第五章
数字滤波器的基本概念及一些特殊滤波器

王柯俨

kywang@mail.xidian.edu.cn

http://web.xidian.edu.cn/kywang/teach.html

5.1 数字滤波器的基本概念（1）

- 数字滤波器：
  - 输入与输出均为数字信号
  - 通过一定数值运算
  - 改变输入信号所含频率成分的相对比例
  - 或者滤除某些频率成分
  - 或者进行信号检测与参数估计
  - 与模拟滤波的不同：信号的形式，滤波的方法
- 数字滤波器的实现方法：
  - 计算机软件
  - 专用数字信号处理芯片
  - 硬件（加法器、乘法器、延迟器）组合

5.1 数字滤波器的基本概念（2）

- 数字滤波器的可实现性
  - 因果稳定，系统传输函数的极点都在单位圆内
  - 实数乘法，系统函数的系数为实数，即零极点须共轭成对出现，或者是实数

- 滤波器的种类 —— 根据理论基础分
  - 经典滤波器（一般滤波器）：由线性系统构成
    - 信号和干扰的频带互不重叠时采用
  - 现代滤波器：以随机信号处理理论为基础
    - 例如：维纳滤波器、卡尔曼滤波器、自适应滤波器等
    - 信号和干扰的频带相互重叠时采用

5.1 数字滤波器的基本概念（3）

- 经典滤波器
  - 功能划分：高通、低通、带通、带阻
  - 实现方法：
    - 无限脉冲响应数字滤波器— **IIR**，其**h(n)**为无限长，网络中有反馈回路，系统函数为

$$H(z)=\frac{\sum_{r=0}^{M} b_r z^{-r}}{1+\sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}=\frac{N(z)}{D(z)}$$

    - 有限脉冲响应数字滤波器— **FIR**

$$H(z)=\sum_{n=0}^{N-1} h(n) z^{-n}$$

- 特殊滤波器：
  - 理想滤波器、一阶滤波器、二阶滤波器、数字谐振器、数字陷波器、全通滤波器、最小相位滤波器、梳状滤波器、正弦波发生器。

5.2理想数字滤波器

- 系统的无失真传输条件
  - 若信号**f(t)**通过某系统后，响应为**y(t)=Kf(t-td)**，则称该系统为无失真传输系统。

$$f(t) \longrightarrow \boxed{h(t)=?} \longrightarrow y(t) = kf(t-t_d)$$

$$y(t) = kf(t-t_d) = f(t) * h(t)$$

$$\therefore \quad h(t) = k\delta(t-t_d) \qquad\qquad \therefore \quad H(j\Omega) = ke^{-j\Omega t_d}$$

输出 $Y(j\Omega) = \left|Y(j\Omega)\right| e^{j\phi_Y(\Omega)} = k\left|F(j\Omega)\right| e^{j\phi_f(\Omega)} e^{-j\Omega t_d}$

幅频特性：$\left|Y(j\Omega)\right| = k\left|F(j\Omega)\right|$

相频特性：$\phi_y(\Omega) = \phi_f(\Omega) - \Omega t_d$

理想模拟滤波器

5.2.1理想数字滤波器的特点及分类

- 特点：
  - 在滤波器的通带内，幅度为常数，在阻带中幅度为零
  - 具有线性相位；
  - 单位脉冲响应为非因果无限长序列

- 理想带通滤波器
  - 频率响应

$$H(e^{j\omega})=\begin{cases} Ce^{-j\omega n_0} & 0<\omega_1<|\omega|<\omega_2<\pi \\ 0 & \text{其他}\omega \end{cases}$$

  - 幅频特性 $|H(e^{j\omega})|=C$ 相频特性 $\varphi(\omega)=-\omega n_0$
  - 群时延 $\tau_g(\omega)=-\dfrac{d\varphi(\omega)}{d\omega}=n_0$ 输入信号所有频率分量的时间延迟相同
  - 输出信号的频率响应

$$Y(e^{j\omega})=X(e^{j\omega})H(e^{j\omega}) \quad \omega_1<\omega<\omega_2$$

  - 输出信号

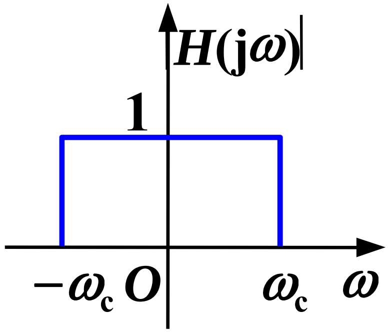
$$y(n)=Cx(n-n_0)$$

理想低通滤波器(1)

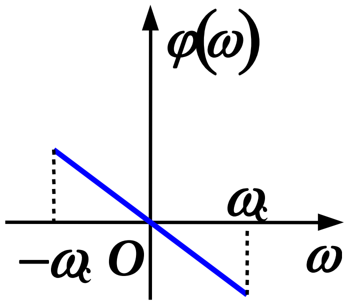
- 频率响应

$$H(e^{j\omega})=\begin{cases} e^{-j\omega n_0} & |\omega|\le\omega_c \\ 0 & \omega_c<|\omega|\le\pi \end{cases}$$

- 幅频特性



相频特性



- ω_c 为截止频率，称为理想低通滤波器的通频带，简称频带。
- $|\omega|\le\omega_c$ 的低频段内，传输信号无失真
- 滤波器的单位脉冲响应

$$h(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}H(e^{j\omega})d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega c}^{\omega c}e^{-j\omega n_0}e^{j\omega n}d\omega$$

$$=\frac{\sin(\omega c(n-n_0))}{\pi(n-n_0)}=\frac{\omega c}{\pi}Sa[\omega c(n-n_0)]$$

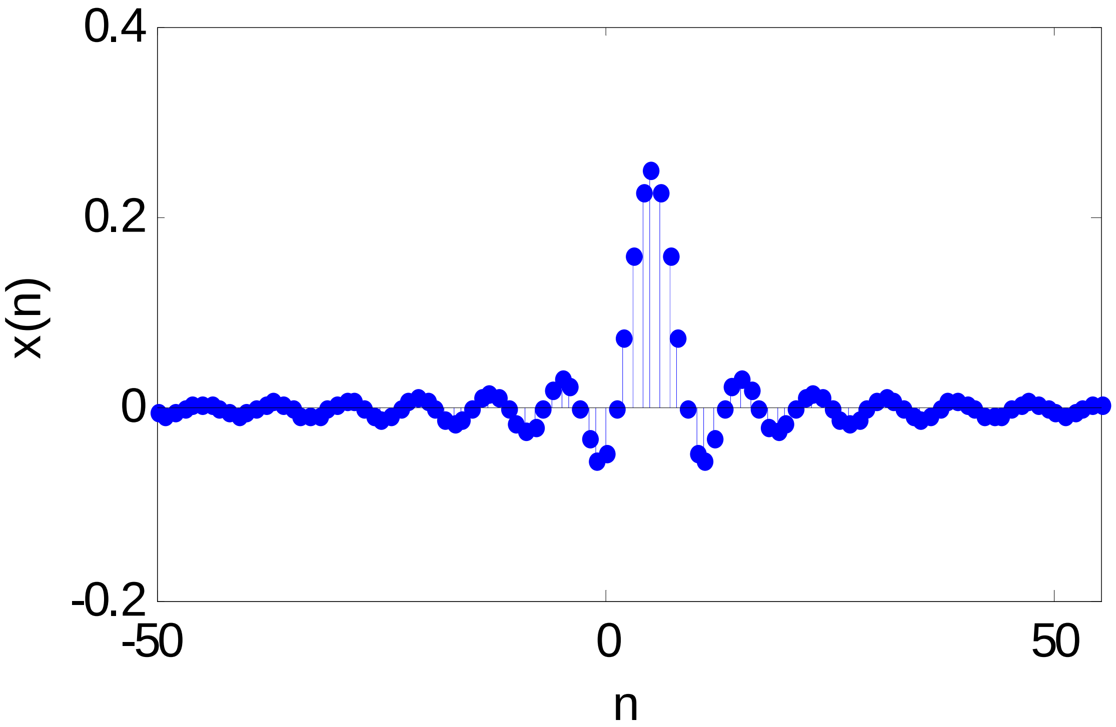
理想低通滤波器(2)

$$h(n)=\frac{\sin(\omega_c(n-n_0))}{\pi(n-n_0)}=\frac{\omega_c}{\pi}Sa[\omega_c(n-n_0)]$$

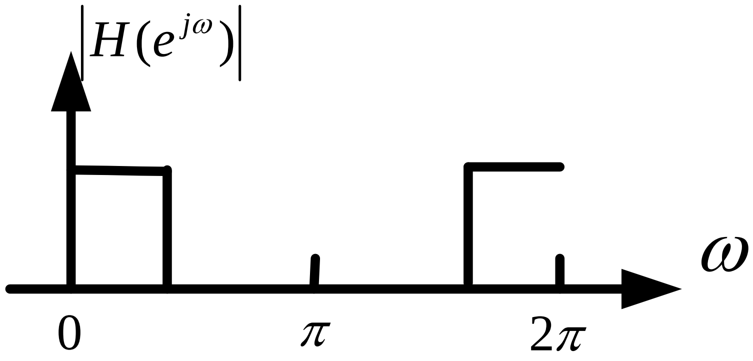
单位脉冲响应**h(n)**

是无限长的非因果

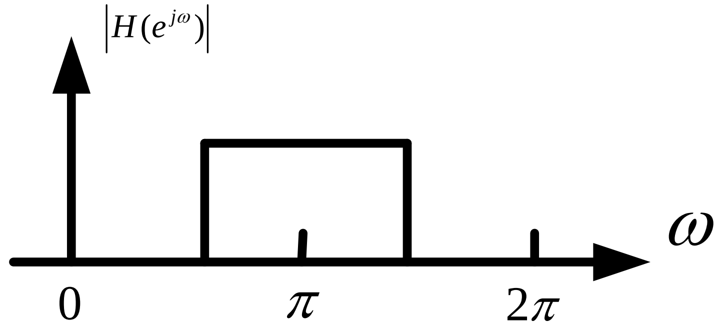
序列



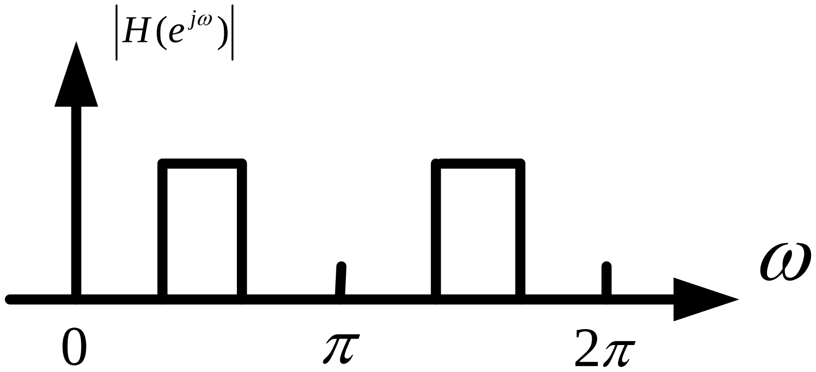
理想滤波器



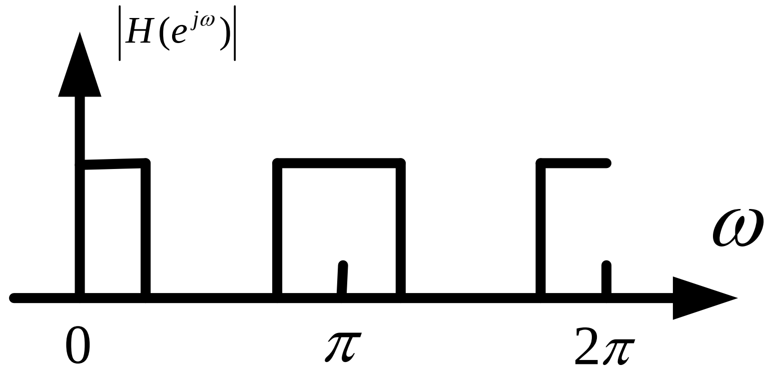
低通



高通



带通



带阻

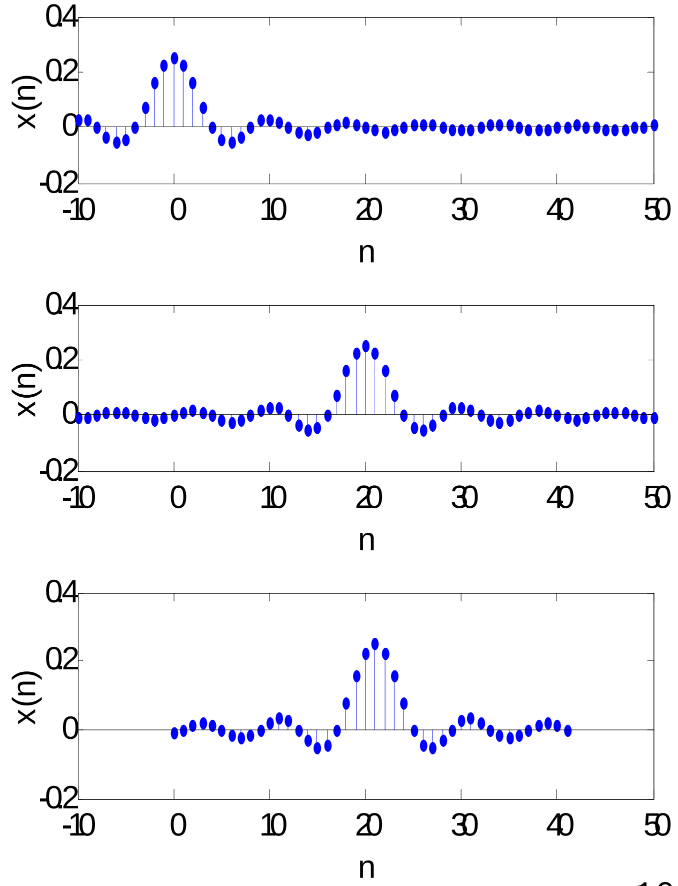
理想滤波器的可实现性

- 理想滤波器是个物理不可实现的非因果系统
  - 原因：从**h(n)**看，**n<0**时已有值。
- 近似实现
  - 序列右移
  - 加时域窗，实际的滤波器长度为**N**

$$h_N(n) = h(n)R_N(n)$$

$$H_N(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} H(e^{j\omega}) * R_N(e^{j\omega})$$

