

2.4 利用Z变换对信号和系统进行分析

王柯俨

kywang@mail.xidian.edu.cn

<http://web.xidian.edu.cn/kywang/teach.html>



Z变换域分析的意义

- 便于考察信号、系统的特征
- 便于系统的分析与设计
- 比傅立叶变换的应用范围广

2.4.1 系统的传输函数和系统函数

■ 系统的时域描述—单位脉冲响应 $h(n)$

$$h(n) = T[\delta(n)]$$

$$y(n) = h(n) * x(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(n-m)$$

■ 系统的传输函数

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)e^{-j\omega n}$$

表示系统的频率响应特性

系统的传输函数的意义 (1)

$$x(n) = e^{j\omega_0 n} \quad -\infty < n < \infty \quad (\text{单频复指数序列})$$

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)e^{j\omega_0(n-m)} = e^{j\omega_0 n} \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)e^{-j\omega_0 m}$$

$$= e^{j\omega_0 n} H(e^{j\omega_0}) = |H(e^{j\omega_0})| e^{j[\omega_0 n + \arg H(e^{j\omega_0})]}$$

- 输出同频 (ω_0) 复指数序列
- 幅度受频率响应幅度 $|H(e^{j\omega_0})|$ 加权
- 相位为输入相位与系统相位响应之和
- 传输函数的作用: 改变复指数序列的幅度和相位

系统的传输函数的意义 (2)

- 输入一般信号 $x(n)$ ，其输出信号 $y(n)$ 的频谱函数为

$$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega})$$

- 输出信号的频谱取决于输入信号的频谱特性和系统的传输函数
- 传输函数起着改变信号频谱结构的作用， $H(e^{j\omega})$ 称为系统的频率响应函数
- 设计不同的频率响应函数，实现对信号的放大、滤波、相位均衡等功能

系统函数

- 定义

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)z^{-n}$$

- 表征系统的复频域特性

- 如果 $H(z)$ 的收敛域包含单位圆 $|z|=1$ ，则序列的傅立叶变换存在

$$H(e^{j\omega}) = H(z) \Big|_{z=e^{j\omega}}$$

- 系统的传输函数是系统单位脉冲响应在单位圆上的Z变换，有时亦将系统函数称为传输函数

2.4.2 根据系统函数极点的分布分析系统的因果性和稳定性

■ 系统函数的极点


$$y(n) = \sum_{i=0}^M b_i x(n-i) - \sum_{i=1}^N a_i y(n-i) \Rightarrow \sum_{i=0}^M b_i x(n-i) = \sum_{i=0}^N a_i y(n-i)$$

■ Z变换，得系统函数

$$\sum_{i=0}^M b_i z^{-i} X(z) = \sum_{i=0}^N a_i z^{-i} Y(z) \Rightarrow H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{i=0}^M b_i z^{-i}}{\sum_{i=0}^N a_i z^{-i}}$$

■ 因式分解

$$H(z) = A \frac{\prod_{r=1}^M (1 - c_r z^{-1})}{\prod_{r=1}^N (1 - d_r z^{-1})}$$


$$H(z) = A \frac{\prod_{r=1}^M (1 - c_r z^{-1})}{\prod_{r=1}^N (1 - d_r z^{-1})}$$

- **A**是常数，仅影响输出信号的幅度
- C_r 是 $H(z)$ 的零点， d_r 是 $H(z)$ 的极点
- 零、极点分布都将影响系统的频率特性
- 只有极点分布影响系统的因果性和稳定性

因果性

- 单位脉冲响应是因果序列，其Z变换的收敛域为

$$R_{x-} < |z| \leq \infty$$

- 因果序列Z变换的极点在以 R_{x-} 为半径的圆内

- **结论:**

因果系统的系统函数的极点均集中在某个圆内；

收敛域如下，包含 ∞ 。

$$R_{x-} < |z| \leq \infty$$

稳定性

- 稳定:

序列 $h(n)$ 绝对可和, 即

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty$$

- Z变换的收敛域:

$h(n)$ 的z变换

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\| h(n) z^{-n} \right\|_{z=1} < \infty$$

系统稳定: 系统函数的收敛域包含单位圆;

系统函数的极点不在单位圆上

因果稳定系统: 系统函数的极点在单位圆内

例：一系统的极点有：

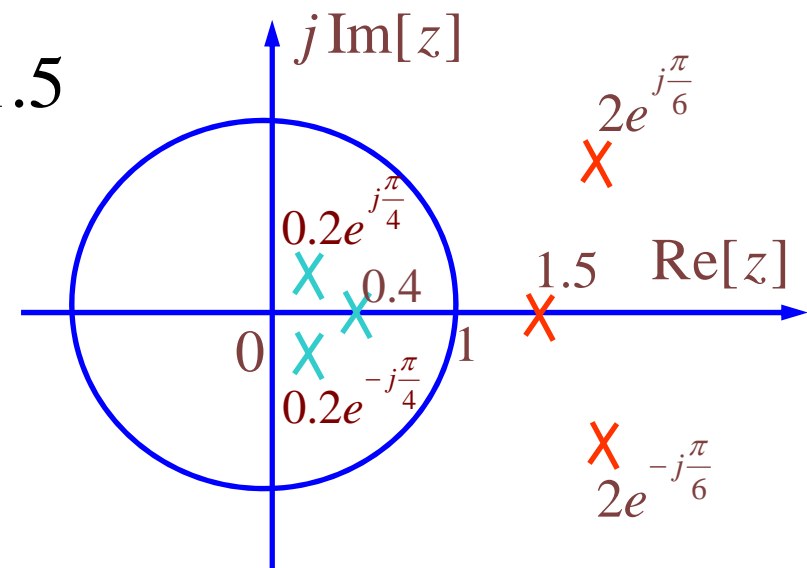
$$0.2e^{j\pi/4}, 0.2e^{-j\pi/4}, 0.4, 2e^{j\pi/6}, 2e^{-j\pi/6}, 1.5$$

