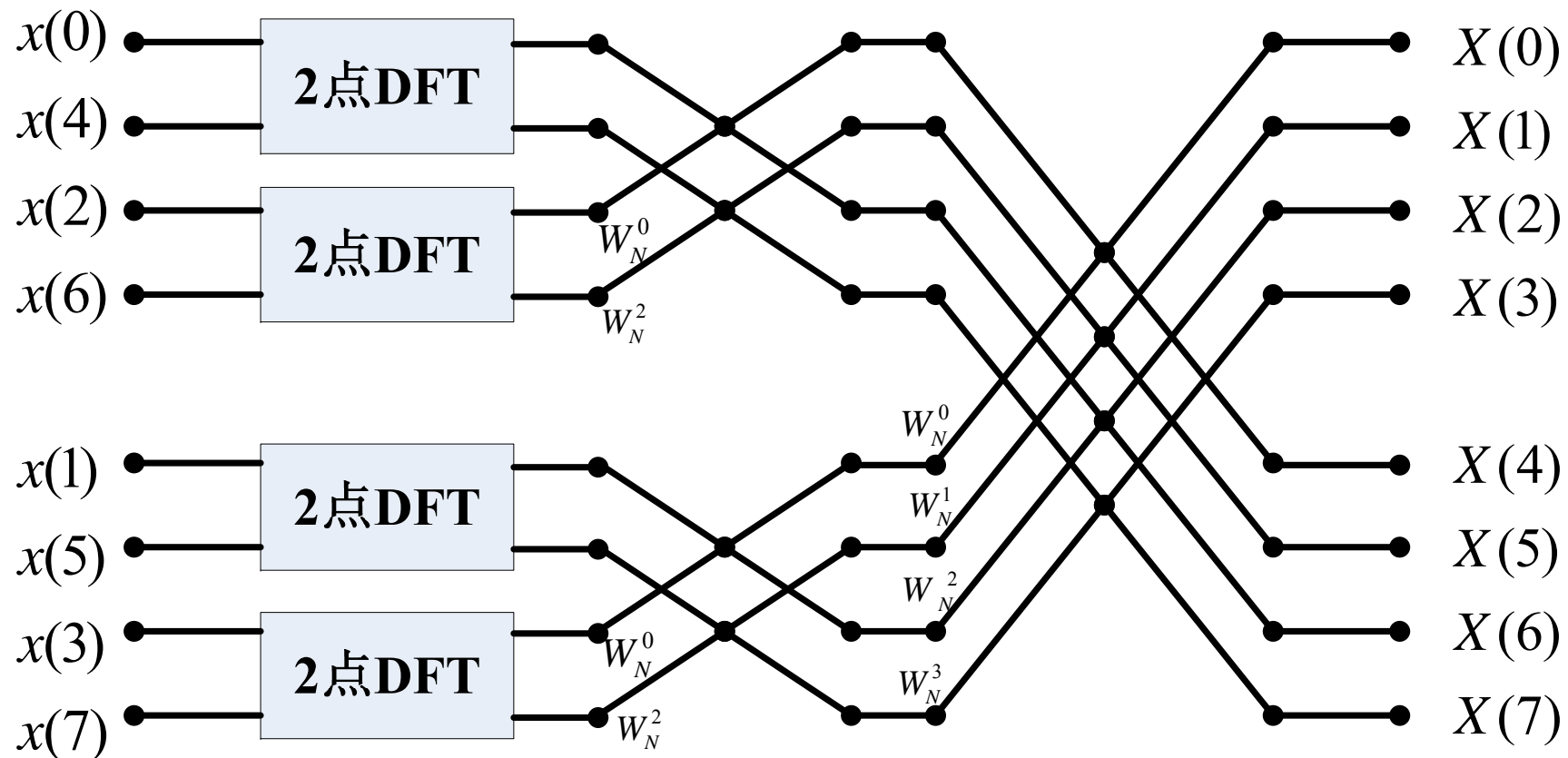


8点DFT一次时域抽取分解运算流图



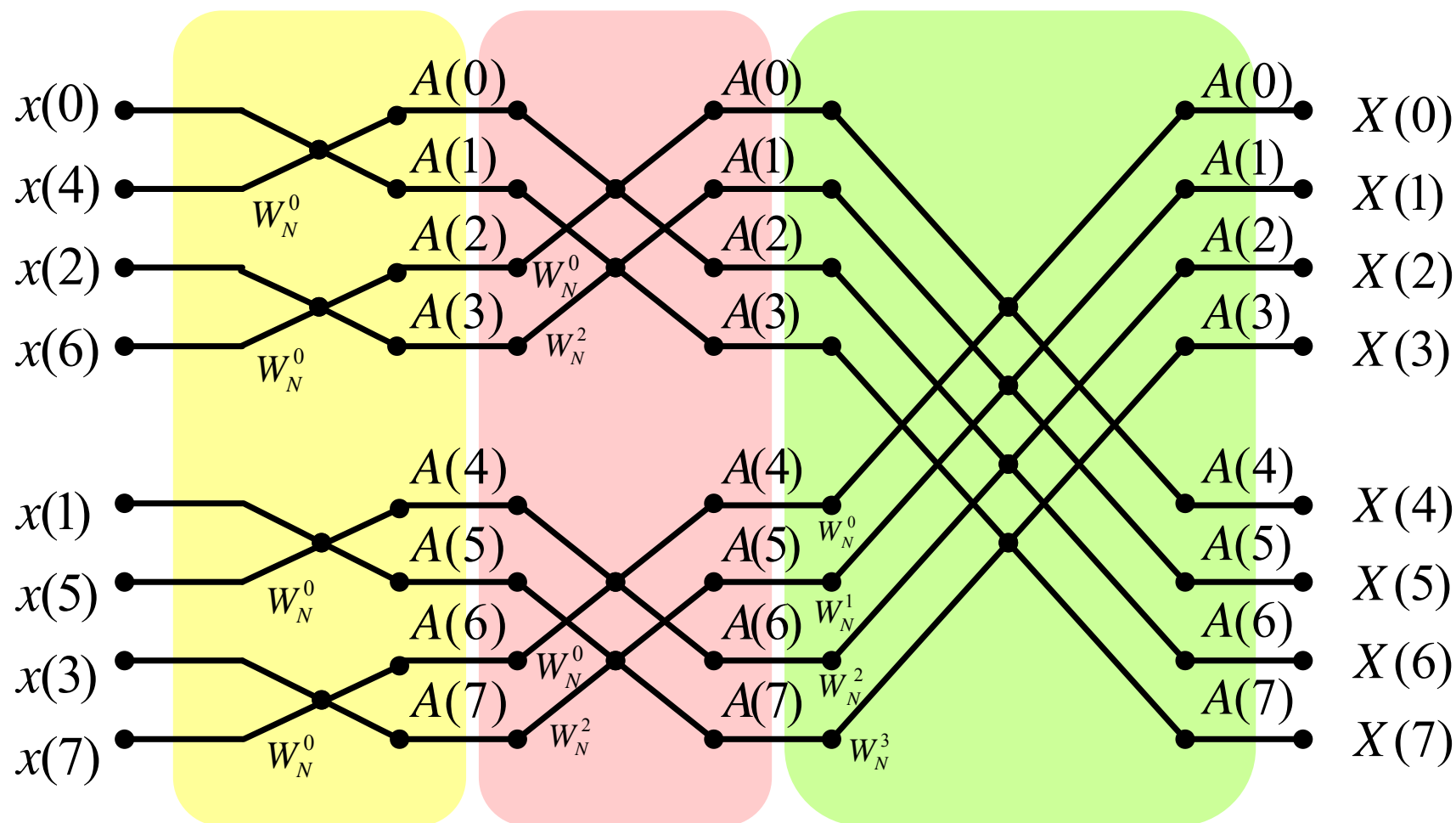
两个4点DFT组成8点DFT

8点DFT两次时域抽取分解运算流图



由四个2点DFT组成8点DFT

8点DIT-FFT运算流图 (N=8, M=3)