  - 截断效应
    - 通带幅度不再是常数，产生波动
    - 频谱泄漏，阻带幅度不再是零
    - 产生过渡带



5.3简单滤波器设计

- 基于零极点配置的的简单滤波器设计方法
- 原理：
  - 极点靠近单位圆，频率响应的峰值越高；极点放在需加强的频率点附近
  - 零点靠近单位圆，频率响应的谷值越小；零点放在需减弱的频率点附近
  - 约束条件
    - 极点在单位圆内，保证滤波器的因果稳定；
    - 零、极点须共轭成对，或者是实数，保证系统函数系数为实数。

5.3.1一阶数字滤波器设计

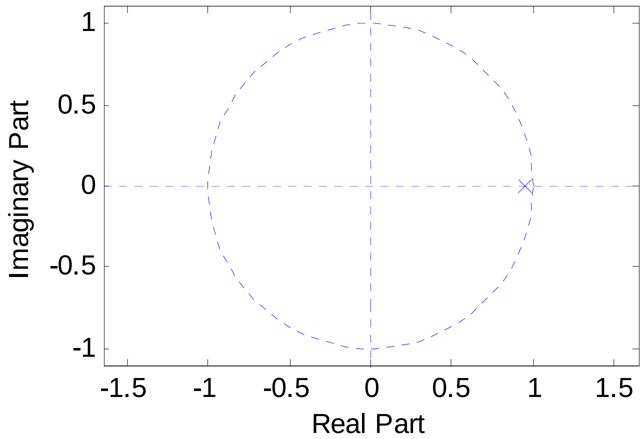
- 滤波器的阶次：系统函数分母多项式的阶数。
- 一阶数字滤波器
  - 具有一个极点
  - 零点可以有一个，也可以没有

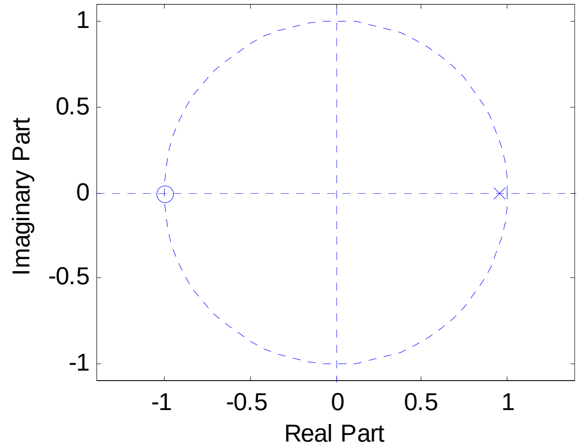
$$H_1(z)=\frac{1-a}{z-a} \qquad H_2(z)=\frac{1-a}{2}\frac{z+1}{z-a} \qquad H_3(z)=\frac{z-b}{z-a}$$

零极点的位置与系统的幅频特性（1）

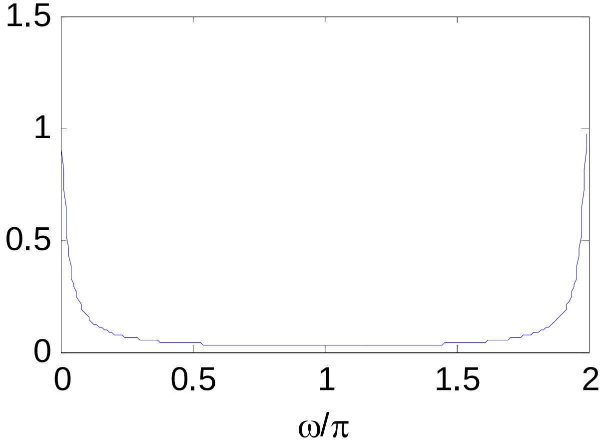
$a = 0.95 \qquad H_1(z) = \dfrac{1-a}{z-a}$

$$H_2(z) = \frac{1-a}{2}\,\frac{z+1}{z-a}$$



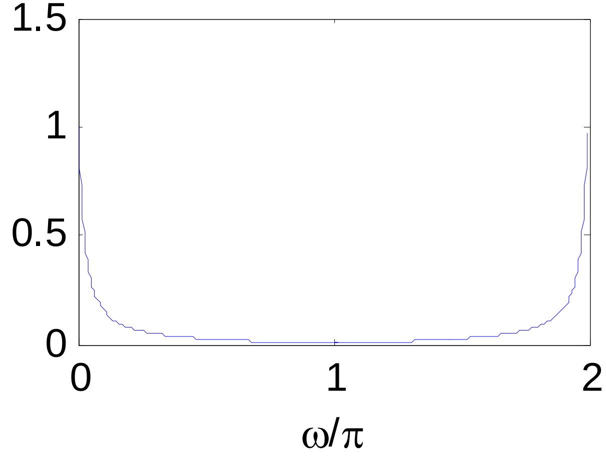


(a) 0.95



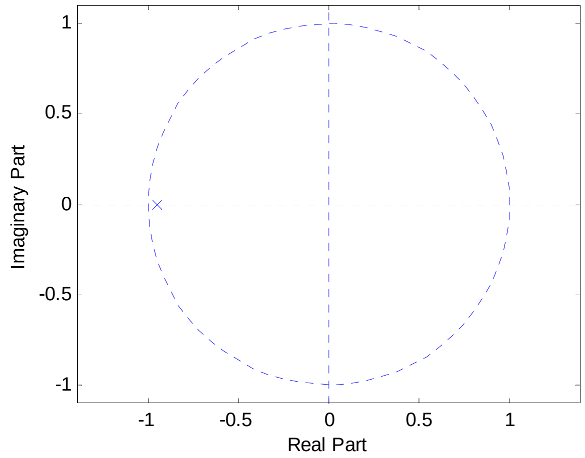
低通

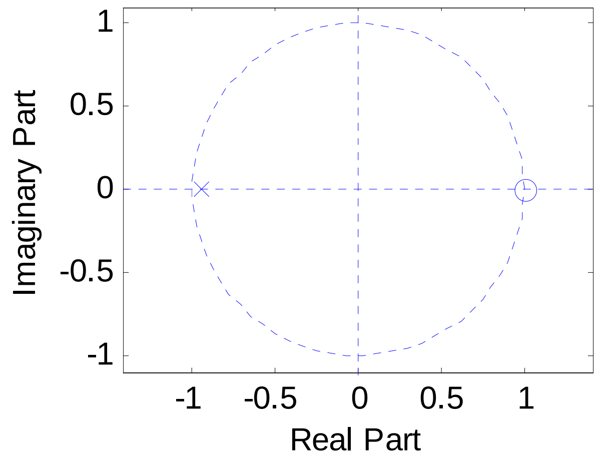
(b) 0.95,-1

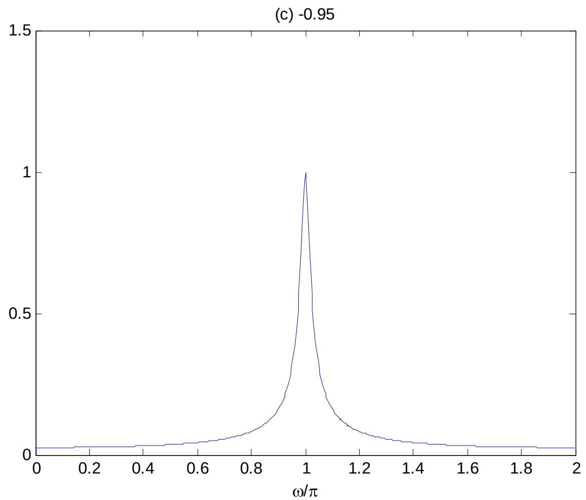


零极点的位置与系统的幅频特性（2）

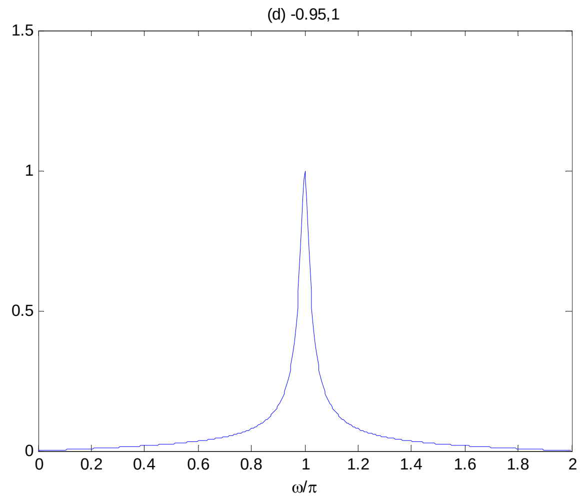
$a=-0.95$ $\qquad H_1(z)=\dfrac{-1-a}{z-a}$ $\qquad H_2(z)=\dfrac{-1-a}{2}\dfrac{z-1}{z-a}$





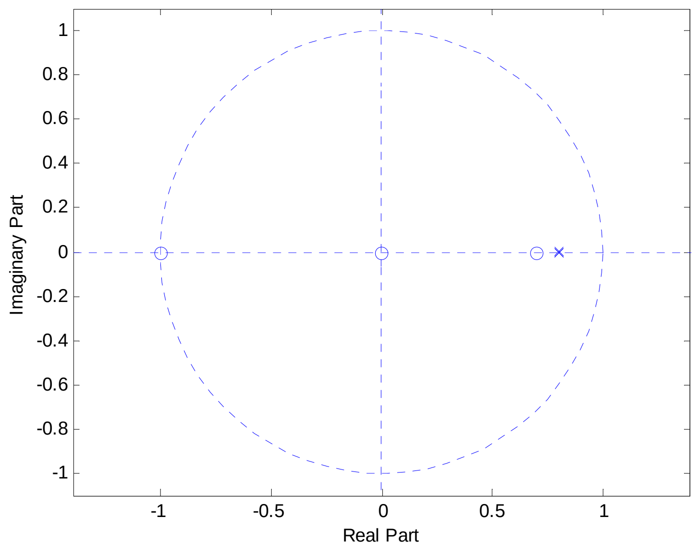


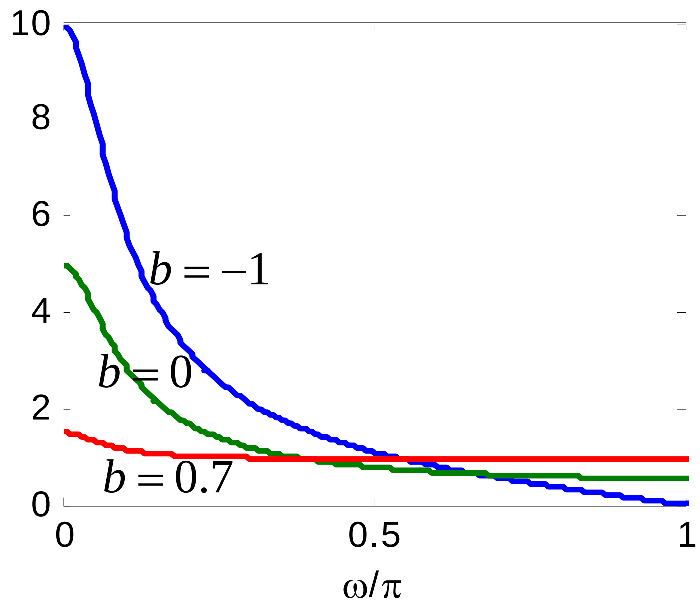
高
通



零极点的位置与系统的幅频特性（3）：零点的选择

$$H_3(z)=\frac{z-b}{z-a}\qquad a=0.8,\quad b=-1,\ 0,\ 0.7$$

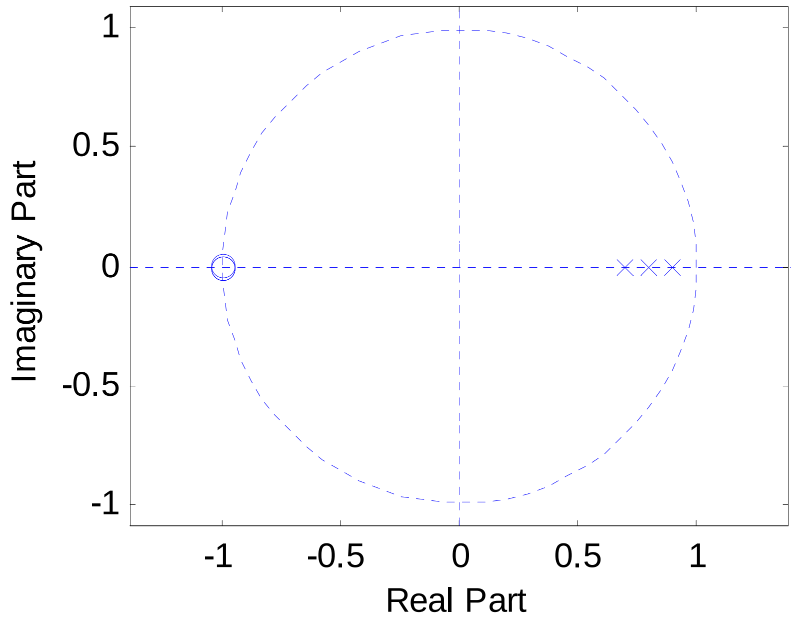


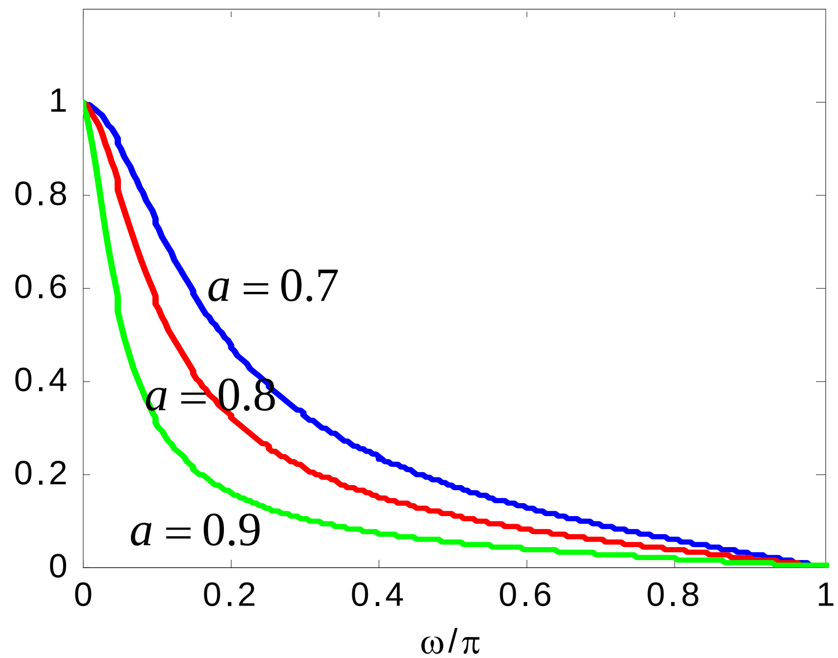


- 参数与曲线相对应？
- 结论：设计单极点单零点低通滤波器时，
  应该让零点远离极点，最好是**b=-1**的情况

零极点的位置与系统的幅频特性（4）：极点的选择

$$H_2(z) = \frac{1-a}{2}\frac{z+1}{z-a} \qquad b=-1, \quad a = 0.7, 0.8, 0.9$$





- 参数与曲线相对应？
- 结论：极点越靠近单位圆，峰值越尖锐

5.3.2 一阶低通滤波器带宽的计算（1）

- 一阶低通滤波器

$$H_2(z)=\frac{1-a}{2}\frac{z+1}{z-a}$$

- 幅频特性中幅度最大的点

$$\omega=0,\quad H(e^{j0})=1,\quad 20\lg\left|H(e^{j0})\right|=0dB$$

- 幅度降到**-3dB**所对应的频率点

$$\omega=\omega_p,\qquad 20\lg\left|H(e^{j\omega_p})\right|=10\lg\left|H(e^{j\omega_p})\right|^2=-3dB$$