问什么情况下，系统为因果系统，

什么情况下，系统为稳定系统

解：因果系统： $|z| > 2$

稳定系统： $0.4 < |z| < 1.5$



例：已知 $H(z) = \frac{1-a^2}{(1-az^{-1})(1-az)}$ $|a| < 1$, 分析系统的因果性和稳定性

解：系统的极点为 $z = a, a^{-1}$

(1) 收敛域取 $|a^{-1}| < z \leq \infty$

收敛域包含 ∞ ，是因果系统

收敛域不包含单位圆，系统不稳定

单位脉冲响应为 $h(n) = a^n - a^{-n}$

(2) 收敛域取 $a < |z| < a^{-1}$

收敛域不包含 ∞ ，不是因果系统

收敛域包含单位圆，系统稳定

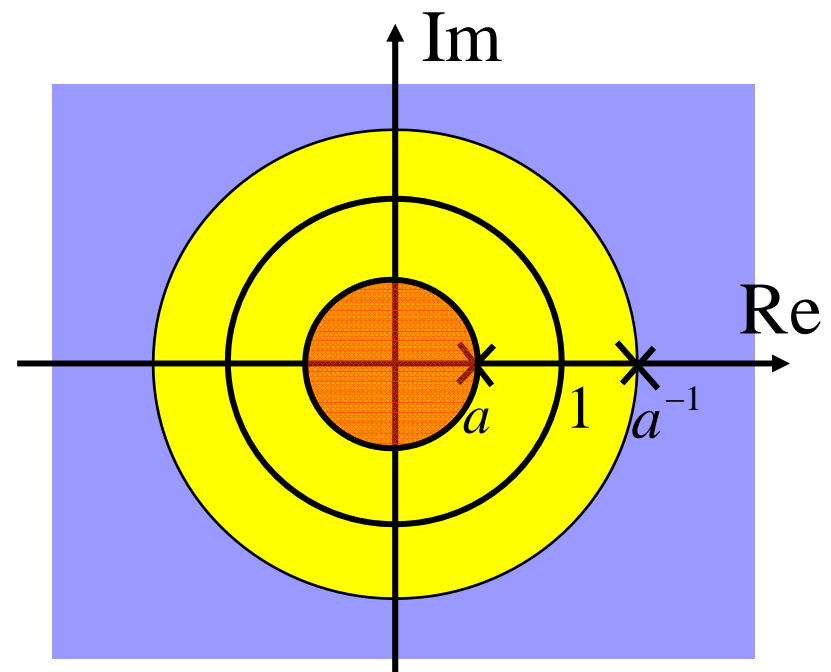
单位脉冲响应为 $h(n) = a^{|n|}$

(3) 收敛域取 $|z| < |a|$

收敛域不包含 ∞ ，不是因果系统

收敛域不包含单位圆，系统不稳定

单位脉冲响应为 $h(n) = (a^{-n} - a^n)u(-n-1)$



2.4.3 用Z变换求解系统的输出响应

- 递推法：已知差分方程、初始条件，递推求解差分方程
- 卷积
- **Z变换：**
 - 系统输出响应：零状态响应和零输入相应
稳态响应和暂态响应
- Matlab

1. 零状态响应与零输入响应

- 已知系统的 **M** 阶差分方程，输入信号 **$x(n)$** 是因果序列，系统初始条件为 **$y(-1), y(-2), \dots, y(-M)$** .

$$y(n) = \sum_{i=0}^M b_i x(n-i) - \sum_{i=1}^N a_i y(n-i)$$

- 系统的零状态响应和零输入响应？

1. 零状态响应与零输入响应

$$y(n) = \sum_{i=0}^M b_i x(n-i) - \sum_{i=1}^N a_i y(n-i)$$

■ 移位序列的Z变换

$$\begin{aligned} ZT[y(n-m)u(n)] &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n-m)u(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} y(n-m)z^{-n} \\ &= \sum_{n-m=l}^{\infty} y(l)z^{-(l+m)} = z^{-m} \sum_{l=0}^{\infty} y(l)z^{-l} + \sum_{l=-m}^{-1} y(l)z^{-(l+m)} \\ &= z^{-m}Y(z) + z^{-m} \sum_{l=-m}^{-1} y(l)z^{-l} \end{aligned}$$

$$ZT[y(n-1)] = z^{-1}Y(z) + y(-1)$$

$$ZT[y(n-2)] = z^{-2}Y(z) + z^{-1}y(-1) + y(-2)$$

$$ZT[y(n-3)] = z^{-3}Y(z) + z^{-2}y(-1) + z^{-1}y(-2) + y(-3)$$

$$ZT[x(n-m)u(n)] = z^{-m} \left[X(z) + \sum_{l=-m}^{-1} x(l)z^{-l} \right] = z^{-m} X(z)$$

■ 系统的差分方程

$$\sum_{i=0}^M b_i x(n-i) = \sum_{i=0}^N a_i y(n-i)$$

■ Z变换

$$\sum_{i=0}^M b_i z^{-i} X(z) = \sum_{i=0}^N a_i \left[z^{-i} Y(z) + z^{-i} \sum_{l=-i}^{-1} y(l) z^{-l} \right]$$

$$\sum_{i=0}^M b_i z^{-i} X(z) - \sum_{i=0}^N a_i z^{-i} \sum_{l=-i}^{-1} y(l) z^{-l} = \sum_{i=0}^N a_i z^{-i} Y(z)$$

$$\therefore Y(z) = \frac{\sum_{i=0}^M b_i z^{-i} X(z)}{\sum_{i=0}^N a_i z^{-i}} - \frac{\sum_{i=0}^N a_i z^{-i} \sum_{l=-i}^{-1} y(l) z^{-l}}{\sum_{i=0}^N a_i z^{-i}}$$

$$Y(z) = \frac{\sum_{i=0}^M b_i z^{-i}}{\sum_{i=0}^N a_i z^{-i}} X(z) - \frac{\sum_{i=0}^N a_i z^{-i} \sum_{l=-i}^{-1} y(l) z^{-l}}{\sum_{i=0}^N a_i z^{-i}}$$

- 第一项与系统和输入信号有关，与初始状态无关


系统的零状态响应

- 第二项与系统和初始状态有关，与输入信号无关

系统的零输入响应

- 系统的响应

全响应 = 系统的零输入响应 + 系统的零状态响应




例**2.4.2** 已知系统的差分方程为 $y(n) = by(n-1) + x(n)$, $|b| < 1$
输入信号为 $x(n) = a^n u(n)$, $|a| \leq 1$, 初始条件为 $y(-1) = 2$
求系统的输出。

解：对输入信号和差分方程进行**Z**变换

$$X(z) = ZT[a^n u(n)] = \frac{1}{1 - az^{-1}}, \quad |z| > |a|$$

$$Y(z) = bz^{-1}Y(z) + by(-1) + X(z)$$

$$Y(z) = \frac{by(-1) + X(z)}{1 - bz^{-1}}$$


$$Y(z) = \frac{by(-1) + X(z)}{1 - bz^{-1}} = \frac{by(-1)}{1 - bz^{-1}} + \frac{X(z)}{1 - bz^{-1}}$$

代入初始条件及输入

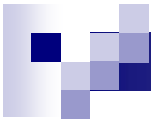
$$Y(z) = \frac{2b}{1 - bz^{-1}} + \frac{1}{(1 - bz^{-1})(1 - az^{-1})}$$

$$Y(z) = \frac{2b}{1 - bz^{-1}} + \frac{1}{a - b} \left[\frac{a}{(1 - az^{-1})} - \frac{b}{(1 - bz^{-1})} \right]$$

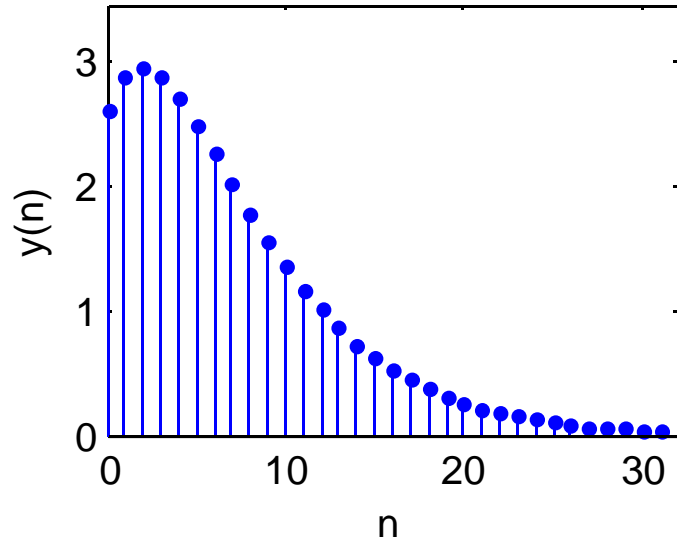
收敛域取: $|z| > \max\{|a|, |b|\}$

系统输出: $y(n) = 2b \cdot b^n u(n) + \frac{1}{a - b} (a \cdot a^n - b \cdot b^n) u(n)$