经过**M级**时域奇偶抽取，可分解为**N个1点DFT**（即时域序列本身）和**M级蝶形运算**，每一级有**N/2个蝶形**。

2. DIT-FFT的运算效率

- $N=2^M$ 的序列，通过M级分解最后成为1点的DFT运算，构成M级运算过程。
- 每一级运算都由N/2个蝶形运算构成。每一级运算含N/2次复乘和N次复加。
- 总运算量：

□ 复乘 $\frac{N}{2} \bullet M = \frac{N}{2} \log_2 N \longleftarrow N^2$

□ 复加 $N \bullet M = N \log_2 N \longleftarrow N(N-1)$

运算效率

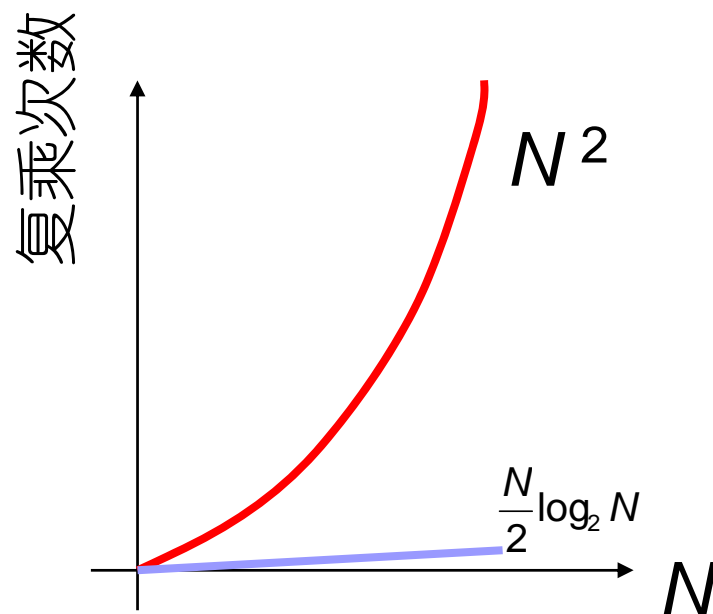
$$\frac{DFT\text{的乘法次数}}{DIT-FFT\text{的乘法次数}} = \frac{N^2}{C_M(2)} = \frac{N^2}{\frac{N}{2} \log_2 N} = \frac{2N}{M}$$