$$\left|H(e^{j\omega_p})\right|^2=10^{-3/10}\approx 0.5$$

$$\left|H(e^{j\omega_p})\right|^2=H(e^{j\omega_p})H^*(e^{j\omega_p})=H(e^{j\omega_p})H(e^{-j\omega_p})$$

$$\omega_p=\arccos\left(\frac{2a}{1+a^2}\right)$$

$$\omega_p\approx\beta=1-a\qquad(a\approx 1)$$

5.3.2 一阶低通滤波器带宽的计算（2）

- **3dB带宽** $\beta = 1 - a$
  - （近似）带宽仅和极点有关，与零点无关
- 近似计算

$$H(e^{j0}) = \frac{1-a}{2}\frac{1-(-1)}{1-a} = \frac{1-a}{2}\frac{2}{1-a}$$

$$H(e^{j\beta}) = \frac{1-a}{2}\frac{e^{j\beta}-(-1)}{e^{j\beta}-a} \approx \frac{1-a}{2}\frac{2}{\sqrt{2}\beta}$$

$$\frac{H(e^{j\beta})}{H(e^{j0})} = \frac{\frac{2}{\beta}}{\frac{2}{\sqrt{2}\beta}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.707$$

$$\therefore \omega_p \approx \beta = 1 - a$$

例5.3.1 $x_a(t)=\sin 7t+\sin 200t$ 设计数字低通滤波器，滤除信号中的高频分量

- 解： $$H(z)=\frac{1-a}{2}\frac{z+1}{z-a} \quad a=?$$

1）变模拟信号为数字信号

采样间隔

$$\Omega_s=\frac{2\pi}{T}\geq 2\Omega_{\max}\Rightarrow T<\frac{\pi}{\Omega_{\max}}=\frac{\pi}{200}\Rightarrow T=0.015$$

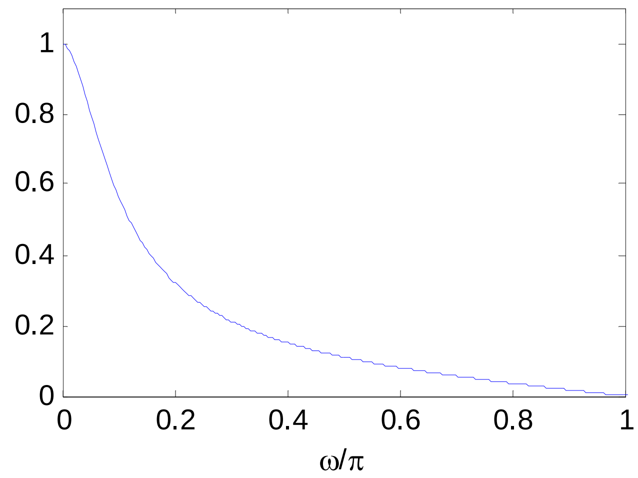
2）滤波器的带宽

低频分量对应的数字频率 $$\frac{\Omega}{\frac{2\pi}{T}}=\frac{\omega}{2\pi}\Rightarrow \omega=\Omega T=7\times 0.015=0.105$$

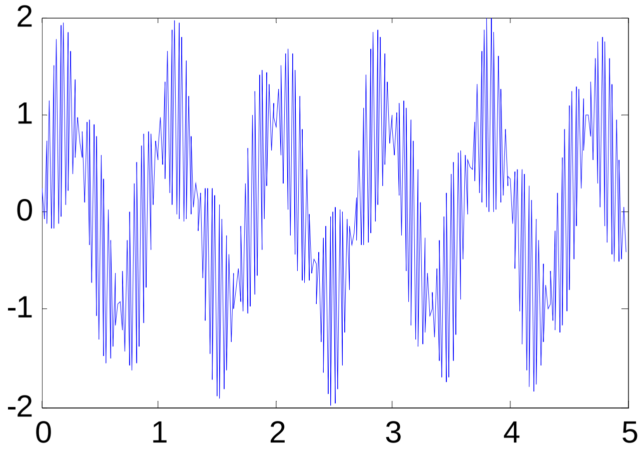
滤波器带宽 取 $\beta=0.2rad>0.105rad$

3）滤波器

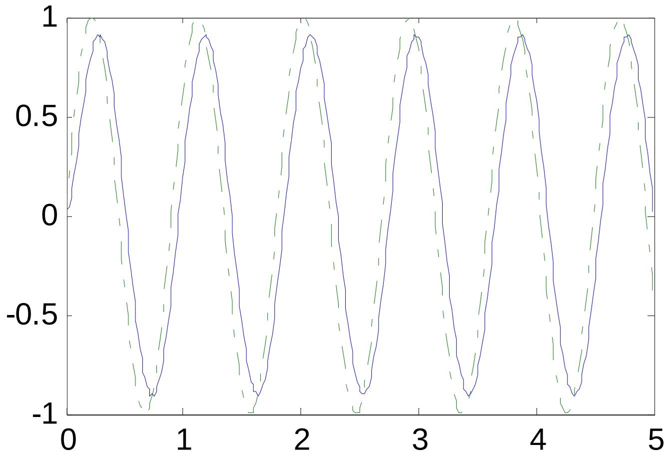
$$a=1-\beta=0.8 \quad \therefore H(z)=\frac{1-0.8}{2}\frac{z+1}{z-0.8}=\frac{z+1}{10z-8}$$



滤波器传输函数



输入信号



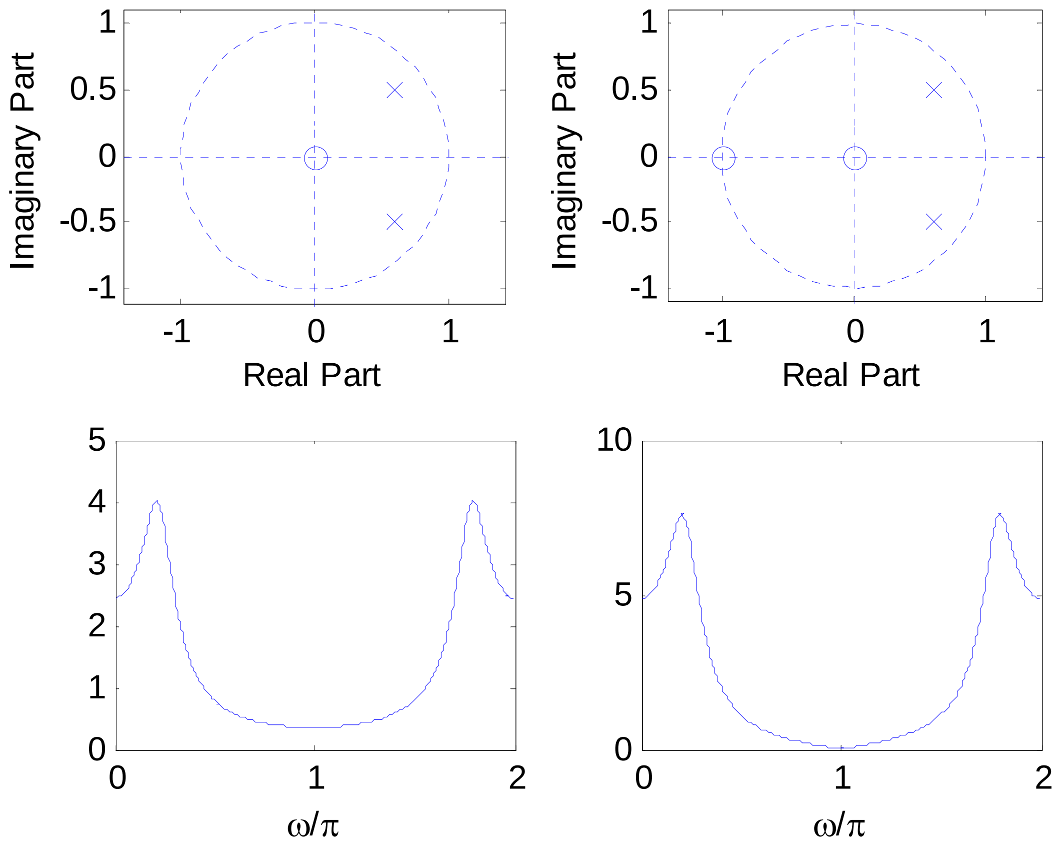
输出信号

5.3.3 二阶数字滤波器

- 系统函数 $$H(z) = G\frac{(z-b_1)(z-b_2)}{(z-p_1)(z-p_2)}$$
- 零点 0个、1个、2个；极点 2个
- 参数设计
  - G 保证幅频特性的最大值为1
  - 共轭极点
  - 共轭零点

零极点位置与滤波器的幅频特性

$$H(z)=\frac{(z-0)}{(z-0.6-0.5j)(z-0.6+0.5j)}$$



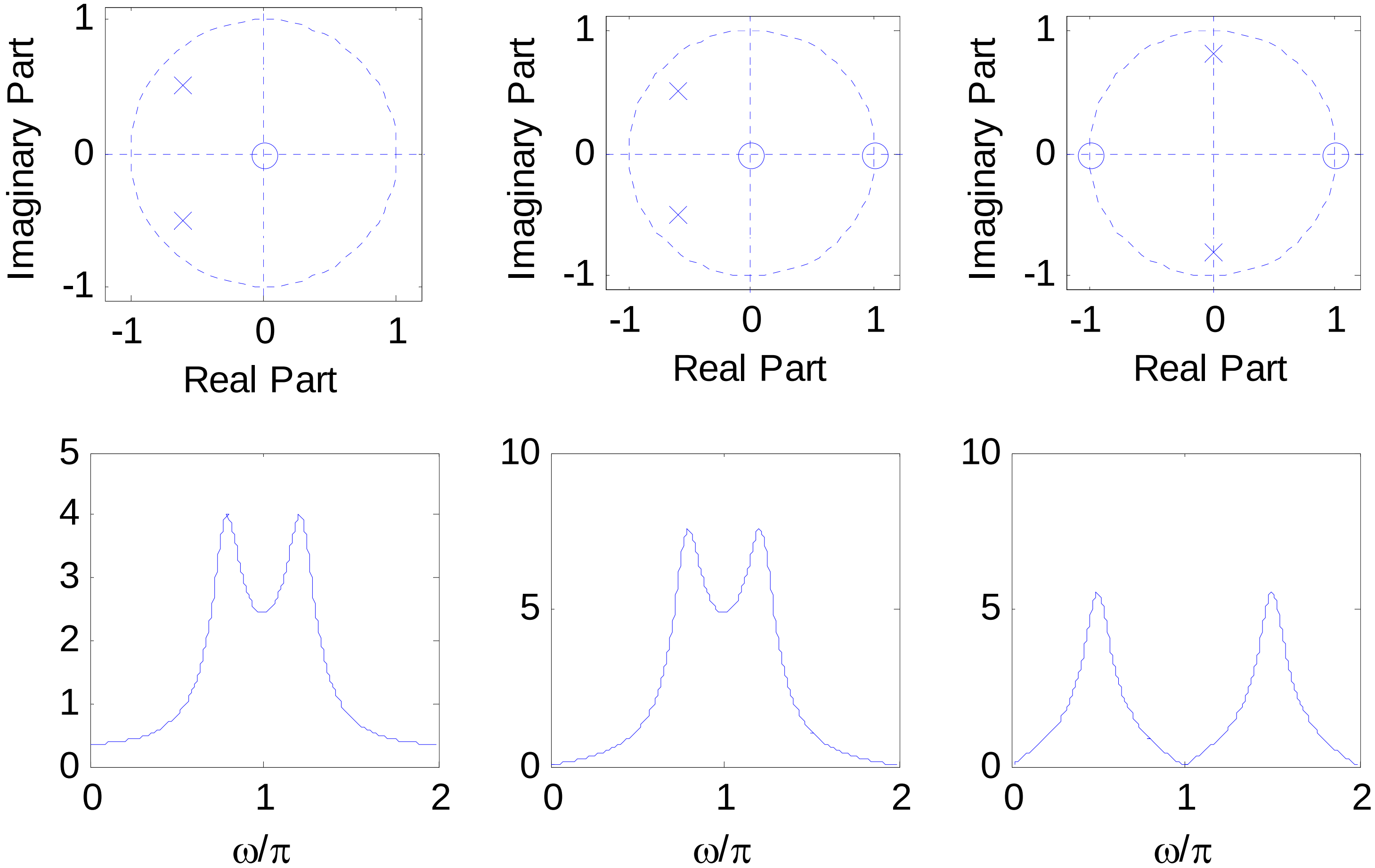
滤波器类型？

$$H(z)=\frac{(z-0)(z-1)}{(z-0.6-0.5j)(z-0.6+0.5j)}$$

$$H(z)=\frac{(z-0)}{(z+0.6-0.5j)(z+0.6+0.5j)}$$

$$H(z)=\frac{(z-1)(z+1)}{(z-0.8j)(z+0.8j)}$$

$$H(z)=\frac{(z-0)(z-1)}{(z+0.6-0.5j)(z+0.6+0.5j)}$$



滤波器类型？

例5.3.2 设计二阶数字滤波器的系统函数为 $H(z)=\dfrac{G}{(1-pz^{-1})^2}$，

确定G和p，使幅频特性满足：$H(e^{j0})=1,\quad \left|H(e^{j\frac{\pi}{4}})\right|^2=\dfrac{1}{2}$