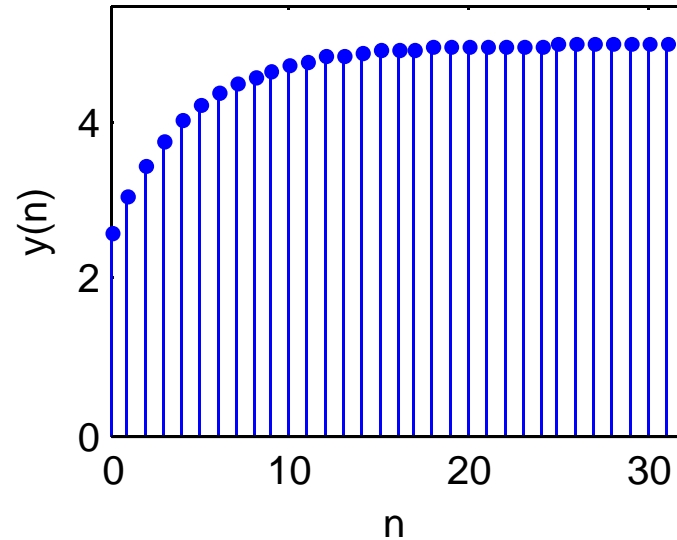
$$y(n) = 2b^{n+1} u(n) + \frac{1}{a - b} (a^{n+1} - b^{n+1}) u(n)$$



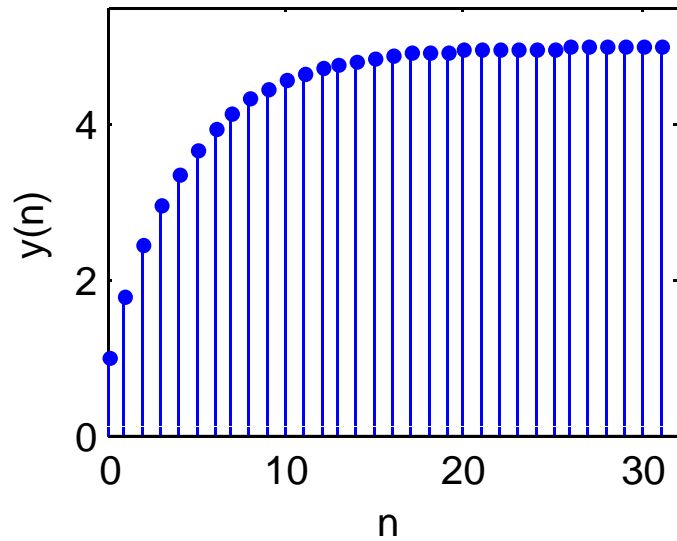
(a) $b=0.8, a=0.8, y(-1)=2$ 全响应



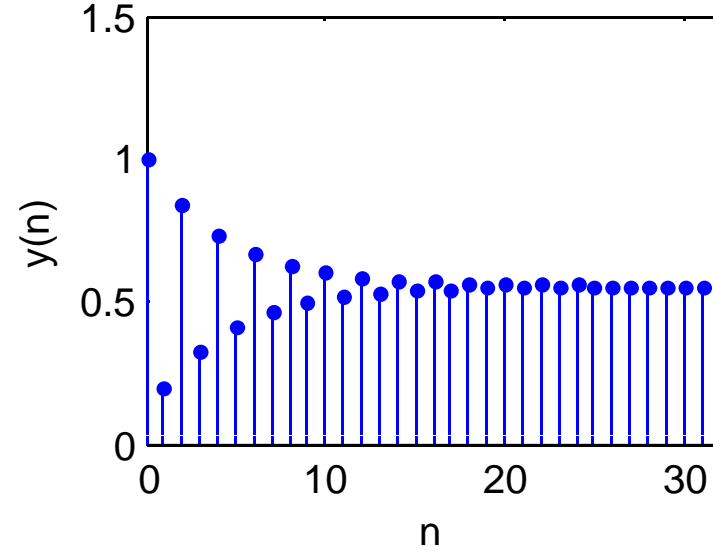
(b) $b=0.8, a=1, y(-1)=2$ 全响应



(c) $b=0.8, a=1, y(-1)=0$ 零状态响应



(d) $b=-0.8, a=1, y(-1)=0$ 零状态响应



2. 稳态响应和暂态响应

$$Y(z) = \frac{\sum_{i=0}^M b_i z^{-i} X(z)}{\sum_{i=0}^N a_i z^{-i}} = \frac{\sum_{i=0}^N a_i z^{-i} \sum_{l=-i}^{-1} y(l) z^{-l}}{\sum_{i=0}^N a_i z^{-i}}$$

- 系统的零状态响应

$$Y(z) = H(z)X(z)$$

- 系统的时域零状态响应

$$y(n) = IZT[Y(z)]$$



- 系统的稳态响应

$$y_{ss}(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} y(n)$$

- 如果系统**不稳定**， $y_{ss}(n)$ 将会无限制的增长，而和输入信号无关
- 如果系统**稳定**， $y_{ss}(n)$ 将取决于输入信号和系统的频率特性。

例: $x(n) = Au(n)$

$$X(z) = ZT[x(n)] = \frac{A}{1-z^{-1}}$$

■ 零状态响应

$$Y(z) = H(z)X(z) = H(z) \frac{A}{1-z^{-1}}$$

■ 展为部分分式

$$Y(z) = \frac{r}{1-z^{-1}} + [H(z) \text{的极点构成的部分分式之和}]$$

$$\text{其中, } r = (z-1)H(z) \frac{Az}{z-1} \Big|_{z=1} = AH(1)$$

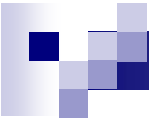

$$Y(z) = \frac{AH(1)}{1-z^{-1}} + [H(z)\text{的极点构成的部分分式之和}]$$

- 若系统稳定， $H(z)$ 的极点在单位圆内，第二部分所对应的时域序列收敛，即当 $n \rightarrow \infty$ ，这部分序列趋于**0**，称为系统的**暂态响应**

- **稳态响应为：**

$$\begin{aligned} y_{ss}(n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} [y(n)] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} [AH(1)1^n u(n)] = AH(1) \end{aligned}$$

- **稳态响应与系统的输入信号和频率特性有关**


$$Y(z) = \frac{AH(1)}{1-z^{-1}} + [H(z)\text{的极点构成的部分分式之和}]$$

- 如果系统不稳定，**H(z)**的部分或全部极点在单位圆外，第二部分所对应的序列发散。当 $n \rightarrow \infty$ ，这部分序列趋于无限大。
- 系统的输出与输入信号无关

例2.4.3 已知系统的输入信号 $x(n) = u(n)$ ，系统函数为

$$H(z) = \frac{2z^{-1} - z^{-2}}{(1 - 2z^{-1})(1 + 0.5z^{-1})}$$

求系统的零状态输响应，并分析系统及输出响应的稳定性。

解：系统的零状态响应为：

$$Y(z) = H(z)X(z) = \frac{2z^{-1} - z^{-2}}{(1 - 2z^{-1})(1 + 0.5z^{-1})} \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