$$N = 2^{10} = 1024$$

- 运算效率为**204.8**

$$N = 2^{11} = 2048$$

- 运算效率为**372.37**

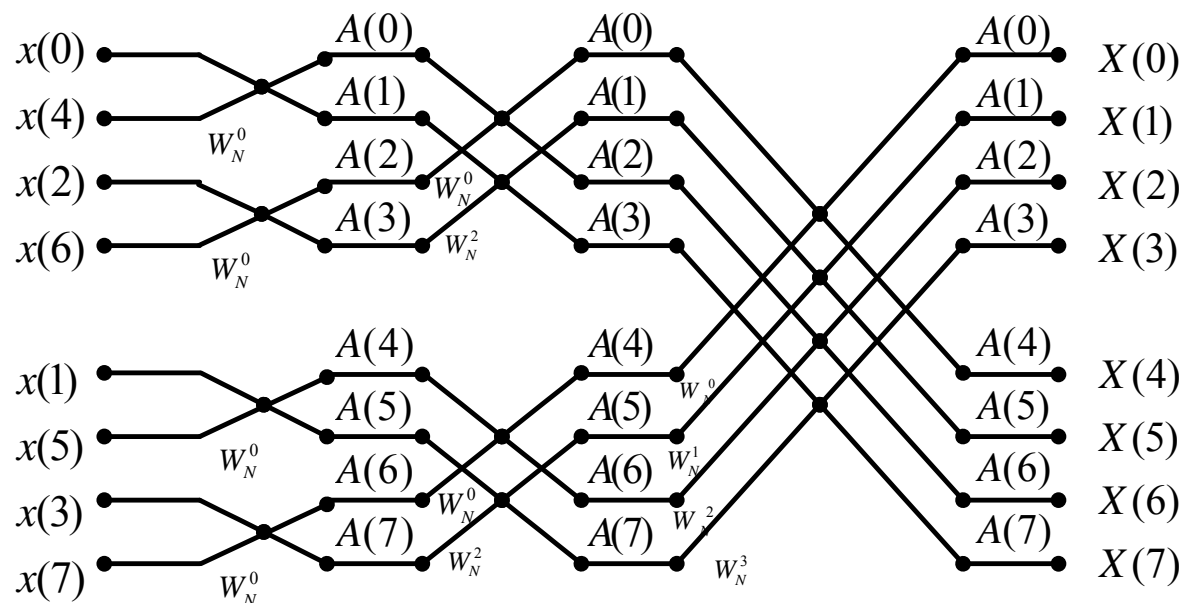


3. DIT-FFT运算规律及编程思想

1) 原位计算

- 观察每个蝶形的两个输入和两个输出
- 蝶形的输出可存入原输入数据所占存储单元
- 利用同一组存储单元存储输入、输出数据的方法，称为 原位（址）计算

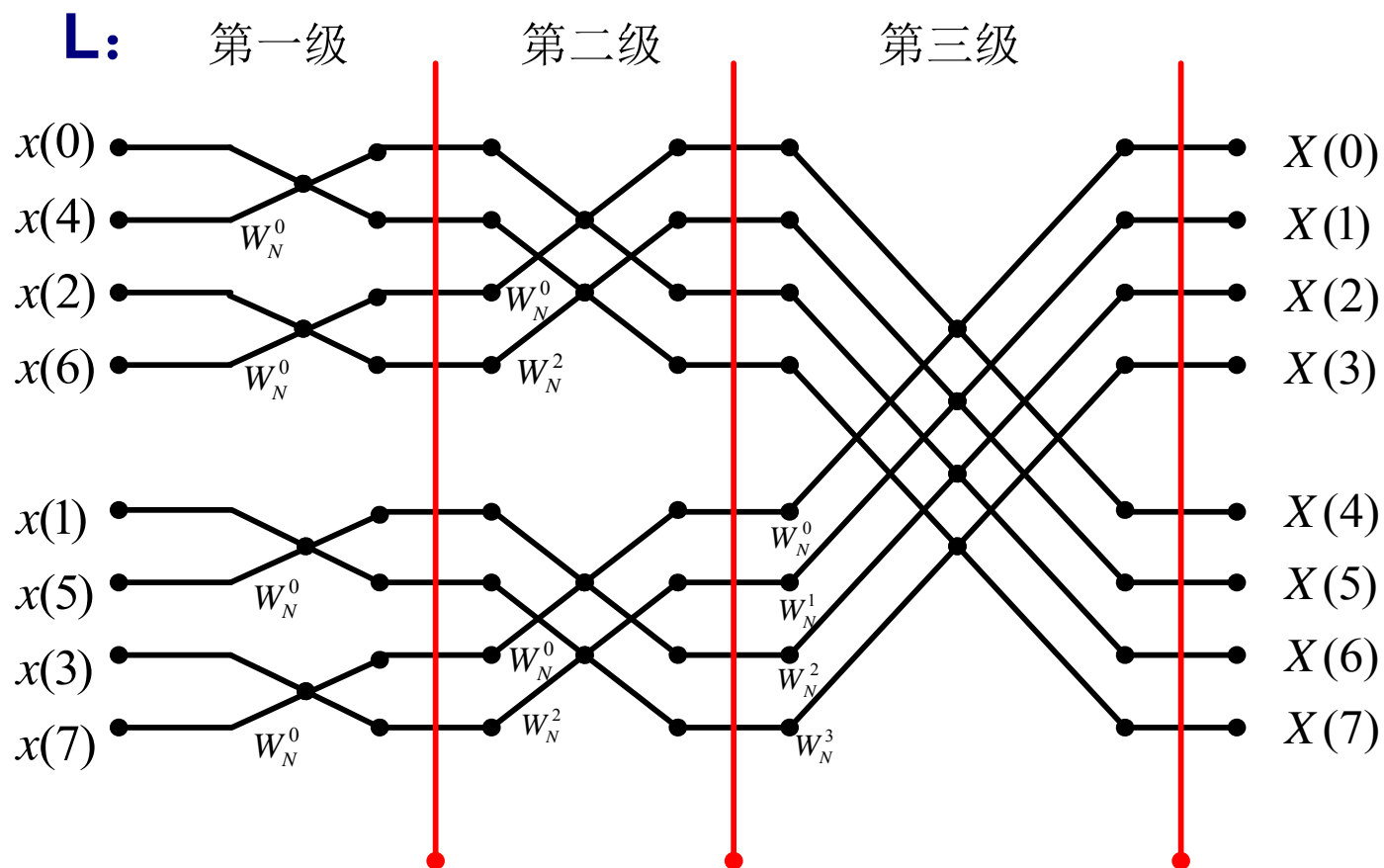
- 节约内存
- 节省寻址的时间
- 降低成本



2) 旋转因子的变化规律

- 旋转因子 W_N^p --- 旋转因子指数 p

W_N^p 与运算级数 L 的关系

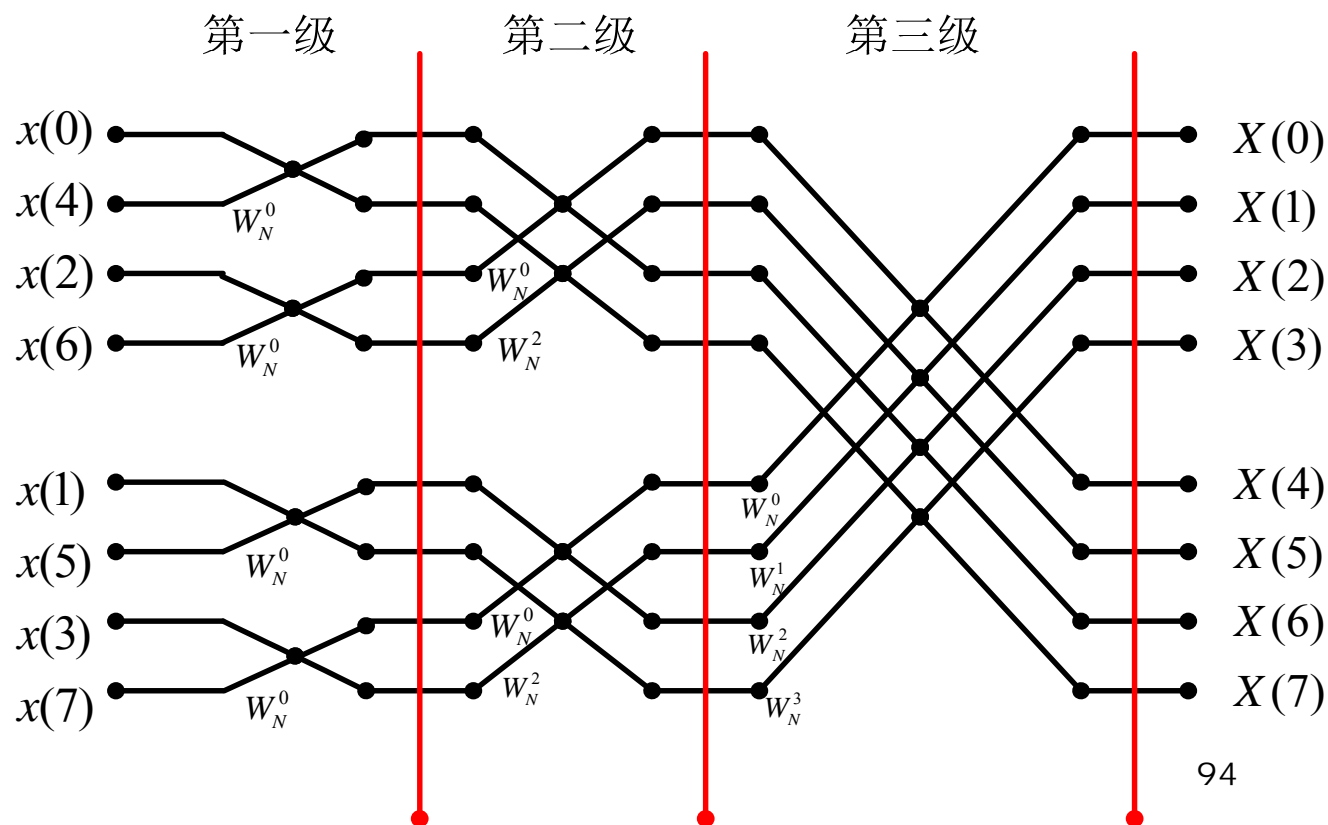


2) 旋转因子的变化规律 (2)