- 解：$\omega=0$ $\quad H(e^{j0})=\dfrac{G}{(1-p)^2}=1,\quad \Rightarrow G=(1-p)^2$

$\omega=\dfrac{\pi}{4}$

$$H(e^{j\frac{\pi}{4}})=\frac{G}{(1-p\cos\frac{\pi}{4}+jp\sin\frac{\pi}{4})^2}=\frac{(1-p)^2}{(1-p/\sqrt{2}+j\,p/\sqrt{2})^2}=\frac{1}{2}$$

$$p=0.32$$

- 系统函数：

$$H(z)=\frac{0.46}{(1-0.32z^{-1})^2}$$

例5.3.3：设计带通滤波器，要求 $\omega=\dfrac{\pi}{2}$ 是通带中心，在 $\omega=0,\pi$ 两点，频率响应为零；在 $\omega=4\pi/9$ 处，幅度为 $\omega=1/\sqrt{2}$

解：1）由通带中心确定**极点** $p_{1,2}=re^{\pm j\pi/2}=\pm jr$

2）由幅频特性为0的频点确定**零点** $z_{1,2}=\pm 1$

3）系统函数为：

$$H(z)=G\frac{(z-1)(z+1)}{(z-jr)(z+jr)}=G\frac{z^2-1}{z^2+r}$$

4）确定G

$$H(e^{j\frac{\pi}{2}})=G\frac{z^2-1}{z^2+r^2}=G\frac{-1-1}{-1+r^2}=G\frac{2}{1-r^2}=1$$

$$\Rightarrow G=\frac{1-r^2}{2}$$

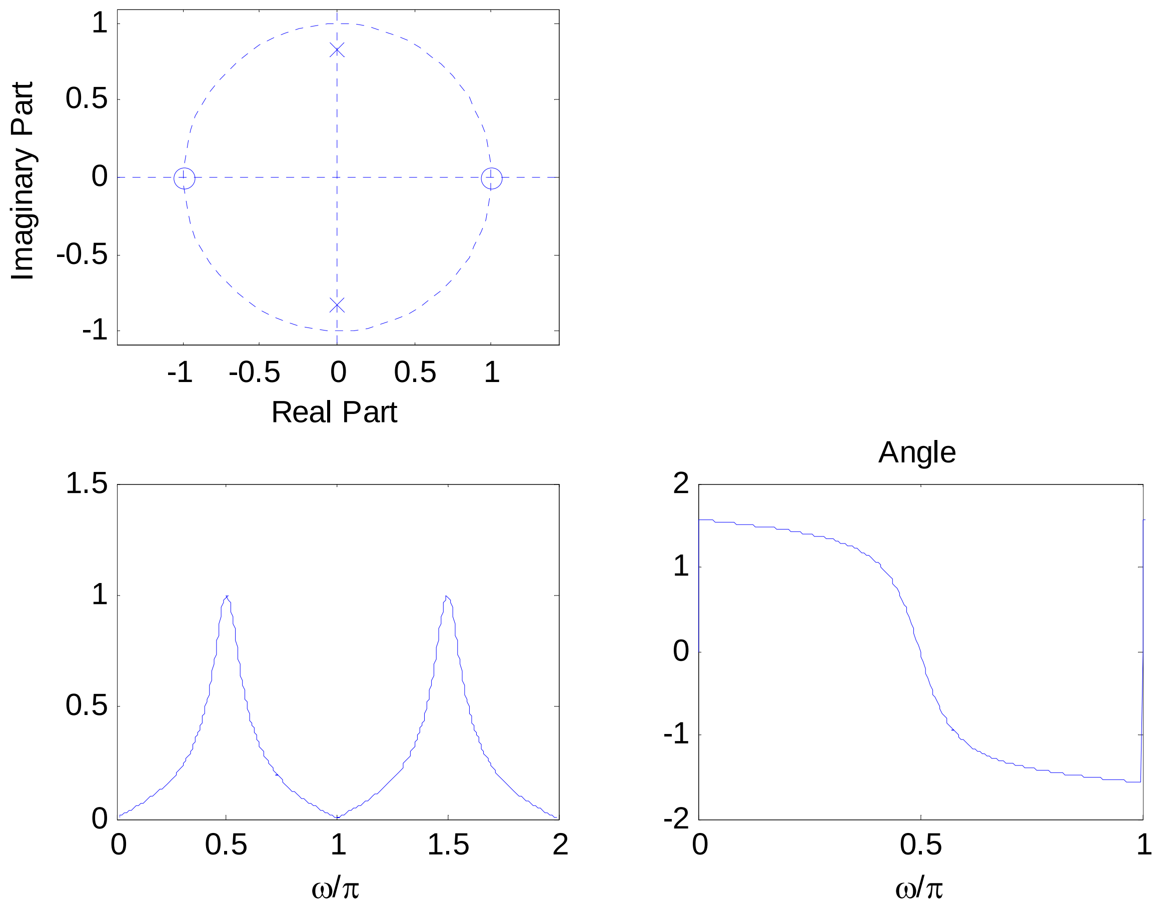
5）确定r

$$H(e^{j\frac{4\pi}{9}})=\frac{(1-r^2)^2}{4}\frac{2-2\cos(8\pi/9)}{1+r^4+2r^2\cos(8\pi/9)}=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow r=0.7$$

6）带通滤波器的系统函数为

$$H(z) = 0.15\frac{z^2 - 1}{z^2 + 0.7}$$



5.3.4低通到高通的简单变换（1）

- 低通滤波器：
  - 通带在 $\omega = 0$ 附近
  - 阻带在 $\omega = \pi$ 附近
- 高通滤波器：
  - 通带在 $\omega = \pi$ 附近
  - 阻带在 $\omega = 0$ 附近
- 低通到高通的简单变换

$$\boxed{H_{hp}(e^{j\omega}) = H_{lp}(e^{j(\omega-\pi)})}$$

- 单位脉冲响应之间的关系

$$h_{hp}(n) = e^{j\pi n} h_{lp}(n) = (-1)^n h_{lp}(n)$$

$$\boxed{h_{lp}(n) = (-1)^n h_{hp}(n)}$$

5.3.4低通到高通的简单变换（2）

- 低通滤波器的差分方程为

$$y(n)=\sum_{k=0}^{M}b_k x(n-k)-\sum_{k=1}^{N}a_k y(n-k)$$

- 低通滤波器的传输函数为

$$H_{lp}(e^{j\omega})=\frac{\sum_{k=0}^{M}b_k e^{-j\omega k}}{1+\sum_{k=1}^{N}a_k e^{-j\omega k}}$$

- 高通滤波器的传输函数为

$$H_{hp}(e^{j\omega})=\frac{\sum_{k=0}^{M}b_k e^{-j(\omega-\pi)k}}{1+\sum_{k=1}^{N}a_k e^{-j(\omega-\pi)k}}=\frac{\sum_{k=0}^{M}(-1)^k b_k e^{-j\omega k}}{1+\sum_{k=1}^{N}(-1)^k a_k e^{-j\omega k}}$$

- 高通滤波器的差分方程为

$$y(n)=\sum_{k=0}^{M}(-1)^k b_k x(n-k)-\sum_{k=1}^{N}(-1)^k a_k y(n-k)$$

- 低通与高通的差别：
  - 当k为奇数时，滤波器的系数加负号

- 例5.3.4：已知低通滤波器 $y(n)=0.9y(n-1)+0.1x(n)$

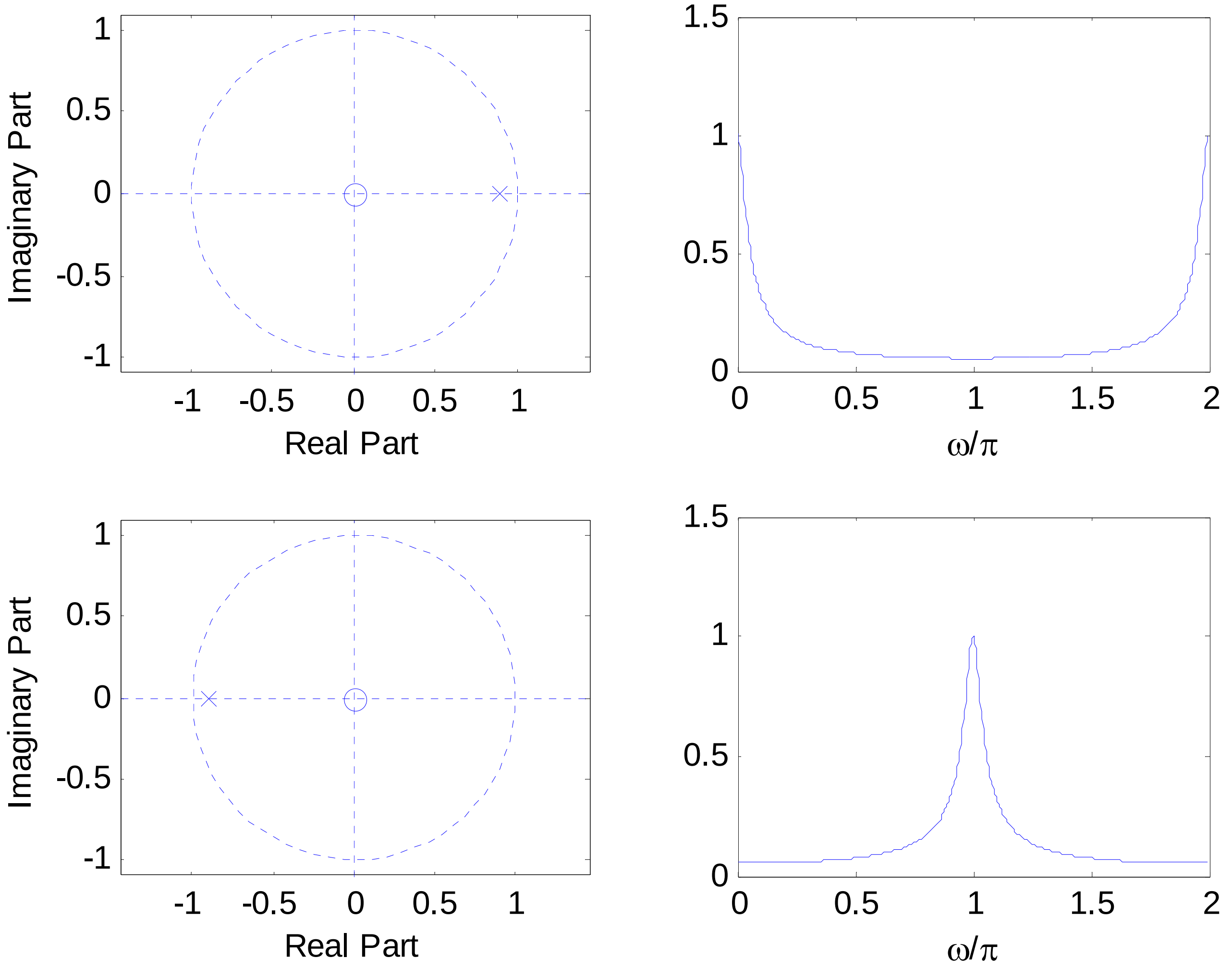
  求高通滤波器?

解：高通滤波器为 $y(n)=-0.9y(n-1)+0.1x(n)$

传输函数为

$$H_{hp}(e^{j\omega})=\frac{0.1}{1+0.9e^{-j\omega}}$$

$$y(n) = 0.9y(n-1) + 0.1x(n)$$



$$y(n) = -0.9y(n-1) + 0.1x(n)$$

5.4 数字谐振器

- 特点：
  - 二阶双极点带通滤波器
  - 有一对共轭极点 $p_{1,2} = re^{\pm j\omega_0}$ ，r接近1，在 ω_0 附近幅频特性的幅度最大，相当于在该频率发生谐振。
  - 用作带通滤波器

- 零点放置方式：

1. 谐振器1 $p_{1,2} = re^{\pm j\omega_0}$， $b = 0$
   - 系统函数

$$H(z) = \frac{b_0}{(1 - re^{j\omega_0} z^{-1})(1 - re^{-j\omega_0} z^{-1})}$$

$$H(z) = \frac{b_0}{1 - (2r\cos\omega_0) z^{-1} + r^2 z^{-2}}$$

- **b_0保证幅频特性在 ω_0 附近的值为1**

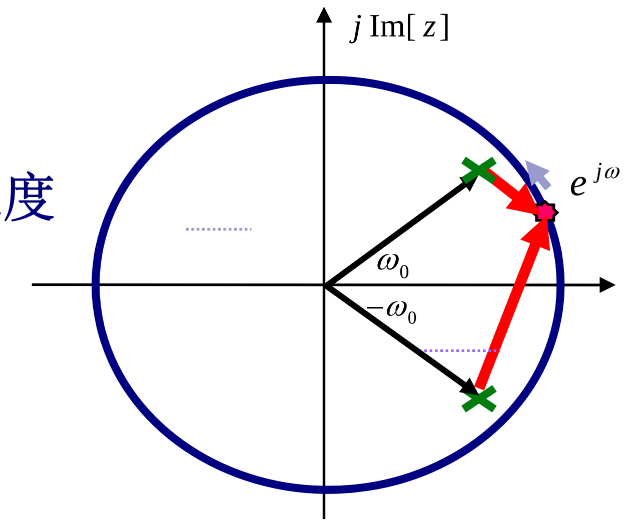
$$H(e^{j\omega_0}) = \frac{b_0}{(1-re^{j\omega_0}e^{-j\omega_0})(1-re^{-j\omega_0}e^{-j\omega_0})} = \frac{b_0}{(1-r)(1-re^{-j2\omega_0})}$$

$$\left|H(e^{j\omega_0})\right| = \frac{b_0}{(1-r)\sqrt{1+r^2-2r\cos 2\omega_0}} = 1$$

$$\therefore b_0 = (1-r)\sqrt{1+r^2-2r\cos 2\omega_0}$$

- 谐振频率？ $$\left|H(e^{j\omega})\right| = \frac{b_0}{U_1(\omega)U_2(\omega)}$$

  - $U_1(\omega)$、$U_2(\omega)$分别是极点到 $e^{j\omega}$ 的矢量长度



$$U_1(\omega) = \sqrt{1+r^2-2r\cos(\omega_0-\omega)}$$

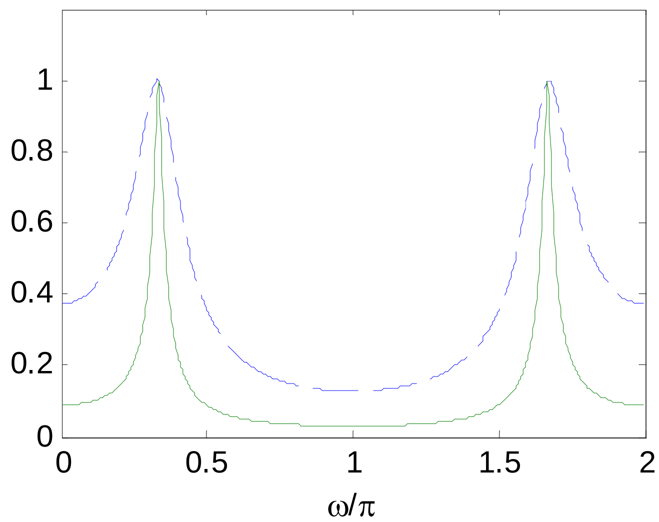
$$U_2(\omega) = \sqrt{1+r^2-2r\cos(\omega_0+\omega)}$$