展为部分分式

$$Y(z) = \frac{-2/3}{1 - z^{-1}} + \frac{6/5}{1 - 2z^{-1}} + \frac{-18/15}{1 + 0.5z^{-1}}$$

$$Y(z) = \frac{-2/3}{1-z^{-1}} + \frac{6/5}{1-2z^{-1}} + \frac{-18/15}{1+0.5z^{-1}}$$

极点为: **$z=1, 2, -0.5$**

取收敛域 $|z| > 2$,

输出响应为:

$$y(n) = -\frac{2}{3}1^n - \frac{6}{5}2^n - \frac{18}{15}(-0.5)^n \quad n \geq 0$$

输入信号

系统的
不稳定极点

系统的
稳定极点

系统的稳定性? $n \rightarrow \infty, y \rightarrow ?$

$$Y(z) = \frac{-2/3}{1-z^{-1}} + \frac{6/5}{1-2z^{-1}} + \frac{-18/15}{1+0.5z^{-1}}$$

极点变为: $z=1, 0.8, -0.5$

$$H_1(z) = \frac{2z^{-1} - z^{-2}}{(1-0.8z^{-1})(1+0.5z^{-1})}$$

$$Y_1(z) = H_1(z)X(z) = \frac{10/3}{1-z^{-1}} + \frac{-13/30}{1-0.8z^{-1}} + \frac{-40/39}{1+0.5z^{-1}}$$

系统稳定, 取收敛域 $|z| > 1$

输出响应为:

$$y_1(n) = \frac{10}{3}1^n - \frac{30}{13}(0.8)^n - \frac{40}{39}(-0.5)^n \quad n \geq 0$$

稳态响应为:

$$y_{1ss}(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_1(n) = \frac{10}{3}1^n = \frac{10}{3} = H_1(z)|_{z=1}$$

稳态输出的结论

- 条件：系统稳定，输入为单位阶跃序列 $u(n)$ ，
- 系统的稳态输出为

$$y_{ss}(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} [y(n)] = H(z) \Big|_{z=1}$$

例：设二阶系统 $H(z) = \frac{z^{-2}}{1 + \alpha z^{-1} + \beta z^{-2}}$ ，输入为 $u(n)$ ，

其稳态输出为

$$y_{ss}(n) = H(z) \Big|_{z=1} = \frac{1}{1 + \alpha + \beta}$$

基于差分方程的稳态输出求解

$$H(z) = \frac{z^{-2}}{1 + \alpha z^{-1} + \beta z^{-2}}$$

- 该系统稳定，其差分方程如下：

$$y(n) + \alpha y(n-1) + \beta y(n-2) = x(n-2)$$

- 输入为 $u(n)$ ，当 $n \rightarrow \infty$

$$y(n) \approx y(n-1) \approx y(n-2) = y_{ss}(n)$$

$$x(n-2) = 1$$

- 于是

$$y_{ss}(n)(1 + \alpha + \beta) = 1 \quad \Rightarrow \quad y_{ss}(n) = \frac{1}{1 + \alpha + \beta}$$

例2.4.4 因果稳定系统的传输函数和系统函数分别为： $H(e^{j\omega})$
 $H(z)$ ，幅频特性表示为 $A(\omega) = |H(e^{j\omega})|$ ，相频特性表示为：
 $\theta(\omega) = \arg[H(e^{j\omega})]$ ，输入为 $x(n) = \cos(\omega_0 n)u(n)$ ，求 $y_{ss}(n)$

解：先求复指数序列 $e^{j\omega_0 n}$ 的稳态输出

令 $x(n) = e^{j\omega_0 n}u(n)$ ，其Z变换为

$$X(z) = \frac{1}{1 - e^{j\omega_0} z^{-1}}$$

■ 系统的零状态输出为

$$Y(z) = H(z)X(z) = \frac{1}{1 - e^{j\omega_0} z^{-1}} H(z)$$

■ 部分分式展开


$$Y(z) = \frac{r}{1 - e^{j\omega_0} z^{-1}} + [H(z)\text{极点形成的部分分式}]$$

$$\begin{aligned} \text{式中, } r &= \frac{1}{z} (z - e^{j\omega_0}) \frac{z}{z - e^{j\omega_0}} H(z) \Big|_{z=e^{j\omega_0}} = H(e^{j\omega_0}) \\ &= A(\omega_0) e^{j\theta(\omega_0)} \end{aligned}$$

- 系统稳定，系统函数的极点在单位圆内，当 $n \rightarrow \infty$

H(z)极点引起的序列趋于零。

$$\begin{aligned} y_{ss}(n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} y(n) = IZT \left[\frac{r}{1 - e^{j\omega_0} z^{-1}} \right] \\ &= r e^{j\omega_0 n} = H(e^{j\omega_0}) e^{j\omega_0 n} = A(\omega_0) e^{j[\omega_0 n + \theta(\omega_0)]} \end{aligned}$$


$$y_{ss}(n) = H(e^{j\omega_0})e^{j\omega_0 n} = A(\omega_0)e^{j[\omega_0 n + \theta(\omega_0)]}$$

- 对于因果稳定系统

- 输入复指数序列 $e^{j\omega_0 n}$ ，稳态响应为同频率的复指数序列

- 输出的幅度与相位取决于 ω_0 处的传输函数

- 余弦序列是复指数序列的实部，因果稳定系统对于余弦序列的稳态输出为：

$$y_{css}(n) = \text{Re}[y_{ss}(n)] = A(\omega_0)\cos[\omega_0 n + \theta(\omega_0)]$$

- 因果稳定系统对于正弦序列的稳态输出为：

$$y_{sss}(n) = \text{Im}[y_{ss}(n)] = A(\omega_0)\sin[\omega_0 n + \theta(\omega_0)]$$

2.4.4 系统稳定性的测定及稳定时间的计算

■ 稳定性的判定

- 判断极点是否在单位圆内；
- 用单位阶跃信号进行测试；

■ 稳定时间

工程上，系统的输出中暂态响应的幅度减小到最大值的1%，就认为系统进入稳态。

$$\left| \frac{y(M)}{\max[y(n)]} \right| < 1\% \quad n = 0, 1, \dots$$

当 $n > M$ 时，上式成立，则 MT 为稳定时间

例：设 $H(z)$ 有一个实数极点 ρ_1 和一对复数极点 $\rho_2 e^{j\omega_0}$, $\rho_2 e^{-j\omega_0}$,

系统的输入是单位阶跃序列，系统的输出为：

$$Y(z) = \frac{H(1)}{1-z^{-1}} + [H(z)\text{的极点构成的部分分式之和}]$$

$$Y(z) = \frac{k_1}{1-\rho_1 z^{-1}} + \frac{a}{1-\rho_2 e^{j\omega_0} z^{-1}} + \frac{a^*}{1-\rho_2 e^{-j\omega_0} z^{-1}} + \frac{H(1)}{1-z^{-1}}$$

$$y(n) = k_1 \rho_1^n + a \rho_2^n e^{j\omega_0 n} + a^* \rho_2^n e^{-j\omega_0 n} + \text{稳态响应}$$

$$y(n) = k_1 \rho_1^n + k_2 \rho_2^n \sin(j\omega_0 n + k_3) + \text{稳态响应}$$

暂态响应

$$y_1(n) = k_1 \rho_1^n + k_2 \rho_2^n \sin(j\omega_0 n + k_3)$$

- 系统稳定 $|\rho_1| < 1, |\rho_2| < 1$

- 稳定时间估算公式:

设 $\rho = \max[|\rho_1|, |\rho_2|]$

定义时间常数 $-1/\ln \rho$

则达到暂态峰值的**1%**所需采样间隔数

$$\alpha = \lfloor -4.5 / \ln \rho \rfloor$$

- 估算系统到达稳态值的时间（右表）

ρ	α	ρ^α
0.99	448	0.011
0.95	88	0.011
0.9	43	0.011
0.8	21	0.009
0.5	7	0.007
0.3	4	0.008

2.4.5 根据系统的零极点分布，分析系统的频率特性

- 系统差分方程：

$$\sum_{i=0}^M b_i x(n-i) = \sum_{i=0}^N a_i y(n-i)$$

- 系统函数

$$H(z) = A \frac{\prod_{r=1}^M (1 - c_r z^{-1})}{\prod_{k=1}^N (1 - d_k z^{-1})}, \quad A = \frac{b_0}{a_0}$$

- 时域输出与系统函数的零极点有关
- 频率特性与系统函数的零极点有关，希望根据零极点的分布进行定性的分析

—————> 系统的频率响应的几何确定 $|H(e^{j\omega})|$

$$H(z) = A \frac{\prod_{r=1}^M (1 - c_r z^{-1})}{\prod_{k=1}^N (1 - d_k z^{-1})}, \quad A = \frac{b_0}{a_0}$$

- **M**个零点，**N**个极点

- 分子分母同乘 z^{N+M} ，得 $H(z) = Az^{N-M} \frac{\prod_{r=1}^M (z - c_r)}{\prod_{k=1}^N (z - d_k)}$

若 $(N-M) < 0$ ， z^{N+M} 表示延时 **N-M** 个单位

若 $(N-M) > 0$ ，则表示超前 **N-M** 个单位

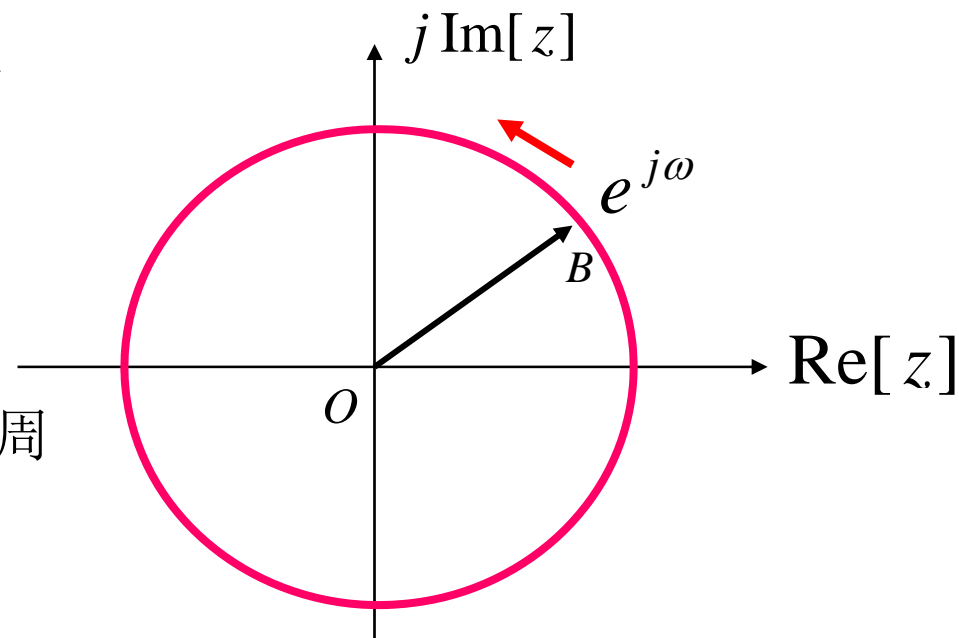
- 设系统稳定 $z = e^{j\omega}$

$$H(e^{j\omega}) = Ae^{j\omega(N-M)} \frac{\prod_{r=1}^M (e^{j\omega} - c_r)}{\prod_{k=1}^N (e^{j\omega} - d_k)}$$

$z = e^{j\omega}$ 在Z平面上用矢量 \overrightarrow{OB} 表示

当 ω 从 0 增大, $0 \Rightarrow \pi \Rightarrow 2\pi$,

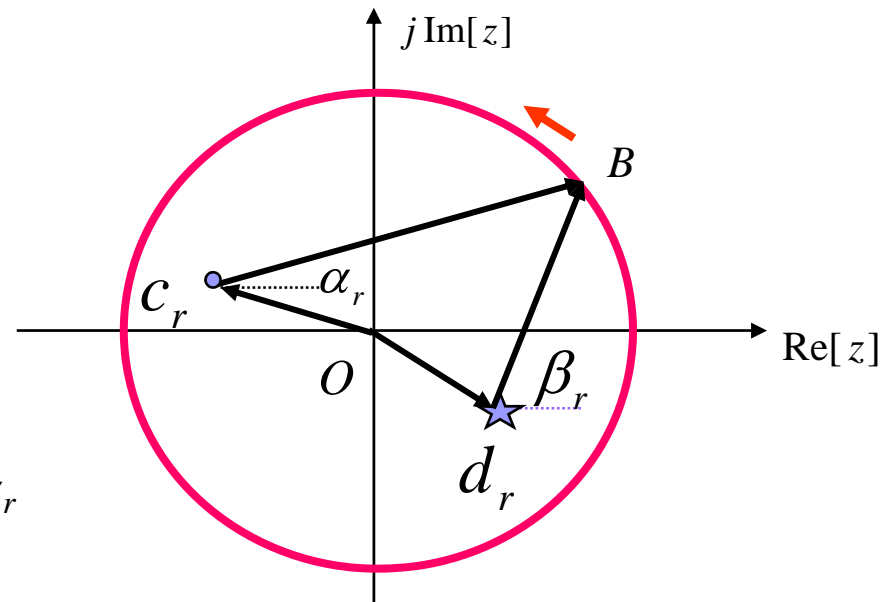
矢量 \overrightarrow{OB} 绕坐标原点逆时针旋转一周



$$H(e^{j\omega}) = Ae^{j\omega(N-M)} \frac{\prod_{r=1}^M (e^{j\omega} - c_r)}{\prod_{k=1}^N (e^{j\omega} - d_r)}$$

- 极点 $z = d_r$ 矢量 $\overrightarrow{Od_r}$
- $e^{j\omega} - d_r$ 极点矢量 $\overrightarrow{d_r B}$
- 零点 $z = c_r$ 矢量 $\overrightarrow{Oc_r}$
- $e^{j\omega} - c_r$ 零点矢量 $\overrightarrow{c_r B}$

$$\overrightarrow{d_r B} = \overrightarrow{d_r} B e^{j\beta_r} \quad \overrightarrow{c_r B} = \overrightarrow{c_r} B e^{j\alpha_r}$$



$$H(e^{j\omega}) = Ae^{j\omega(N-M)} \frac{\prod_{r=1}^M (e^{j\omega} - c_r)}{\prod_{k=1}^N (e^{j\omega} - d_k)}$$

$$\overrightarrow{d_r B} = \overline{d_r B} e^{j\beta_r} \quad \overrightarrow{c_r B} = \overline{c_r B} e^{j\alpha_r}$$



$$H(e^{j\omega}) = Ae^{j\omega(N-M)} \frac{\prod_{r=1}^M \overrightarrow{c_r B}}{\prod_{k=1}^N \overrightarrow{d_r B}} = |H(e^{j\omega})| e^{j\varphi(\omega)}$$