$L = 3$ 时, $W_N^p = W_N^J = W_{2^L}^J, J = 0, 1, 2, 3$

$L = 2$ 时, $W_N^p = W_N^{2J} = W_{N/2}^J = W_{2^L}^J, J = 0, 1$

$L = 1$ 时, $W_N^p = W_N^{4J} = W_{N/4}^J = W_{2^L}^J, J = 0$



一般情况

$N = 2^M$, 第L级的旋转因子为

$$W_N^p = W_{2^L}^J, \quad J = 0, 1, 2, \dots, 2^{L-1} - 1$$

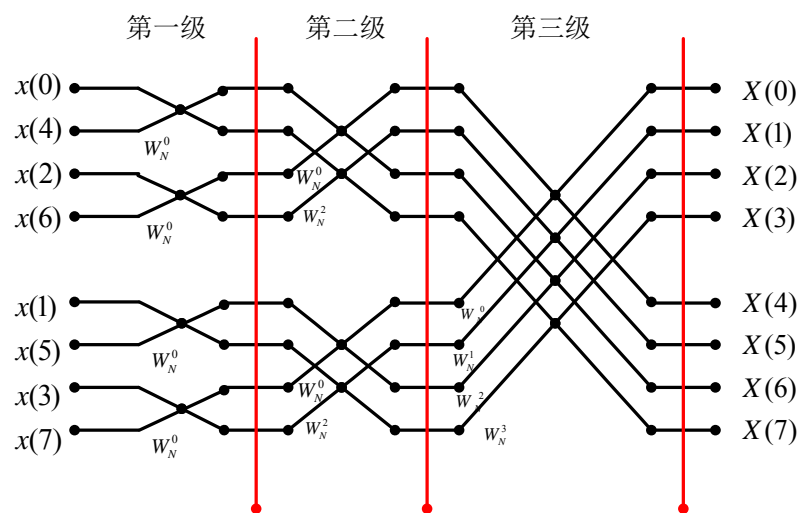
$$\because 2^L = 2^M \times 2^{L-M} = N \cdot 2^{L-M}$$

$$\therefore W_N^p = W_{N \cdot 2^{L-M}}^J = W_N^{J \cdot 2^{M-L}}, \quad J = 0, 1, 2, \dots, 2^{L-1} - 1$$

$$\therefore p = J \cdot 2^{M-L}$$

3) 序列的倒序

- $X(0), X(1), X(2), \dots, X(7)$ 按顺序输出;
- $x(0), x(1), x(2), \dots, x(7)$ 则不按顺序排列;



顺 序		倒 序		
十进制数 I	二进制数			十进制数 J
0	0	0	0	0
1	0	0	1	4
2	0	1	0	2
3	0	1	1	6
4	1	0	0	1
5	1	0	1	5
6	1	1	0	3
7	1	1	1	7

- I与J的关系?

4) 蝶形运算规律

- $x(0), x(1), x(2), \dots, x(N-1)$ 倒序;
- 如蝶形运算的两个输入数据相距 **B** 个点, 应用原位计算, 蝶形运算如下:

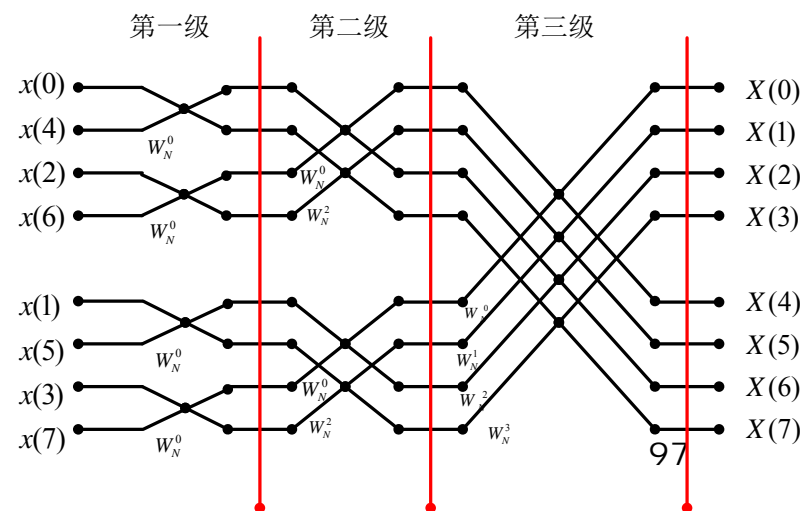
$$A_L(J) \leftarrow A_{L-1}(J) + A_{L-1}(J+B)W_N^p$$

$$A_L(J+B) \leftarrow A_{L-1}(J) - A_{L-1}(J+B)W_N^p$$

$$p = J \times 2^{M-L}; J = 0, 1, 2, \dots, 2^{L-1};$$

$$L = 1, 2, \dots, M$$

5) 程序框图



4. IDFT的高效算法 (1)

- **DFT**
$$X(k) = DFT[x(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{nk}$$

- **IDFT**
$$x(n) = IDFT[X(k)] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)W_N^{-nk}$$

- 差别?

- 旋转因子 W_N^{kn} , W_N^{-kn} 和系数

- 把**DFT**中的每一个系数 W_N^{kn} 改为 W_N^{-kn}

- 再乘以常数 **1/N**

4. IDFT的高效算法（2）

■ 用FFT子程序计算IDFT

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-nk}$$

$$x^*(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X^*(k) W_N^{nk}$$

$$x(n) = \left[\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X^*(k) W_N^{nk} \right]^* = \frac{1}{N} \left\{ DFT[X^*(k)] \right\}^*$$

IFFT计算分三步：

- ① 将**X(k)**取共轭（虚部乘以**-1**）
- ② 对 $X^*(k)$ 直接作**FFT**
- ③ 对**FFT**的结果取共轭并乘以**1/N**，得**x(n)**。

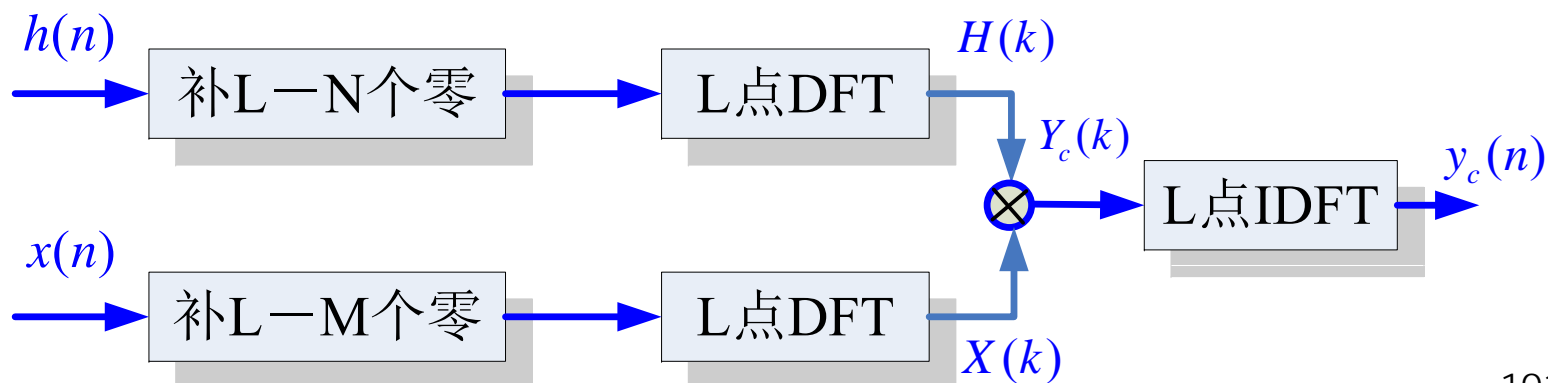
3.5 DFT (FFT) 应用举例

※ 线性卷积

※ 频谱分析

3.5.1用DFT（FFT）计算两个有限长序列的线性卷积

- 求离散系统响应
- 直接计算时间较长
- 间接计算
 - DFT可计算循环卷积
 - FFT可加快运算速度
 - DFT能否计算线性卷积？
 - 如可以，条件？