- 当 $\omega = \omega_r$, $U_1(\omega_r)U_2(\omega_r) = \min$

$$\Rightarrow \quad \omega_r = \arccos\left(\frac{1+r^2}{2r}\cos\omega_0\right)$$

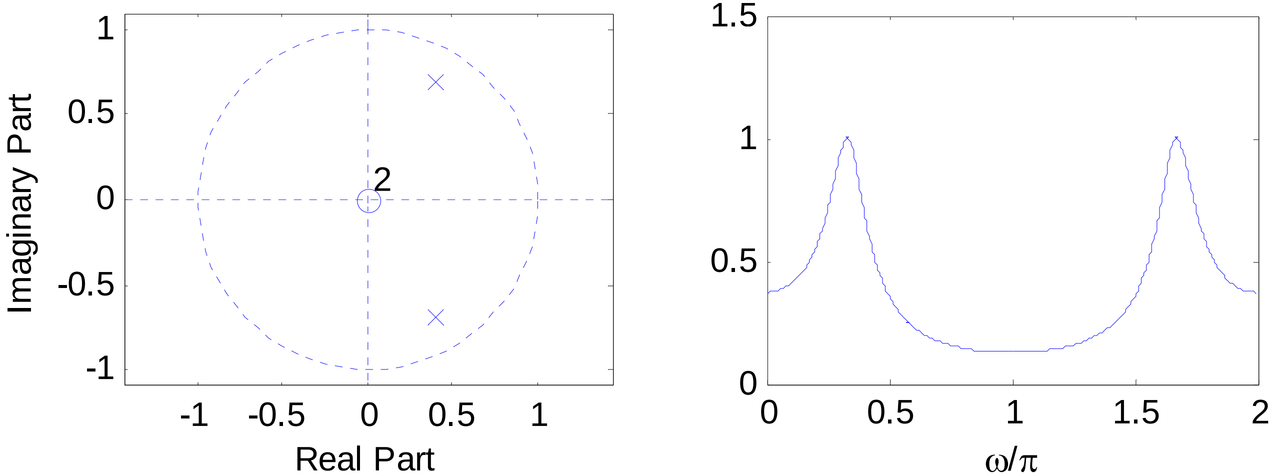
- 谐振器的精确谐振频率为 ω_r
- 当两个极点接近单位圆时，则 $\omega_r \approx \omega_0$
- **3dB**带宽为 $\Delta\omega \approx 2(1-r)$

- 例： $\omega_0 = \pi/3, r = 0.8, 0.95$
  - 曲线与参数的对应关系？

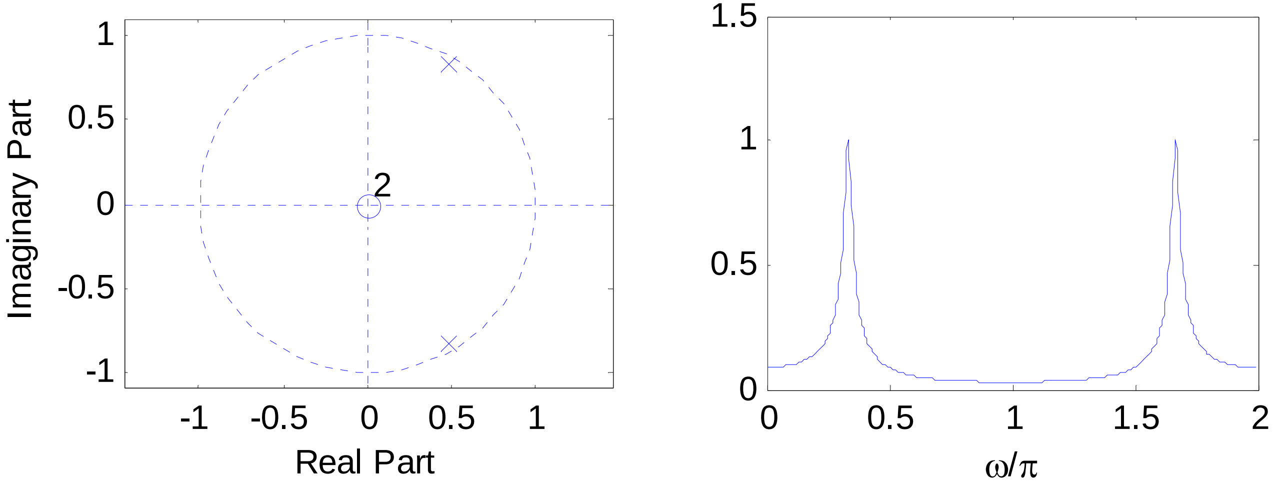


极点越靠近单位圆，谐振峰越尖锐

$r = 0.8$



$r = 0.95$



谐振器2

$$p_{1,2} = re^{\pm j\omega_0}, \quad b_1 = 1, b_2 = -1$$

- 系统函数

$$H(z) = \frac{b_0(1-z^{-1})(1+z^{-1})}{(1-re^{j\omega_0}z^{-1})(1-re^{-j\omega_0}z^{-1})}$$

$$H(z) = \frac{b_0(1-z^{-2})}{1-(2r\cos\omega_0)z^{-1}+r^2z^{-2}}$$

- 传输函数

$$H(e^{j\omega}) = \frac{b_0(1-e^{-2j\omega})}{(1-re^{j\omega_0}e^{-j\omega})(1-re^{-j\omega_0}e^{-j\omega})}$$

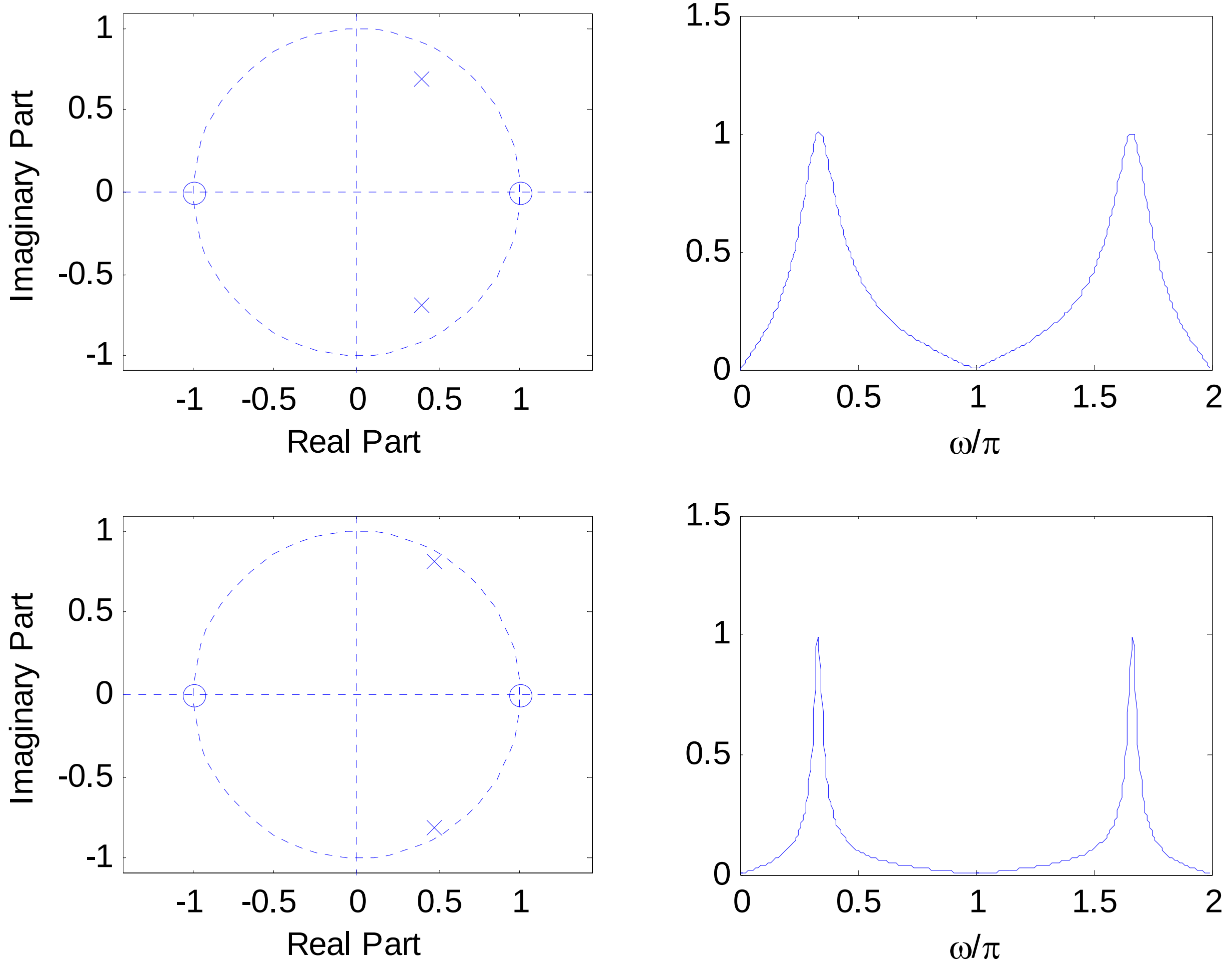
- **b_0保证幅频特性在 ω_0 附近的值为1**

$$H(e^{j\omega_0}) = \frac{b_0(1-e^{-2j\omega_0})}{(1-re^{j\omega_0}e^{-j\omega_0})(1-re^{-j\omega_0}e^{-j\omega_0})} = \frac{b_0(1-e^{-2j\omega_0})}{(1-r)(1-re^{-j2\omega_0})}$$

$$\left|H(e^{j\omega_0})\right| = \frac{b_0\sqrt{2-2\cos 2\omega_0}}{(1-r)\sqrt{1+r^2-2r\cos 2\omega_0}} = 1$$

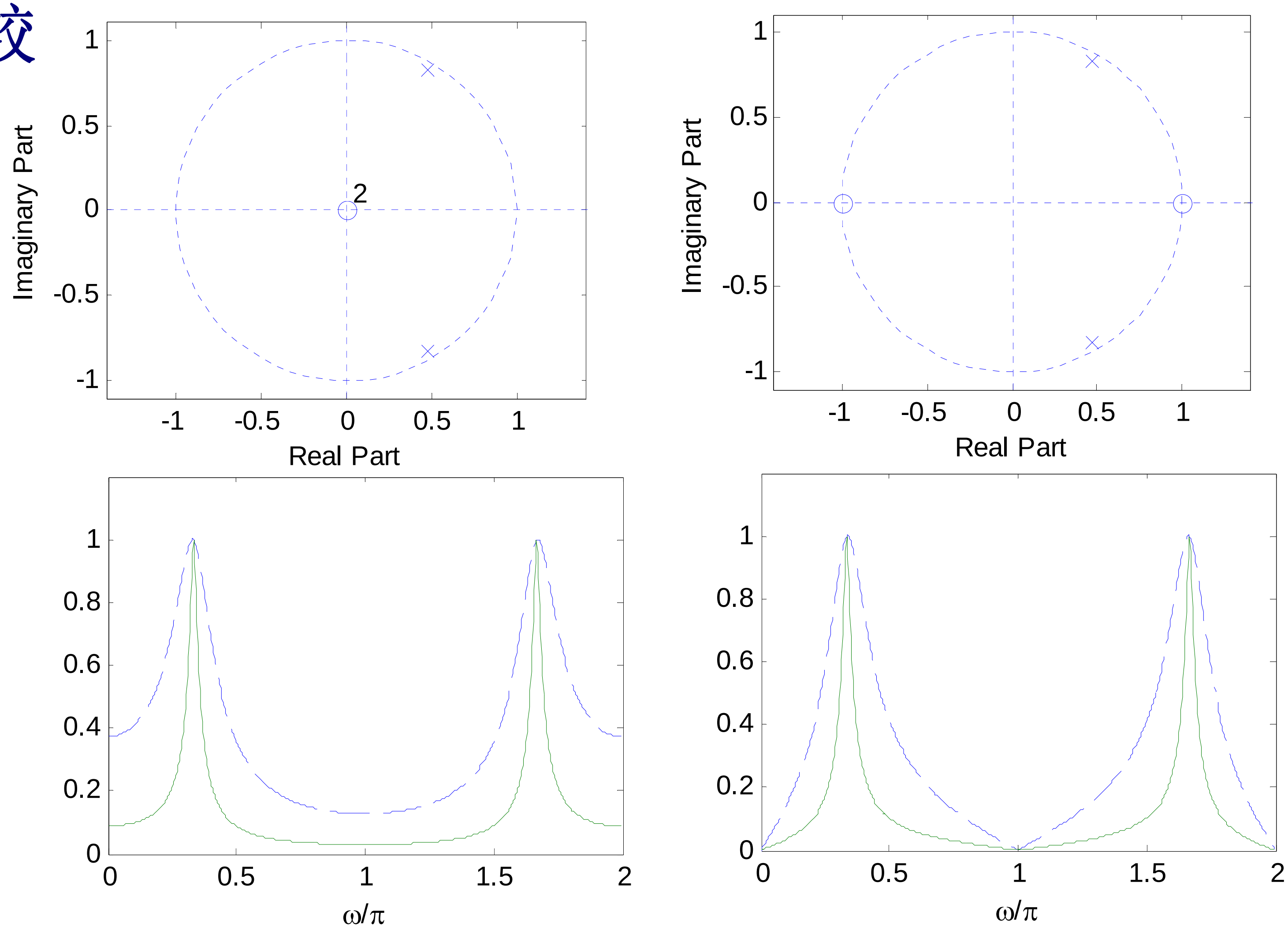
$$\therefore b_0 = (1-r)\sqrt{1+r^2-2r\cos 2\omega_0}$$

$$\omega_0 = \pi / 3,\ r = 0.8, 0.95$$



比较

谐振器1



谐振器2

- 谐振频率？ -- 谐振器1和2的谐振频率有微小变化
- 带宽？ -- 谐振器2的带宽略小于谐振器1
- 幅度？ -- 谐振器2在$\omega=0, \pi, 2\pi$处的幅度为零