■ 幅频特性

$$|H(e^{j\omega})| = |A| \frac{\prod_{r=1}^M \overline{c_r B}}{\prod_{k=1}^N \overline{d_r B}}$$

■ 相频特性

$$\varphi(\omega) = \omega(N - M) + \sum_{r=1}^M \alpha_r - \sum_{r=1}^N \beta_r$$

$$H(e^{j\omega}) = Ae^{j\omega(N-M)} \frac{\prod_{r=1}^M (e^{j\omega} - c_r)}{\prod_{k=1}^N (e^{j\omega} - d_k)}$$

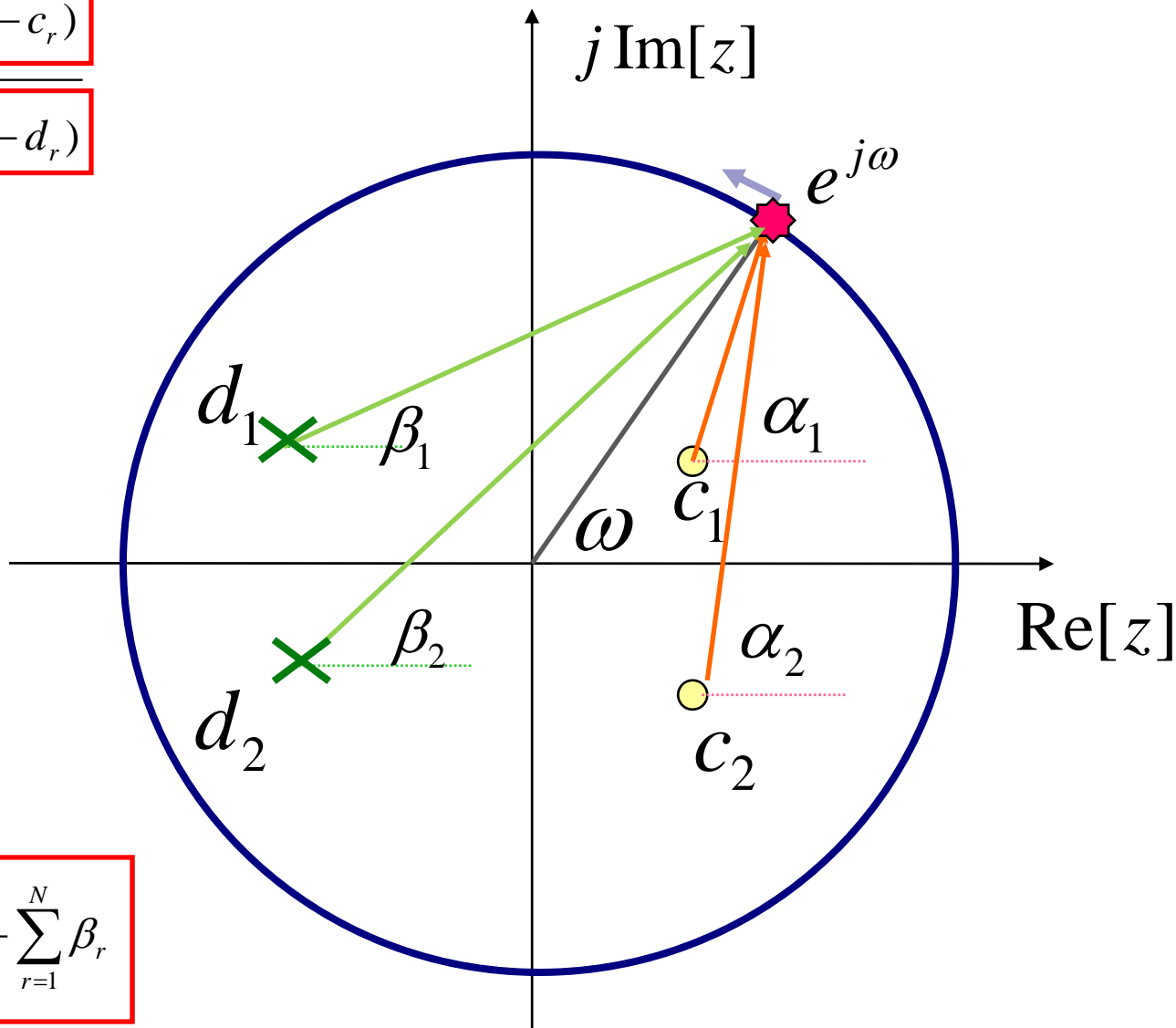
$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})| e^{j\varphi(\omega)}$$

■ 幅频特性

$$|H(e^{j\omega})| = |A| \frac{\prod_{r=1}^M |c_r|}{\prod_{k=1}^N |d_k|}$$

■ 相频特性

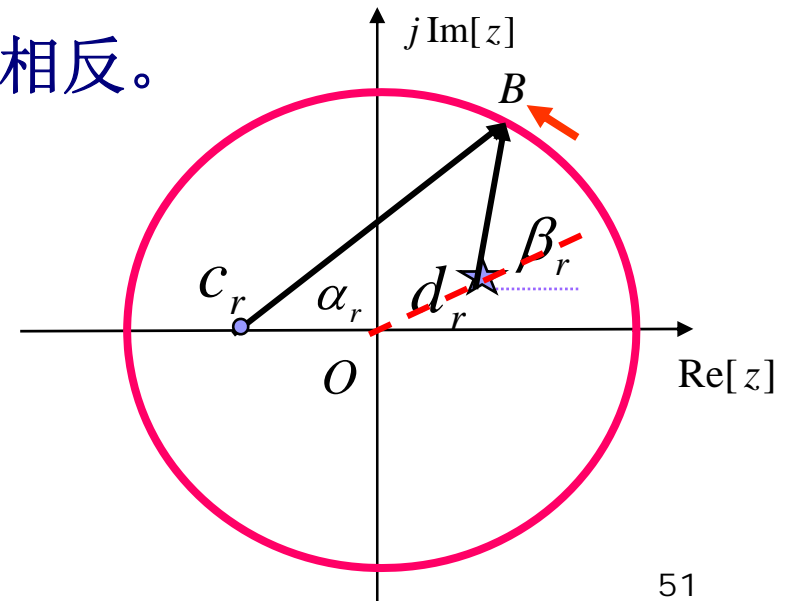
$$\varphi(\omega) = \omega(N - M) + \sum_{r=1}^M \alpha_r - \sum_{k=1}^N \beta_k$$



由几何法可以看出：

- (1) $z=0$ 处的零极点对幅频特性 $|H(e^{j\omega})|$ 没有影响，只对相位有影响
- (2) 当 B 旋转到某个极点 d_r 附近时，例如在同一半径上时， $\overline{d_r B}$ 较短，则 $|H(e^{j\omega})|$ 在该点应当出现一个峰值， $\overline{d_r B}$ 越短， ω 附近越尖锐。若 d_r 落在单位圆上，则 $\overline{d_r B} = 0$ ，则 ω 处的峰值趋于无穷大。
- (3) 零点的作用与极点的作用正好相反。