循环卷积与线性卷积等价的条件

■ 循环卷积

$$y_c(n) = h(n) \textcircled{L} x(n) = \sum_{m=0}^{L-1} h(m)x((n-m))_L R_L(n)$$

$$L \geq \max[N, M]$$

■ 线性卷积

$$y(n) = h(n) * x(n) = \sum_{m=0}^{N-1} h(m)x(n-m)$$

$$x((n-m))_L = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x(n-m+iL)$$

$$y_c(n) = h(n) \circledast x(n) = \sum_{m=0}^{L-1} h(m) x((n-m))_L R_L(n)$$

$$= \sum_{m=0}^{L-1} h(m) \sum_{i=-\infty}^{\infty} x(n-m+iL) R_L(n)$$

$$= \sum_{i=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{m=0}^{L-1} h(m) x(n-m+iL) \right] R_L(n)$$

$$= \sum_{i=-\infty}^{\infty} y(n+iL) R_L(n) \stackrel{?}{=} y(n)$$

$y_c(n)$ 是 $y(n)$ 以 L 为周期的周期延拓序列的主值序列

$$L \geq N + M - 1$$

循环卷积计算线性卷积的运算量

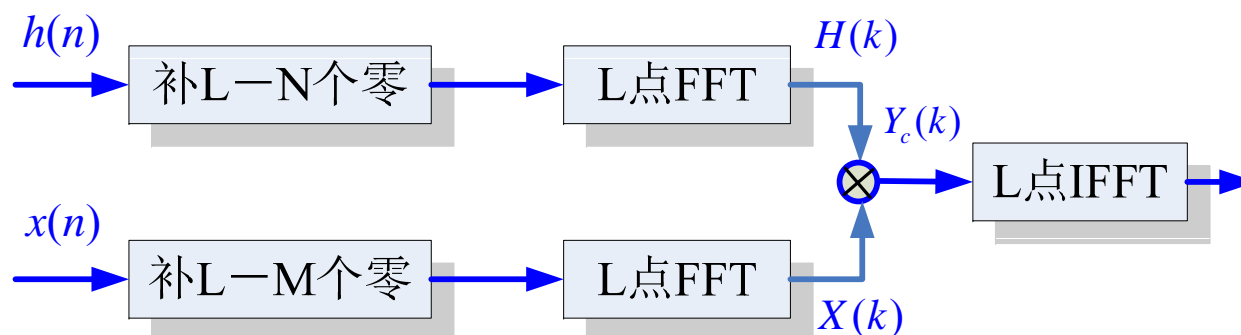
$$N = M \geq 32$$

- 可证明小于直接计算线性卷积的运算量
- $H(k) = DFT[h(n)]$ 可预先计算并存储，乘法的运算次数又可降低

$$0.5L \log_2 L \quad \text{次}$$

- 快速卷积法

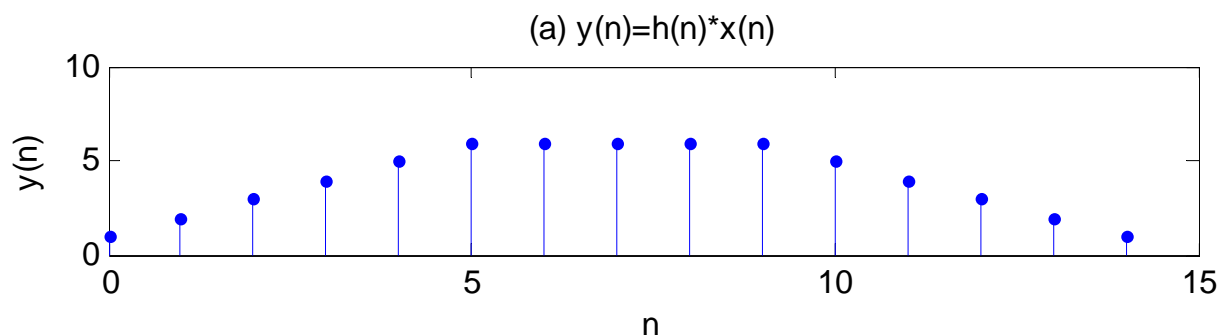
$$L \geq N + M - 1$$



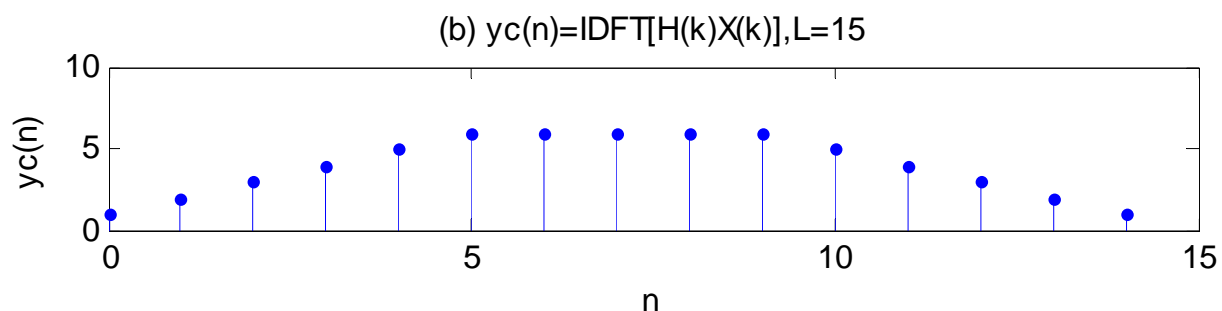
例3.5.1 $x(n) = R_{10}(n), h(n) = R_6(n)$

求: $y(n) = x(n) * h(n)$

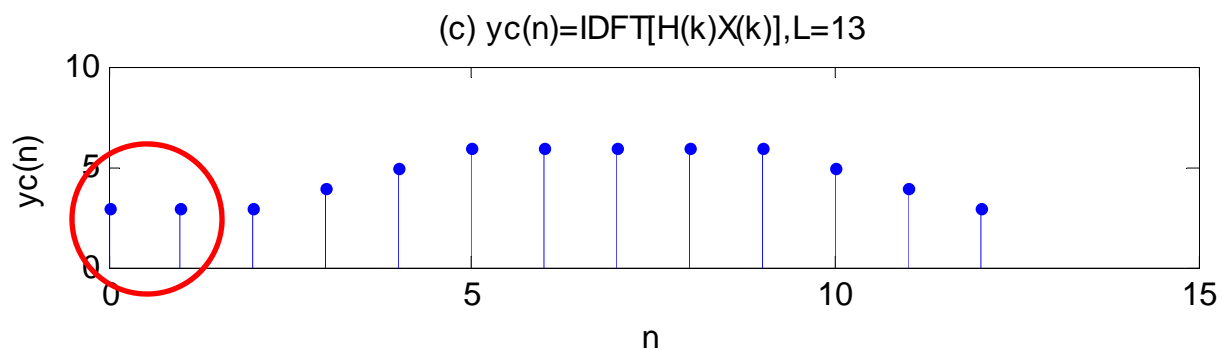
■ 直接计算
conv



■ FFT
L=15



■ FFT
L=13



3.5.2有限长序列和无限长序列的线性卷积

■ 问题:

- $h(n)$ 为某滤波器的单位脉冲响应,长度有限; 但输入信号 $x(n)$ 很长;
- 若存储完 $x(n)$ 再做卷积, 则存储量过大, 并且等待 $x(n)$ 输入的时间过长;
- $h(n)$ 要补许多零再进行计算,计算量有很大的浪费;