例5.4.1 $x_a(t)=\sin 7t+\sin 200t$ 设计数字谐振器，滤除信号中的低频分量。（与例5.3.1比较）

- 解：$$H(z)=\frac{b_0(1-z^{-1})(1+z^{-1})}{(1-re^{j\omega_0}z^{-1})(1-re^{-j\omega_0}z^{-1})},\quad b_0,\omega_0,r=?$$

1）变模拟信号为数字信号

采样间隔 $$\frac{2\pi}{T}\geq 2\omega_{\max}\Rightarrow T<\frac{\pi}{\omega_{\max}}=\frac{\pi}{200}\Rightarrow T=0.002$$

2）滤波器的带宽

高频分量对应的数字频率 $$\frac{\Omega}{\frac{2\pi}{T}}=\frac{\omega}{2\pi}\Rightarrow\omega=\Omega T=200\times 0.002=0.4$$

低频分量对应的数字频率 $$\omega=\Omega T=7\times 0.002=0.014$$

滤波器带宽 $$\Delta\omega=0.02rad>0.014rad$$

$$\Delta\omega=2(1-r)=0.02\quad\therefore r=0.99$$

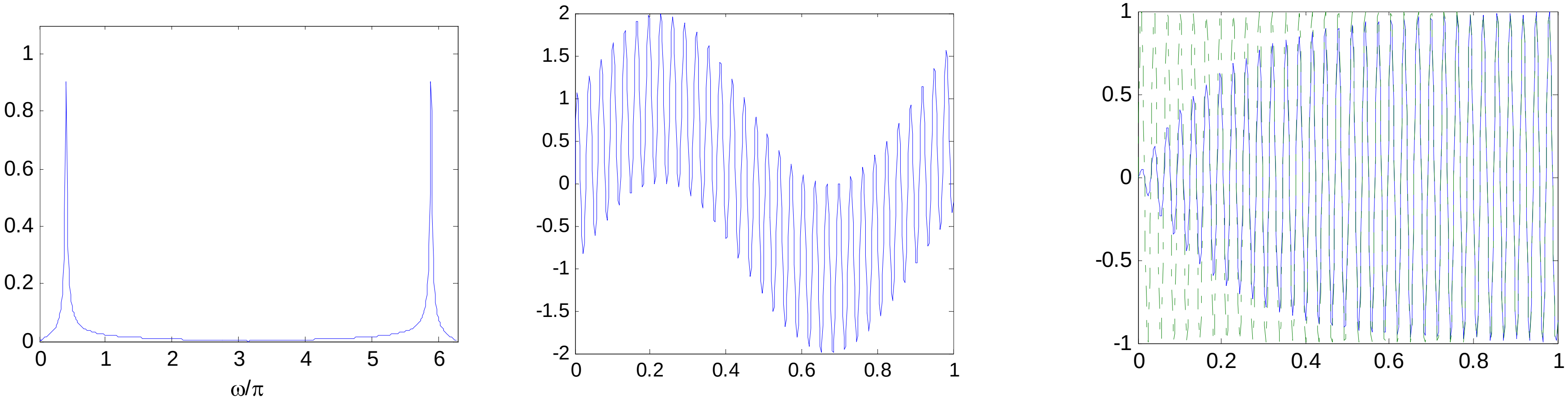
3）滤波器

$$H(z)=\frac{b_0(1-z^{-1})(1+z^{-1})}{(1-re^{j\omega_0}z^{-1})(1-re^{-j\omega_0}z^{-1})}$$

$$=\frac{b_0(1-z^{-1})(1+z^{-1})}{(1-0.99e^{j0.4}z^{-1})(1-0.99e^{-j0.4}z^{-1})}=\frac{b_0(z^2-1)}{z^2-1.8237z+0.9801}$$

4） $b_0=?$ $\qquad \left|H(e^{j0.4})\right|=1\Rightarrow \quad b_0=1/100.49$

P125

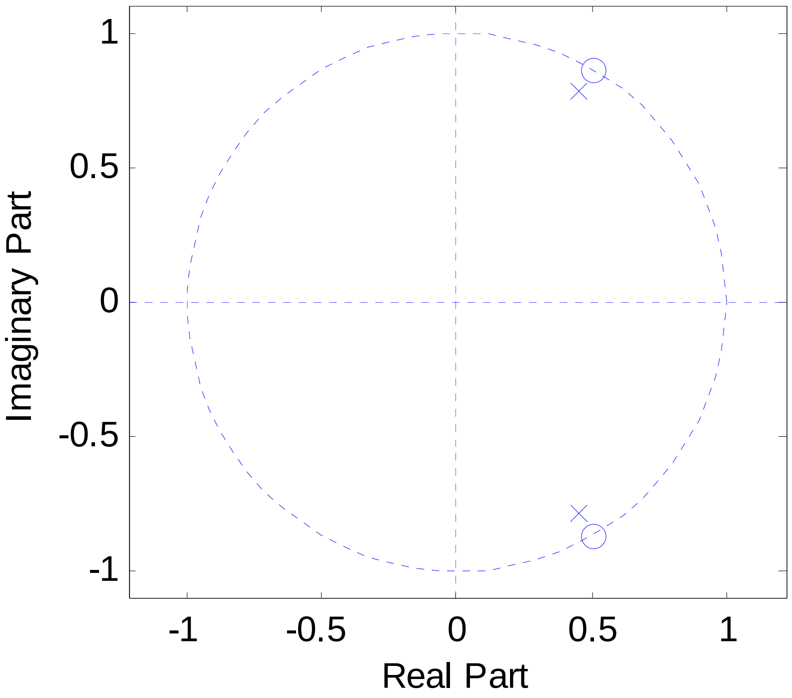


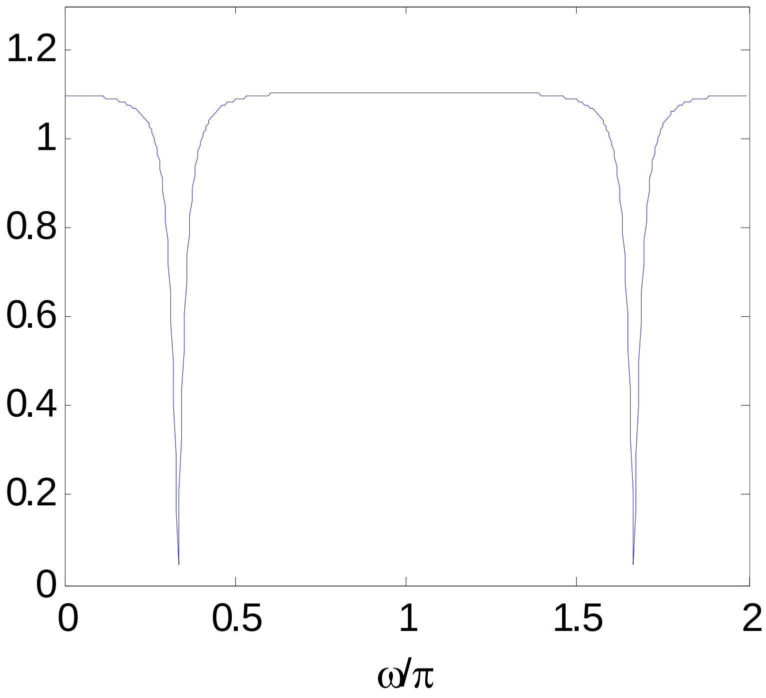
5.5数字陷波器

- 特点：
  - 二阶滤波器
  - 在 $\omega = \pm\omega_0$ 处幅频特性的幅度为零，在其它频率上趋近于常数
  - 有一对共轭零点 $z_{1,2} = e^{\pm j\omega_0}$ ，有一对共轭极点 $p_{1,2} = ae^{\pm j\omega_0}$ ，离开 $\omega = \pm\omega_0$ 频率点，使幅频特性的幅度迅速上升
  - 用于滤除单频干扰
- 系统函数

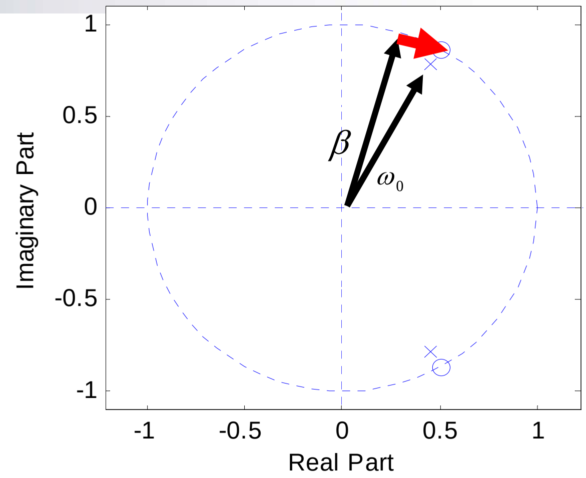
$$H(z) = \frac{(z - e^{j\omega_0})(z - e^{-j\omega_0})}{(z - ae^{j\omega_0})(z - ae^{-j\omega_0})}$$

$$\omega_0 = \pi / 3, a = 0.9$$





陷波器的参数与性能（1）



$$H(z) = \frac{(z - e^{j\omega_0})(z - e^{-j\omega_0})}{(z - ae^{j\omega_0})(z - ae^{-j\omega_0})}$$

$$A = e^{j(\omega_0+\beta)}, \quad \beta = 1 - a$$

$$\left|H(e^{j(\omega_0+\beta)})\right| = \left|\frac{(e^{j(\omega_0+\beta)} - e^{j\omega_0})(e^{j(\omega_0+\beta)} - e^{-j\omega_0})}{(e^{j(\omega_0+\beta)} - ae^{j\omega_0})(e^{j(\omega_0+\beta)} - ae^{-j\omega_0})}\right|$$

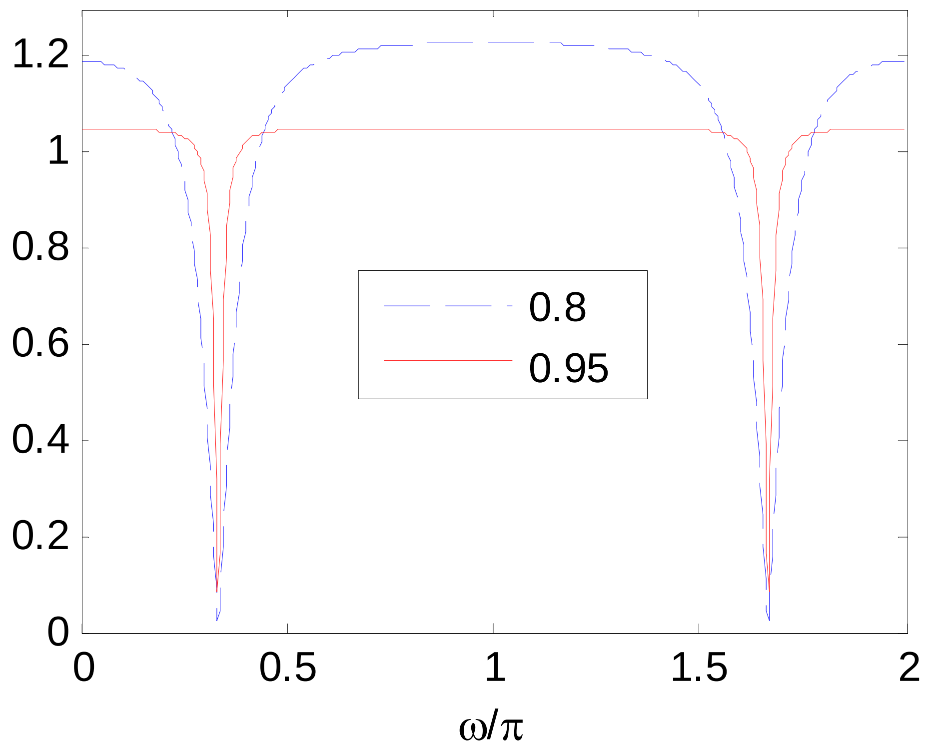
$$\approx \frac{\beta \bullet l}{\sqrt{2}\beta \bullet l} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

- **A点的幅度为3db，** $\omega_0 + \beta$ **为3dB频率**
- 阻带带宽为 $\Delta\omega = 2\beta = 2(1-a)$
- $\omega < \omega_0 - \beta, \quad \omega > \omega_0 + \beta, \quad \left|H(e^{j\omega})\right| \approx 1$

陷波器的参数与性能（2）

$$\Delta\omega = 2\beta = 2(1-a)$$

- a的影响
  - a越大，即极点越靠近零点（越靠近单位圆），陷波器的3dB带宽越窄。



5.6全通滤波器：

- **特征：**
  - 滤波器的幅频特性在整个频带上均等于常数，或为1；
  - 信号通过全通滤波器后，幅度谱保持不变，仅相位谱随着频率改变，起到纯相位滤波的作用。
- 传输函数

$$\left|H(e^{j\omega})\right| = 1, \quad 0 \le \omega \le 2\pi$$

$$H(e^{j\omega}) = e^{j\varphi(\omega)}$$

- 系统函数的一般形式：

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-N+k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}} = \frac{z^{-N} + a_1 z^{-N+1} + a_2 z^{-N+2} + \cdots + a_N}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \cdots + a_N z^{-N}}, a_0 = 1$$

- 或者二阶滤波器形式

$$H(z)=\prod_{i=1}^{L}\frac{z^{-2}+a_{1i}z^{-1}+a_{2i}}{a_{2i}z^{-2}+a_{1i}z^{-1}+1}$$

- 系数均为实数，且分子、分母的系数相同，但排列次序相反
- 下面证明其具有全通幅频特性：

$$H(z)=\frac{\sum_{k=0}^{N}a_k z^{-N+k}}{\sum_{k=0}^{N}a_k z^{-k}}=z^{-N}\frac{\sum_{k=0}^{N}a_k z^{k}}{\sum_{k=0}^{N}a_k z^{-k}}=z^{-N}\frac{D(z^{-1})}{D(z)}$$

$$D(z^{-1})\Big|_{z=e^{j\omega}}=D(e^{-j\omega})=D^{*}(e^{j\omega})$$

$$\therefore\left|H(e^{j\omega})\right|=\left|e^{-j\omega N}\frac{D(e^{-j\omega})}{D(e^{j\omega})}\right|=\left|\frac{D^{*}(e^{j\omega})}{D(e^{j\omega})}\right|=1$$