幅频特性 $|H(e^{j\omega})| = |A| \frac{\prod_{r=1}^M \overline{c_r B}}{\prod_{k=1}^N \overline{d_r B}}$



例2.4.6 一阶系统的差分方程如下，定性分析系统的幅频特性

$$y(n) = by(n-1) + x(n) \quad 0 < b < 1$$

解：系统函数为 $Y(z) = bz^{-1}Y(z) + X(z)$

$$H(z) = \frac{1}{1-bz^{-1}} = \frac{z}{z-b}$$

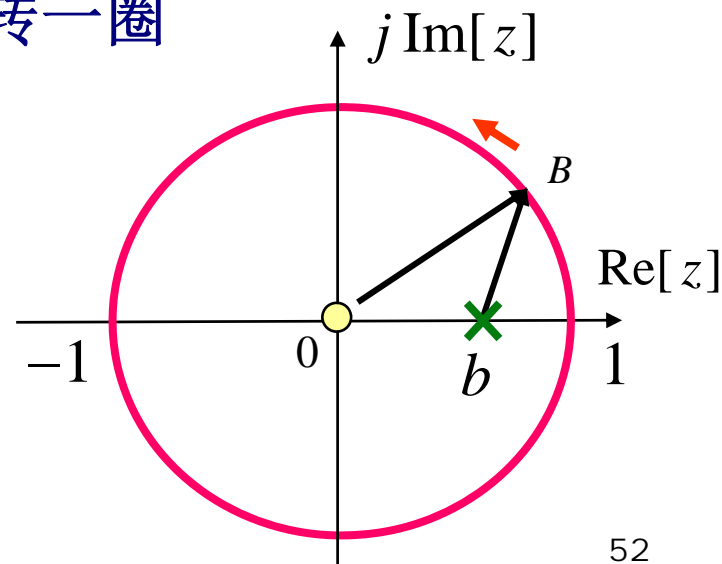
零点 $z=0$ ，极点 $z=b$

B点从 $\omega = 0$ 开始，沿单位圆逆时针转一圈

零点：对幅频特性没有影响

极点： $\omega = 0$ ，极点矢量长度最短，
峰值为 $1/(1-b)$

$\omega = \pi$ ，极点矢量长度最长，
谷值为 $1/(1+b)$



例2.4.7 系统函数如下，定性分析系统的幅频特性

$$H(z) = 1 - z^{-N}$$

解：计算零极点

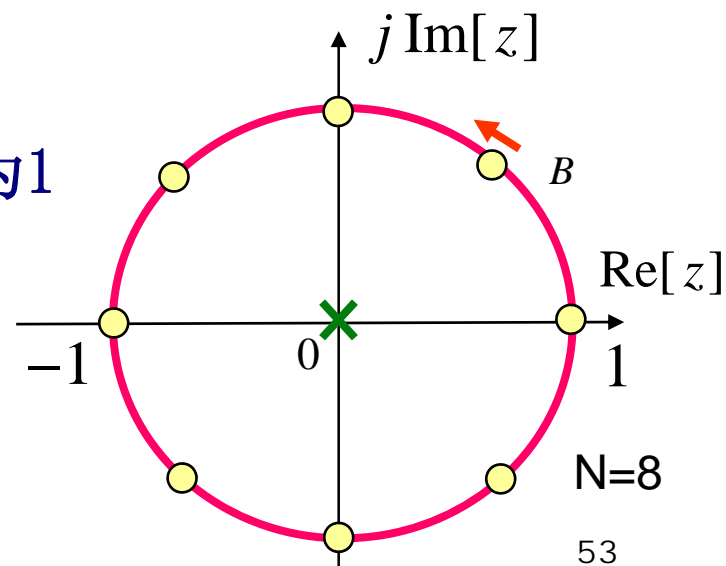
$$H(z) = 1 - z^{-N} = \frac{z^N - 1}{z^N}$$

极点：**N**阶极点 **$z=0$**

零点：**N**个零点 $z_k = e^{j\frac{2\pi}{N}k} \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1$

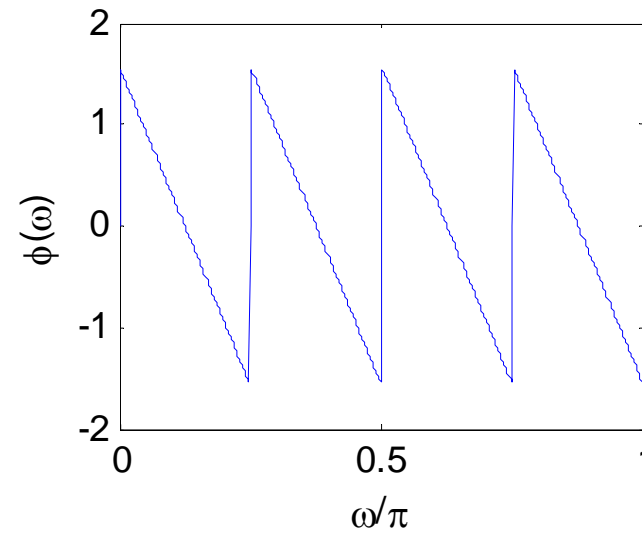
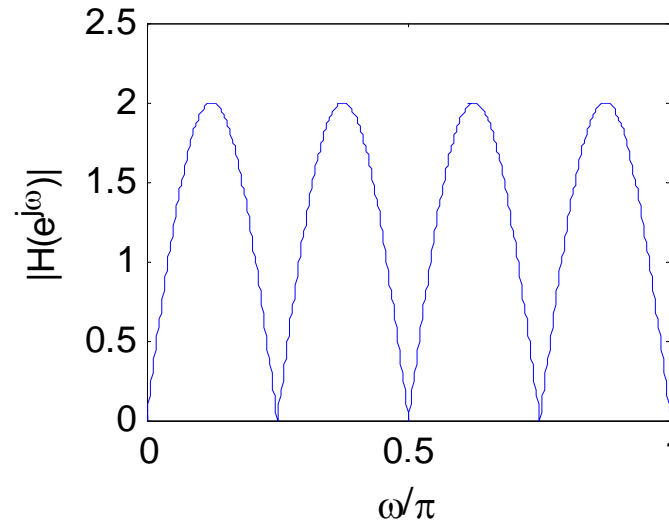
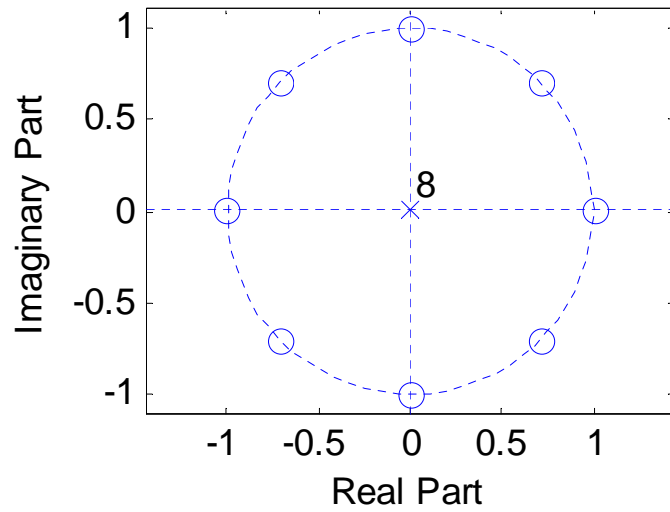
N个零点等间隔的分布在单位圆上