■ 解决方法

- 将长序列分成短序列分别卷积, 再将各自的输出按照一定的规律首尾相加即可
- 重叠相加法
- 重叠保留法

1. 重叠相加法

$$x(n) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i(n - iM)$$

- 分段：将 $x(n)$ 分段，每段长度为**M**

$$x_i(n) = x(n + iM)R_M(n)$$

- 各段与 $h(n)$ 卷积

$$y_i(n - iM) = h(n) * x_i(n - iM)$$

- 长度为**N+M-1**

- 求和

$$y(n) = h(n) * x(n) = \sum_{i=0}^{\infty} h(n) * x_i(n - iM) = \sum_{i=0}^{\infty} y_i(n - iM)$$

- $y_0(n), y_1(n), y_2(n), \dots$ 的定义区间 $0 \leq n \leq N + M - 2$
- $y_0(n - 0M)$ 的定义区间为 $0 \leq n \leq N + M - 2$
- $y_1(n - M)$ 的定义区间为 $M \leq n \leq 2M + N - 2$
- $y_2(n - 2M)$ 的定义区间为 $2M \leq n \leq N + 3M - 2$
- $y_i(n - iM)$ 的定义区间为 $iM \leq n \leq N + (i + 1)M - 2$

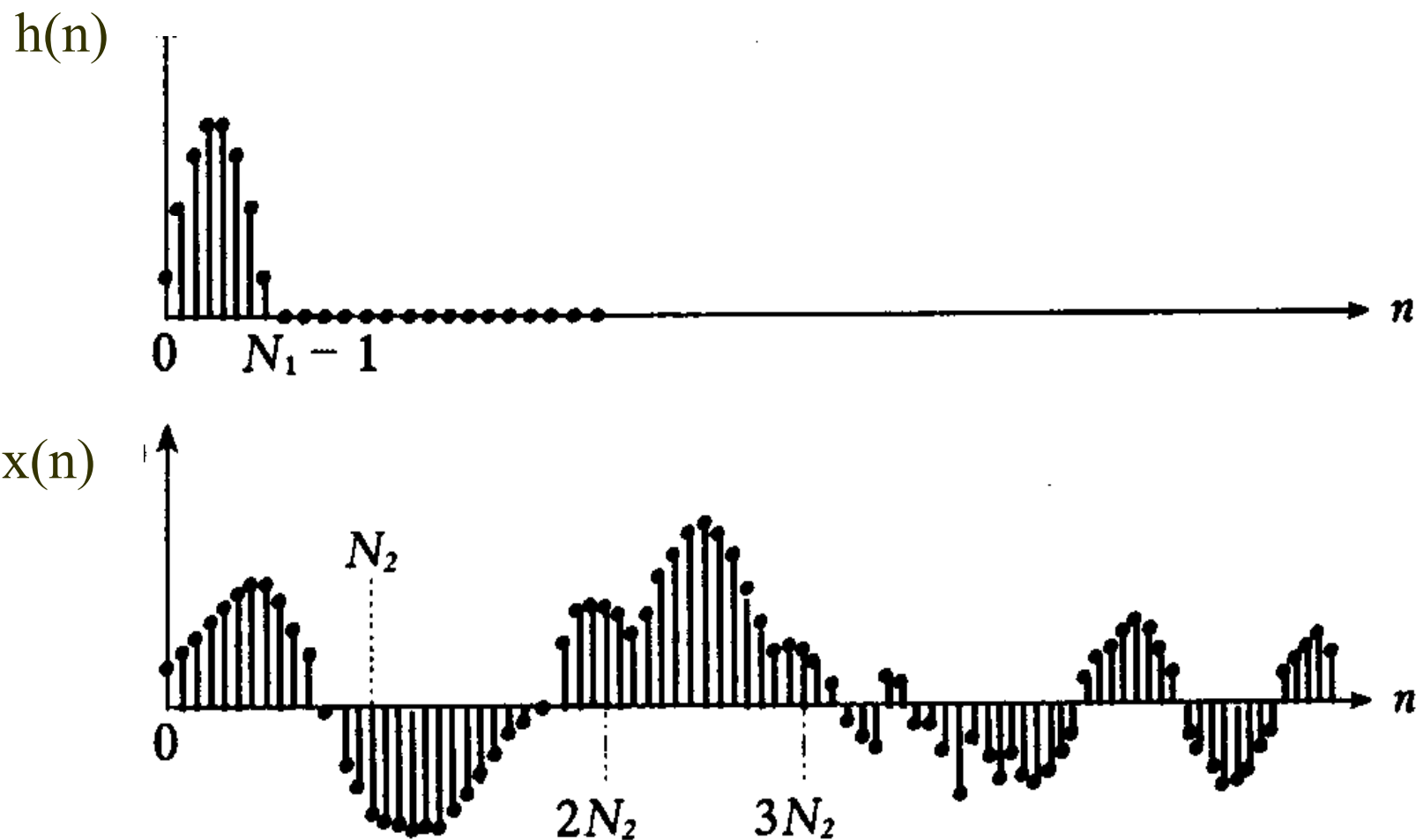
■ 重叠区间

$$y_{i-1}(n - (i-1)M) \text{ 与 } y_i(n - iM)$$

重叠区间 $iM \leq n \leq N + iM - 2$

对应点相加

(1) 重叠相加法——由分段卷积的各段相加构成总的卷积输出



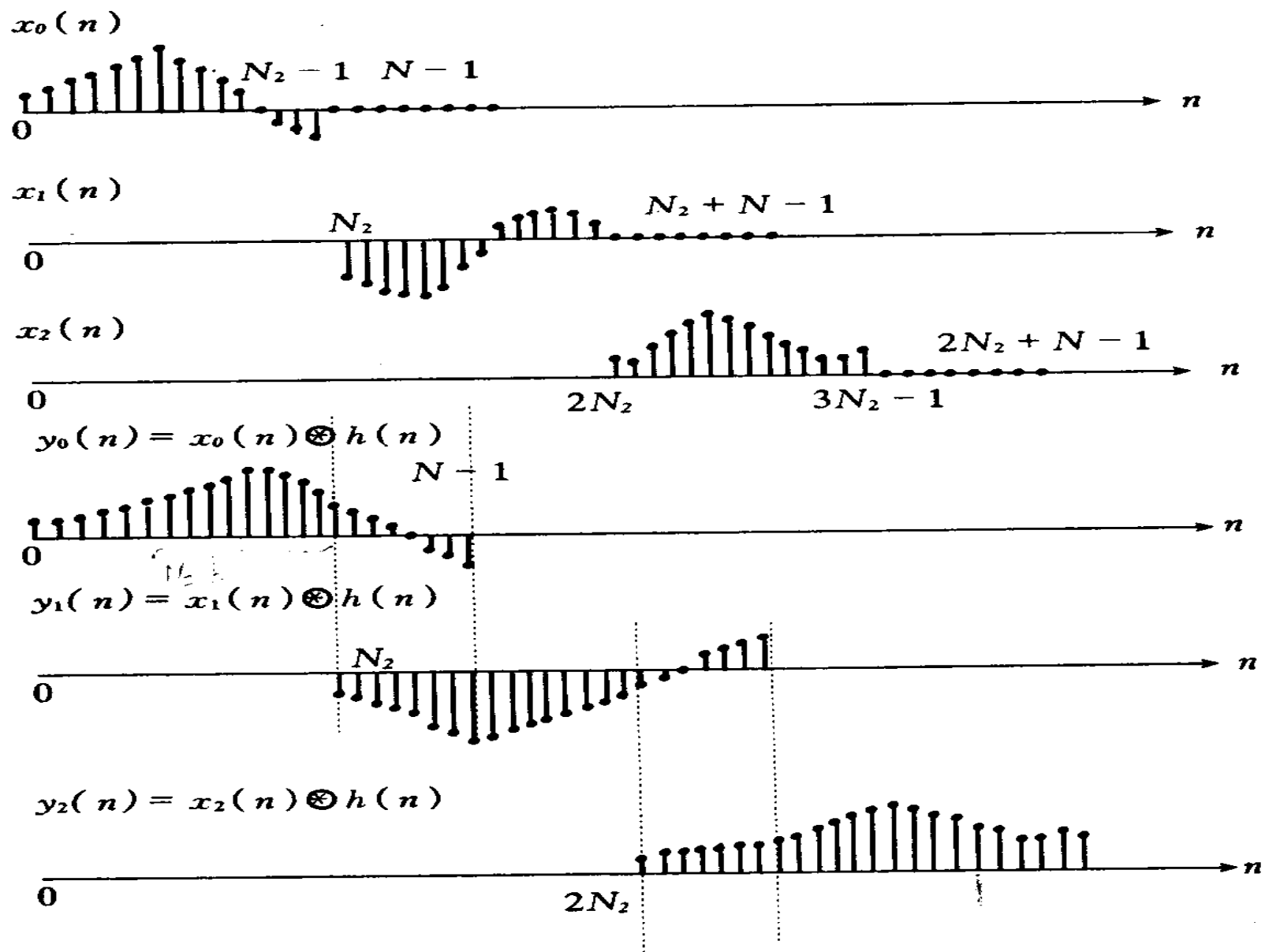


图 2.19 重叠相加法

$2N_2$

基于FFT的重叠相加法的计算步骤