全通系统 的零极点分布规律(2)

$$H(z) = z^{-N}\frac{D(z^{-1})}{D(z)}$$

- 零极点分布特性：极点和零点互为倒易关系

$$H(z_k) = z_k^{-N}\frac{D(z_k^{-1})}{D(z_k)}$$

$$H(z_k^{-1}) = z_k^{N}\frac{D(z_k)}{D(z_k^{-1})} = \frac{1}{H(z_k)}$$

- 如 z_k 为零点，则 $p_k = z_k^{-1}$ 为极点
- 因零极点共轭成对出现，如 z_k 为零点，z_k^* 为零点；

  且 $p_k = z_k^{-1}, p_k^* = \left(z_k^{-1}\right)^*$ 为极点
- 系统函数可表示为

$$\boxed{H(z) = \prod_{k=1}^{N}\frac{z^{-1} - z_k}{1 - z_k^* z^{-1}}}$$

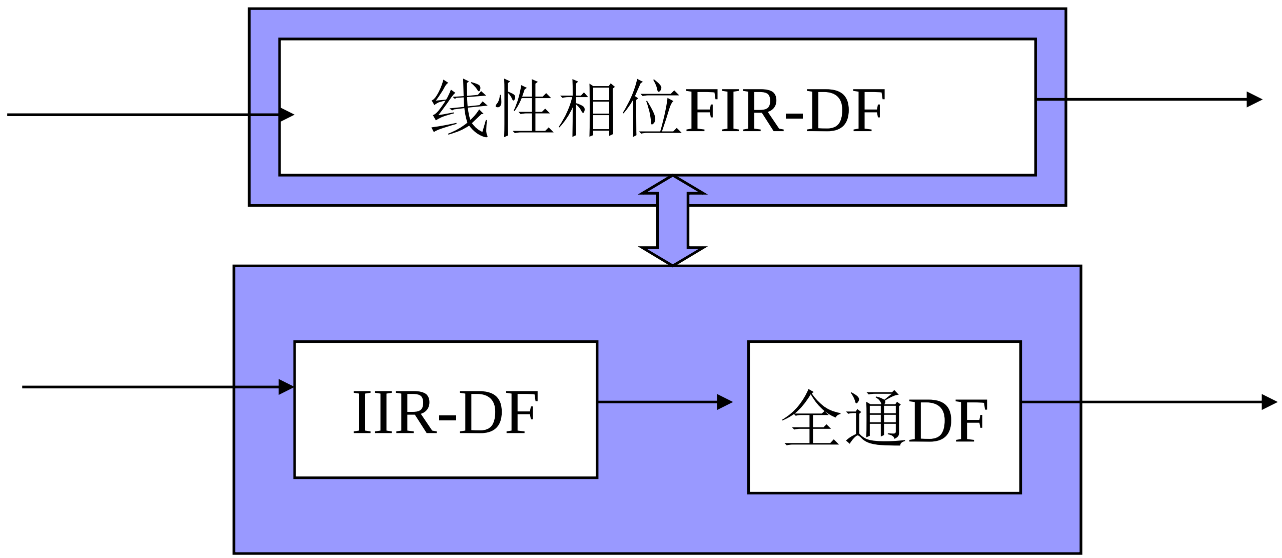
零极点互为共轭倒易关系

全通系统 的零极点分布规律(3)

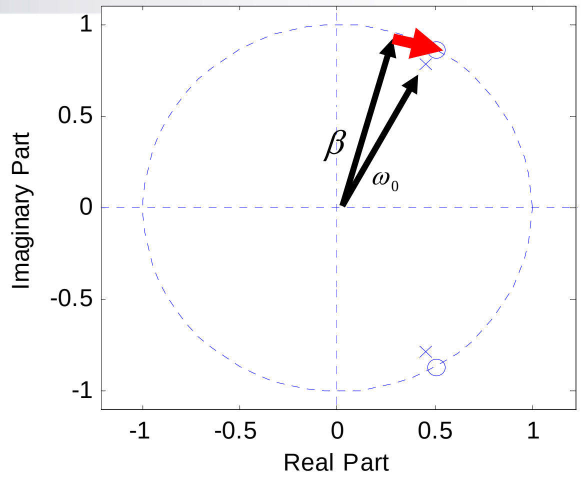
$$H(z)=\prod_{k=1}^{N}\frac{z^{-1}-z_k}{1-z_k^{*}z^{-1}}$$

- **N**：全通函数的阶数。**N**为**1**时，零极点均为实数。
- $\omega=0\rightarrow\pi$ 变化时，相位函数 $\varphi(\omega)$ 的变化量为 $N\pi$ 。
- 不同的**N**和 z_k 对应 各类不同的变换。

全通**DF**的作用：经常用于相位均衡。



5.7最小相位滤波器



- 相位与零极点：

$$H(e^{j\omega}) = Ae^{j\omega(N-M)} \frac{\prod_{k=1}^{M}(e^{j\omega} - z_k)}{\prod_{k=1}^{N}(e^{j\omega} - p_k)}$$

则

$$\varphi(\omega) = \sum_{k=1}^{M} \arg[e^{j\omega} - z_k] - \sum_{k=1}^{N} \arg[e^{j\omega} - p_k] + (N-M)\omega$$

＝零点矢量辐角之和－极点矢量辐角之和＋ $(N-M)\omega$

- 当某一零点（极点）位于单位圆内，当 ω 从 **0** 变到 2π 时，即在**z**平面单位圆上正向（逆时针）旋转一周时，零矢（或极矢）变化为 2π 弧度。

- 当某一零点（极点）位于单位圆外，当 ω 从 **0** 变到 2π 时，即在**z**平面单位圆上正向（逆时针）旋转一周时，零矢（或极矢）变化为**0**。

- 所以当 ω 从**0**变化到 2π 时，只有单位圆内的零极点对相角有影响。若用 Num_{m_1}, Num_{m_0} 表示单位圆内与单位圆外的零点数，以 Num_{p_1}, Num_{p_0} 分别表示单位圆内与单位圆外的极点数，

- 则 $M = Num_{m_1} + Num_{m_0}$ $\quad N = Num_{p_1} + Num_{p_0}$

因果稳定系统 $$\varphi(\omega)=\sum_{k=1}^{M}\arg[e^{j\omega}-z_k]-\sum_{k=1}^{N}\arg[e^{j\omega}-p_k]+(N-M)\omega$$

$$M=Num_{m_1}+Num_{m_0}\quad，\quad Num_{p_0}=0,\quad N=Num_{p_1}$$

当 ω 从0变到 2π 时，即 $\Delta\omega=2\pi$

$$\Delta\varphi(\omega)\big|_{\Delta\omega=2\pi}=2\pi(Num_{m_1}-Num_{p_1})+2\pi[N-M]$$
$$=2\pi(Num_{m_1}-N)+2\pi[N-M]=2\pi[Num_{m_1}-M]=-2\pi Num_{m_0}$$

当 ω 由0而增加时，辐角变化为负，故称之为相位“延时”（滞后）系统。又可分为以下三种情况。

1）当全部零点都在单位圆内，则

$$\Delta\varphi(\omega)\big|_{\Delta\omega=2\pi}=0$$

此时相位变化最小，称之为最小相位系统。

2）当全部零点都在单位圆外，则

$$\Delta\varphi(\omega)\Big|_{\Delta\omega=2\pi} = -2\pi M$$

此时相位变化最大，称之为最大相位系统。

3）单位圆内外都有零点，则称之为“混合相位系统”。

最小相位系统在工程理论中较为重要，其主要特点有：

（1）任何一个非最小相位系统的系统函数**H(z)**均可以由一个最小相位系统 $H_{\min}(z)$ 和一个全通系统 $H_{ap}(z)$ 级联而成，即

$$H(z)=H_{\min}(z)\cdot H_{ap}(z)$$

证明：假设因果稳定系统**H(z)**仅有一个零点在单位圆外，设该零点为 $\mathbf{z}=1/z_0, |z_0|<1$

$$H(z)=H_1(z)(z^{-1}-z_0)\ =H_1(z)(z^{-1}-z_0)\frac{1-z_0^*z^{-1}}{1-z_0^*z^{-1}}$$

$$=H_1(z)(1-z_0^*z^{-1})\bullet\frac{z^{-1}-z_0}{1-z_0^*z^{-1}}$$

$$=H_{\min}(z)\bullet H_{ap}(z)$$

显然， $\left|H(e^{j\omega})\right| = \left|H_{\min}(e^{j\omega})\right|$

意义：将系统位于单位圆外的零（极）点 z_k 用 $\left(z_k^*\right)^{-1}$ 代替时，不会影响系统的幅频响应特性。这一点在滤波器设计中，将单位圆外的极点用其镜像代替，确保**DF**因果稳定。

作用：利用级联全通函数的方法，可将非最小相位系统的零点反射到单位圆内，而构成幅度响应相同的最小相位延时系统。

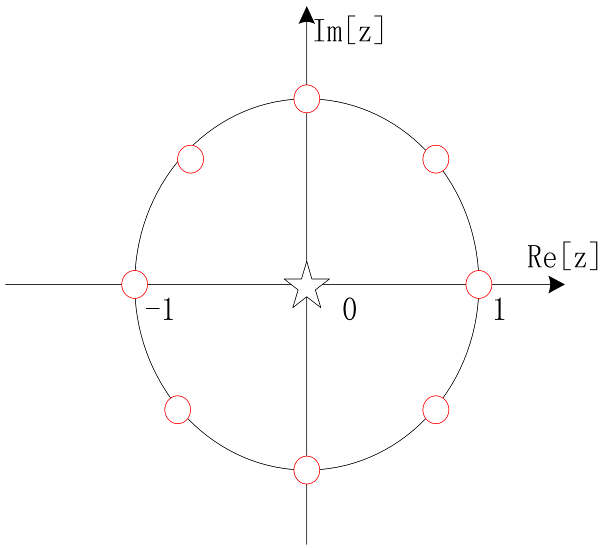
（**2**）在幅频响应特性相同的所有因果稳定系统中，最小相位系统的相位延迟（负的相位值）最小。

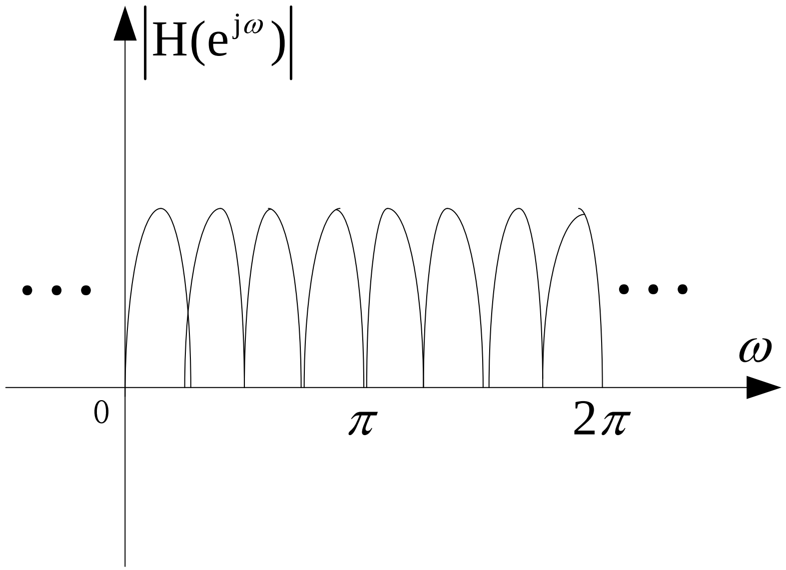
（**3**）最小相位系统保证其逆系统存在。

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)}, \quad H^{-1}(z) = \frac{1}{H(z)} = \frac{B(z)}{A(z)}$$

5.8 梳状滤波器

- 特点





- 构成

$$H(z) \qquad z \Rightarrow z^N \qquad H(z^N)$$

$$H(e^{j\omega}) \quad e^{j\omega} \Rightarrow e^{j\omega N} \quad H(e^{j\omega N})$$

$$0 \sim 2\pi \qquad\qquad 0 \sim 2\pi / N$$

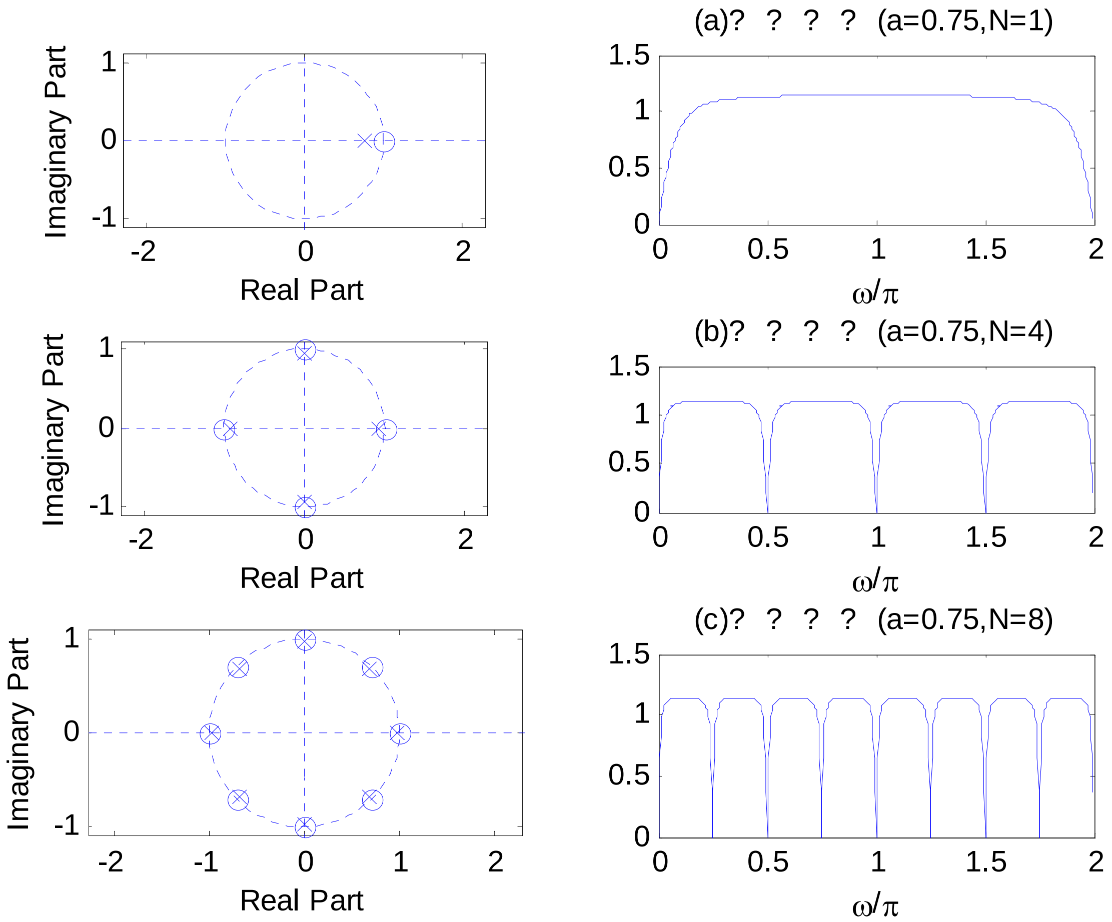
■ 例5.8.1：已知 $H(z)=\dfrac{1-z^{-1}}{1-az^{-1}}$ $0<a<1$ ，设计N=8的梳状滤波器