当 ω 变化时，极点矢量长度不变，且为1
零点对幅频特性的影响？



梳状滤波器

$$H(z) = 1 - z^{-N} = \frac{z^N - 1}{z^N}$$



例2.4.8 系统如下，定性分析系统的幅频特性

$$h(n) = R_N(n)$$

解：求Z变换及零极点

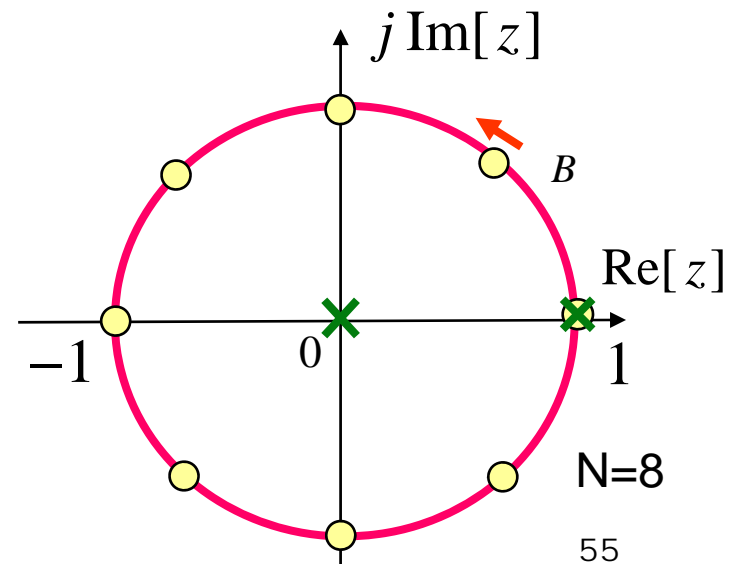
$$H(z) = ZT[R_N(n)] = \sum_{n=0}^{\infty} R_N(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1} z^{-n} = \frac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}} = \frac{z^N - 1}{z^{N-1}(z-1)}$$

零点：N个零点 $z_k = e^{j\frac{2\pi}{N}k}$ $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$

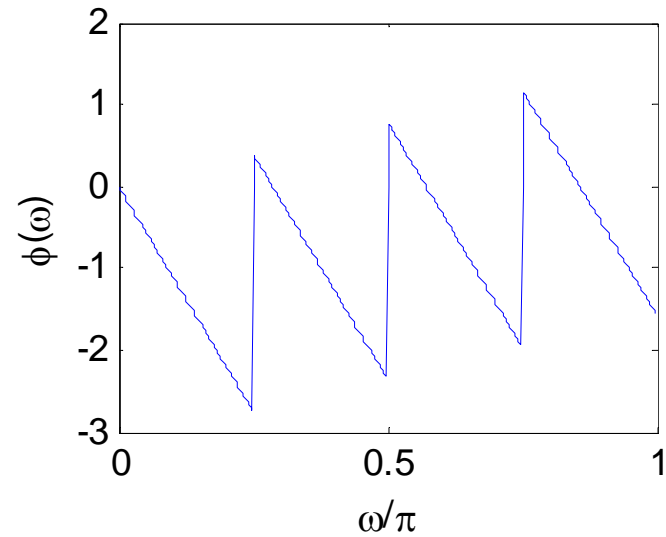
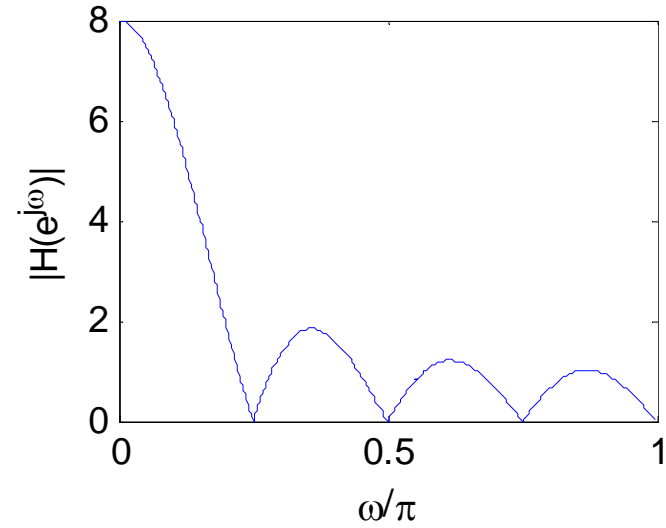
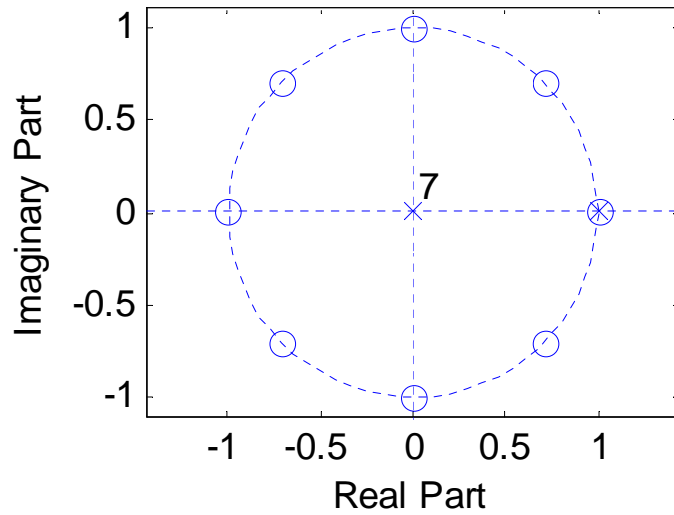
极点：z=1, z=0 (N-1阶)

零点z=1与极点z=1相消

设N=8，幅频特性？



$$h(n) = R_N(n) \quad H(z) = \frac{1 - z^{-N}}{1 - z^{-1}} = \frac{z^N - 1}{z^{N-1}(z - 1)}$$



总结：零极点分布对幅频特性的影响

- **极点**影响幅频特性的**峰值**，峰值频率在极点的附近；
- 极点越靠近单位圆，峰值越高，越尖锐；
- 极点在单位圆上，峰值幅度为无穷，系统不稳定。
- **零点**影响幅频特性的**谷值**，谷值频率在零点的附近；
- 零点越靠近单位圆，谷值越接近零；
- 零点在单位圆上，谷值为零。
- 处于坐标原点的零极点不影响幅频特性
- 该方法适于低阶系统



用MATLAB计算零极点及频率响应



小结

- 传输函数与系统函数的概念
- 极点与因果性和稳定性之间的关系
- Z变换求解系统输出响应，时域与频域的关系
- 零极点与系统频率特性之间的关系



本章小结

- 讨论时域离散信号和系统的频域分析;
- 时域到频域的变换
 - 离散信号的傅里叶变换
 - 周期信号的傅里叶级数
 - 周期信号的傅里叶变换
 - 离散信号的 z 变换
- 频域分析
 - 稳定性、因果性的判定
 - 系统的频率特性
 - 系统的输出响应



作业

■ P56-61:

**1(2,3), 2(1,3,5,6), 5, 8, 12, 20, 21(3,5,8,9), 23,
27(3), 29(2), 30, 33, 44**

■ 编程:

P60: 38, 40