1. 计算并保存 $H(k) = DFT[h(n)]_L$, $L = N + M - 1, i = 0$
2. 读入 $x_i(n)$, 计算 L点FFT: $X_i(k) = DFT[x_i(n)]_L$
3. $Y_i(k) = H(k)X_i(k)$.
4. 计算L点IFFT: $y_i(n) = IDFT[Y_i(k)]_L, n = 0, 1, 2, \dots, L - 1$
5. 重叠相加

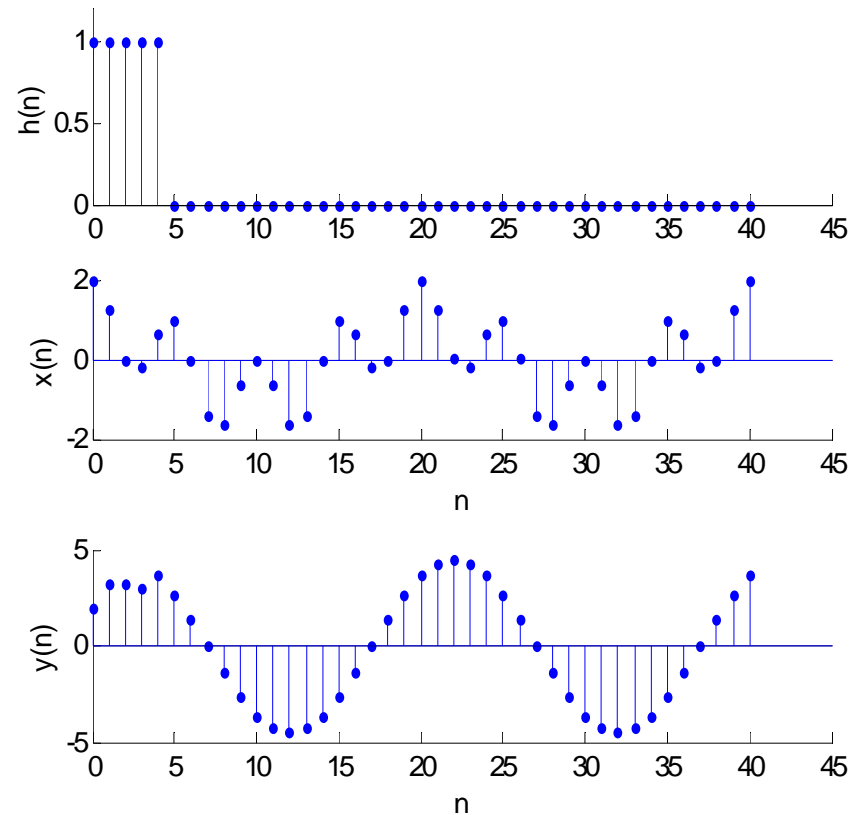
$$y(iM + n) = \begin{cases} y_{i-1}(M + n) + y_i(n), & 0 \leq n \leq N - 2 \\ y_i(n), & N - 1 \leq n \leq N + M - 1 \end{cases}$$

6. $i=i+1$, 返回2

实现实时计算!

例3.5.2 设 $h(n) = R_5(n)$, $x(n) = [\cos(\pi n / 10) + \cos(2\pi n / 5)]u(n)$
 用重叠相加法实现 $y(n) = h(n) * x(n)$

```
L=41;N=5;M=10;
hn=ones(1,N);hn1=[hn zeros(1,L-N)];
%产生h(n), 补零是为了绘图好看
n=0:L-1;
xn=cos(pi*n/10)+cos(2*pi*n/5);
%产生x(n)的L个样值
yn=fftfilt(hn,xn,M);
%调用fftfilt计算卷积
%=====
%以下为绘图部分
```



3.5.3 用DFT对序列进行频谱分析 (1)

- 有限长序列的频谱分析:
- 序列 $x(n)$ 的长度为**M**, 序列 N ($N \geq M$) 点**DFT**的物理意义为
 - 序列的频谱函数 $X(e^{j\omega})$ 在频率区间 $[0, 2\pi]$ 上的**N**点等间隔采样
- **FFT**是**DFT**的快速算法, 可用于有限长序列谱分析
- 问题: 如何确定**N**?