■ 解：

$$H(z^N)=\frac{1-z^{-N}}{1-az^N}=\frac{z^N-1}{z^N-a}$$

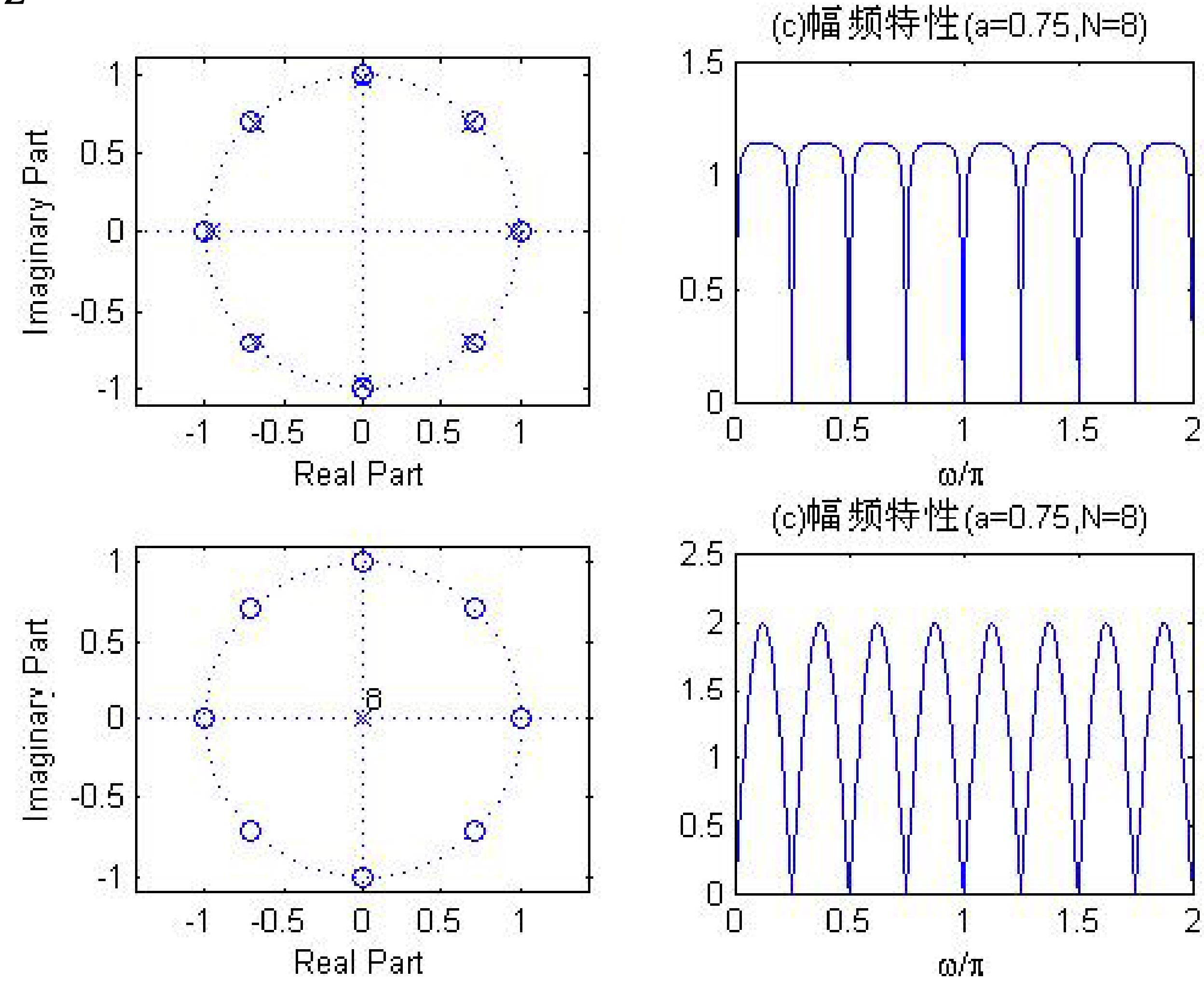
$$N=8$$

$$a=0.75$$



$$H_1(z)=\frac{1-z^{-N}}{1-az^{-N}}=\frac{z^N-1}{z^N-a}\quad,\qquad a=0.75$$

$$H_2(z)=1-z^{-N}$$



- 区别?

- **例5.8.2 设计梳状滤波器，滤除心电图信号中的50Hz及其谐波100Hz干扰，采样频率为200Hz。**
- **解：**

1）梳状滤波器

$$H(z)=\frac{1-z^{-N}}{1-az^{-N}} \quad a=?, N=?$$

2）N=?

50Hz对应的数字频率

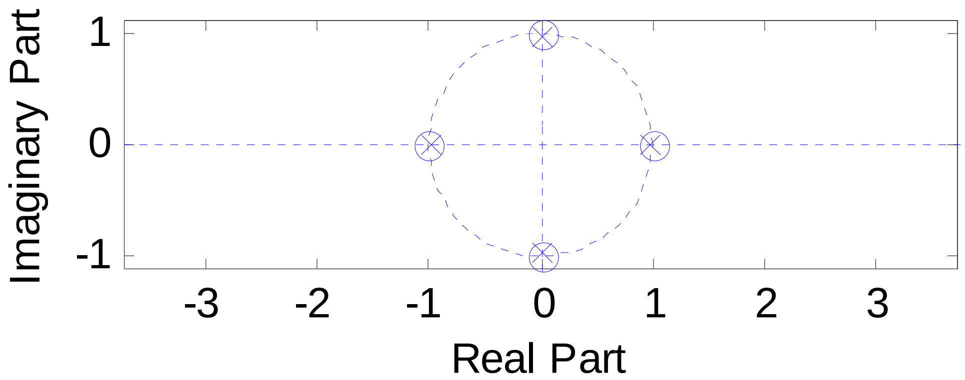
$$\frac{f}{\frac{1}{T}}=\frac{\omega}{2\pi}\Rightarrow \omega=2\pi f/f_s=2\pi\times 50/200=0.5\pi$$

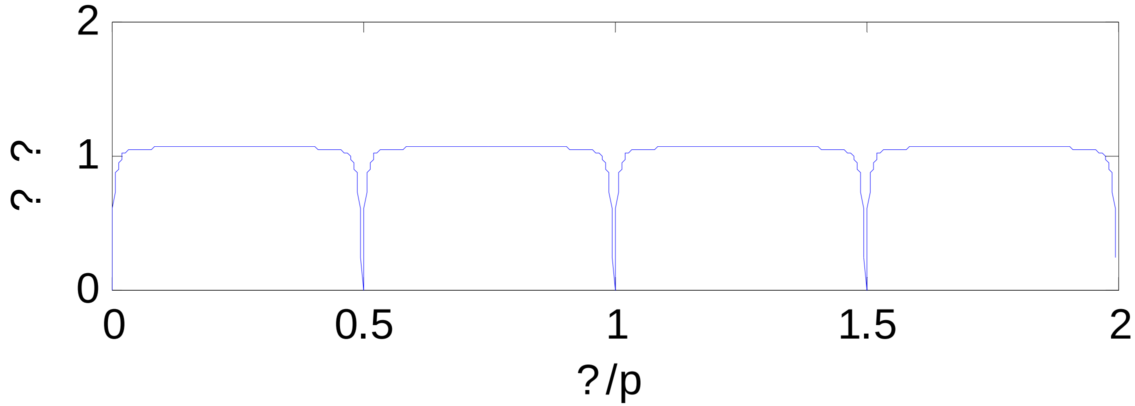
100Hz对应的数字频率

$$\omega=2\pi f/f_s=100/200\times 2\pi=\pi$$

$$\frac{2\pi}{N}=0.5\pi \quad \Rightarrow \quad N=4$$

3)a=?　　　零极点位置靠近，于是 a=0.9





5.9正弦波发生器

- 特征：极点在单位圆上
- 系统函数

$$H_1(z)=\frac{Y_1(z)}{X(z)}=\frac{\sin(\omega_0)z^{-1}}{1-2\cos(\omega_0)z^{-1}+z^{-2}}=\frac{\sin(\omega_0)z}{(z-e^{j\omega_0})(z-e^{-j\omega_0})}$$

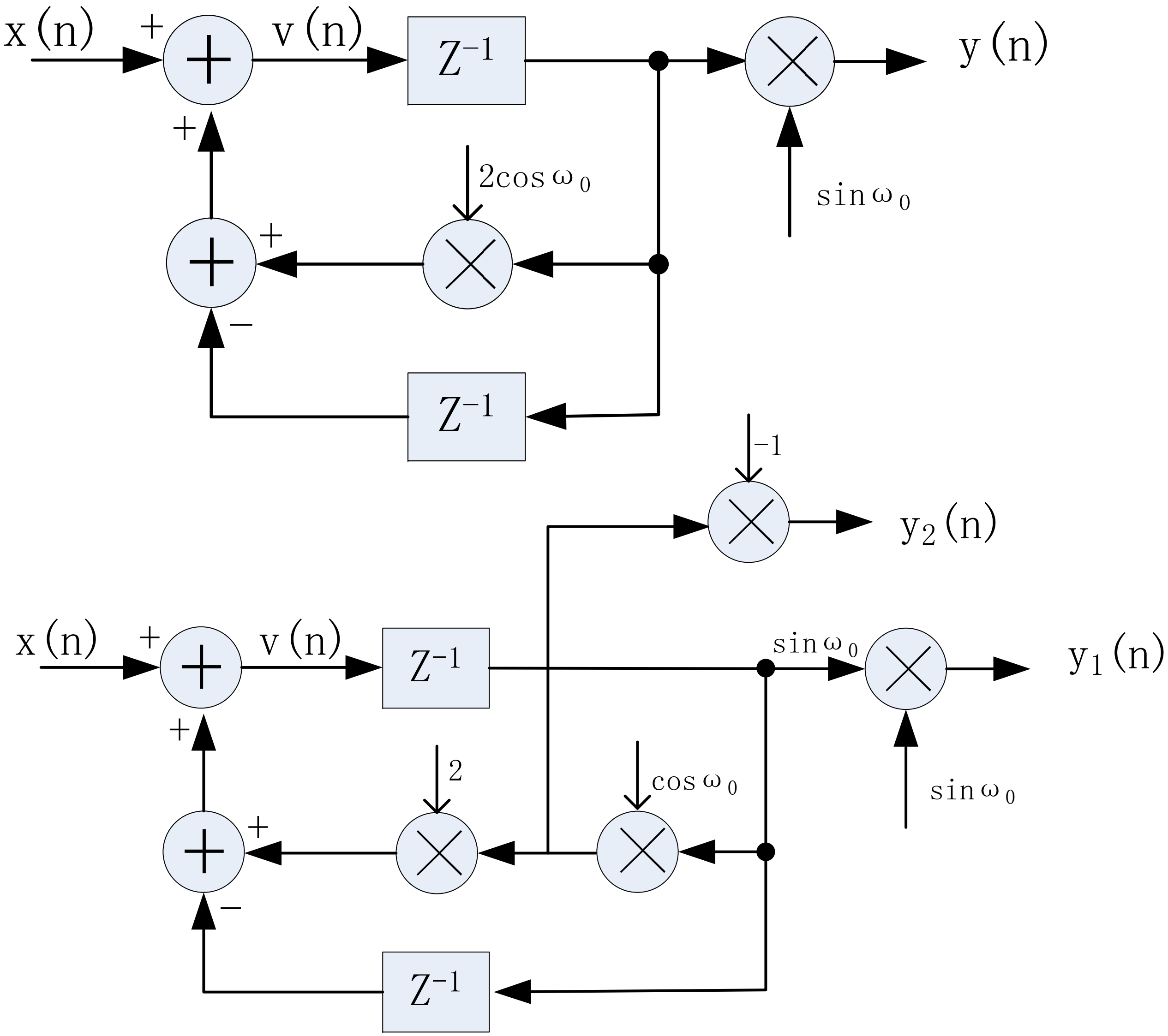
$$H_2(z)=\frac{Y_2(z)}{X(z)}=\frac{1-\cos(\omega_0)z^{-1}}{1-2\cos(\omega_0)z^{-1}+z^{-2}}=\frac{z^2-\cos(\omega_0)z}{(z-e^{j\omega_0})(z-e^{-j\omega_0})}$$

- 输入为 $x(n)=A\delta(n) \quad X(z)=A$
- 系统的响应

$$Y_1(z)=\frac{A\sin(\omega_0)z^{-1}}{1-2\cos(\omega_0)z^{-1}+z^{-2}} \quad Y_2(z)=\frac{A(1-\cos(\omega_0)z^{-1})}{1-2\cos(\omega_0)z^{-1}+z^{-2}}$$

- 时域响应

$$y_1(n)=A\sin(\omega_0 n)u(n) \quad y_2(n)=A\cos(\omega_0 n)u(n)$$



x(n)
+
v(n)
Z-1
y(n)
+
2cos ω0
sin ω0
+
−
Z-1
−1
y2(n)
x(n)
+
v(n)
Z-1
sin ω0
y1(n)
+
2
cos ω0
sin ω0
+
−
Z-1

总结

- 理想滤波器
- 典型滤波器的特征与设计
  - 一阶滤波器、二阶滤波器、
  - 数字谐振器、
  - 数字陷波器、
  - 全通滤波器、
  - 最小相位滤波器、
  - 梳状滤波器、
  - 正弦波发生器。

作业

- **P131-133:**

  1, 5, 11, 12, 15