3.5.3 用DFT对序列进行频谱分析（2）

1. 根据频率分辨率的要求确定N。

- **频率分辨率**是指频谱分析中能够分辨的两个相邻频率点谱线的最小间距。
- 例：在数字频率域，要求频率分辨率为**D**弧度

$$\frac{2\pi}{N} \leq D \quad \therefore N_{\min} = \left\lceil \frac{2\pi}{D} \right\rceil$$

- 满足 $N \geq x(n)$ 的长度
- 满足基**2FFT**对点数**N**的要求， $N = 2^M$ ， **M**为正整数。

3.5.3 用DFT对序列进行频谱分析（3）

2. 计算DFT，注意自变量**k**所对应的数字频率为：

$$\omega_k = 2\pi k / N$$

绘图时要以数字频率作为横坐标变量。

3. 若无频率分辨率要求，**N**可依据先验知识和实验进行确定

- 已知谱峰间距**B**，则分辨率为**B/2**；
- 试验确定：随意取**N**，做DFT，再增大**N**，再做DFT，比较两次频谱，若差别较大，则再增加**N**，直到前后两次的频谱差异满足要求。

例3.5.3 $x(n) = 0.5^n R_{10}(n)$ 求频谱，分辨率为 **0.02π rad.**

解：

(1) 确定**N** $\therefore N_{\min} = \left\lceil \frac{2\pi}{D} \right\rceil = \frac{2\pi}{0.02\pi} = 100$

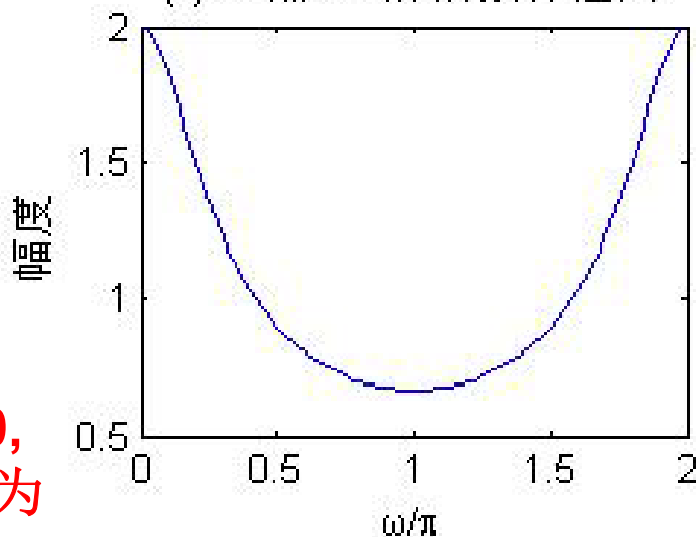
(2) 计算**N点DFT**

$$X(k) = DFT[x(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{kn}, k = 0, 1, \dots, N-1$$

$$= \sum_{n=0}^9 0.5^n W_{100}^{kn} = \frac{1 - 0.5^{10} W_{100}^{10k}}{1 - 0.5 W_{100}^k}, k = 0, 1, \dots, N-1$$

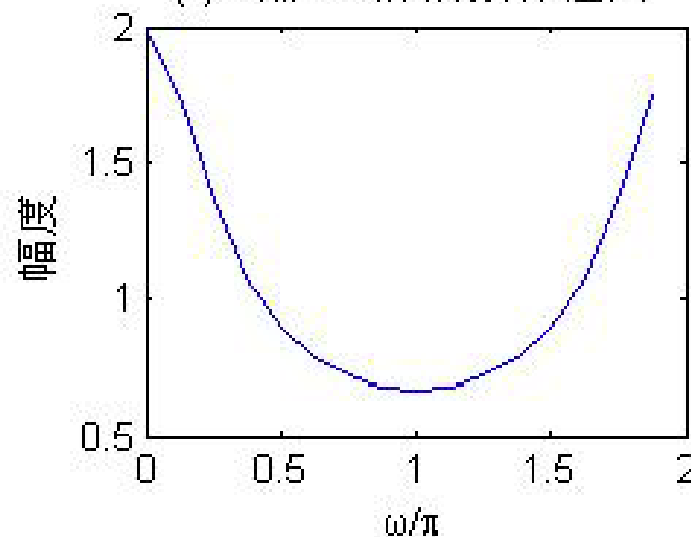


(a)100点DFT的幅频特性图



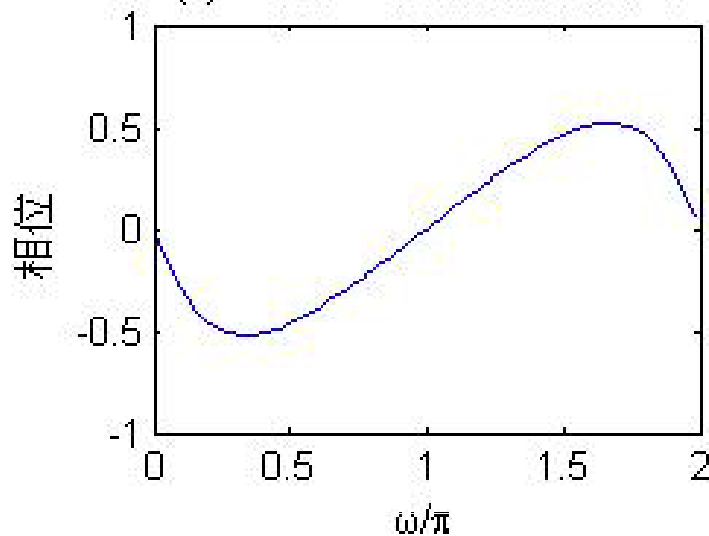
N=100,
分辨率为
0.02π

(c)16点DFT的幅频特性图

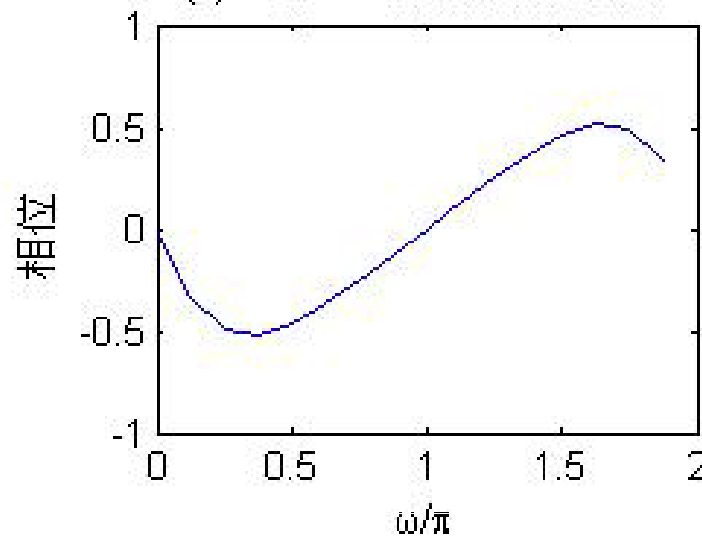


N=16,
分辨率为
π/8

(b)100点DFT的相频特性图



(d)16点DFT的相频特性图



频谱变化缓慢，可以降低谱分析的分辨率



小结（1）

■ DFT提出的目的

- 序列的傅里叶变换、**Z**变换是时域离散信号及系统分析与设计的重要数学工具；
- 但变换结果均为连续函数，无法用计算机进行处理；
- 离散傅里叶变换（**DFT**）对有限长时域离散信号的频谱进行等间隔采样，频域函数被离散化了，便于信号的计算机处理。

■ DFT与ZT、FT、DFS之间的关系

小结：（2）

- 频域采样定理，频域内插公式
- **DFT**的性质（7个）
- 循环卷积与线性卷积之间的关系
- **FFT**的引入及基本思想
 - **DFT**运算量较大，快速离散傅里叶变换算法**FFT**是解决方案
 - 长序列分解为短序列，利用 W_N^m 的周期性和对称性
- **DFT** 的应用
 - 线性卷积
 - 频谱分析



作业

- **P90-92:**

**1(1,3,5,9), 2(2,3,4), 6, 10*, 11*, 12*, 15
17, 18, 21, 22*, 25**

- **编程:**

matlab编程实现基2DIT-FFT算法