第二章
时域离散信号和系统的频域分析

王柯俨
kywang@mail.xidian.edu.cn
http://web.xidian.edu.cn/kywang/teach.html

本章主要内容

- 序列的傅里叶变换（**DTFT**）
- 离散傅里叶级数（**DFS**）
- 周期序列的傅里叶变换
- 序列的**Z**变换（**ZT**）
- 逆**Z**变换（**IZT**）
- 时域离散时不变系统的变换域分析
- 梳状滤波器

2.1引言

- 信号和系统的分析工具
  - 时域
    - 直观
    - 求解难，分析困难
    - 特征不易把握
    - 设计难
  - 频域
    - 便于求解
    - 分析、设计易

频域分析的数学工具

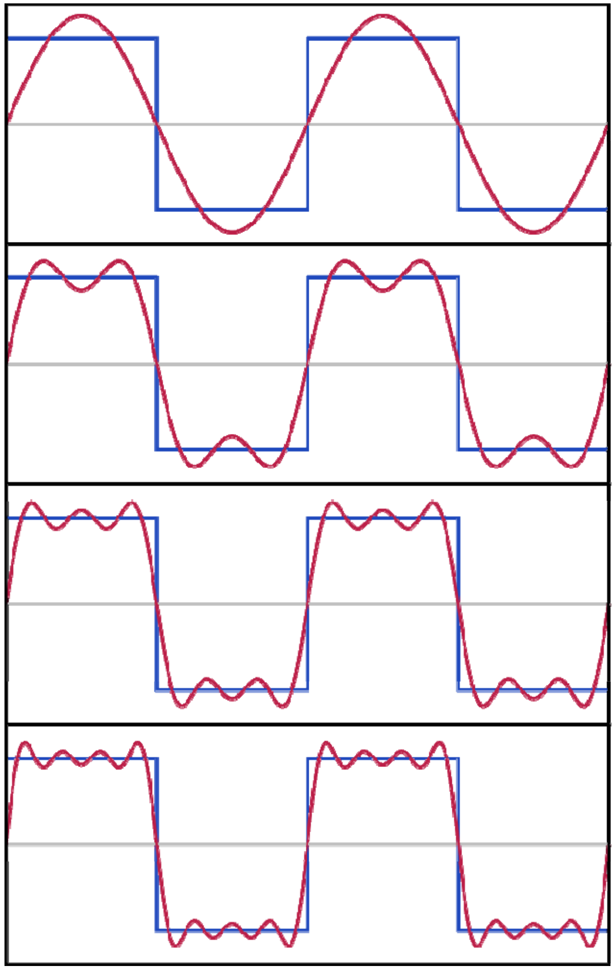
- 模拟连续信号
  - 傅里叶变换 → 拉普拉斯变换
- 时域离散信号
  - 傅里叶变换 → Z变换
  - 傅里叶变换：　时域→实频域
  - Z变换：　　　　时域→复频域

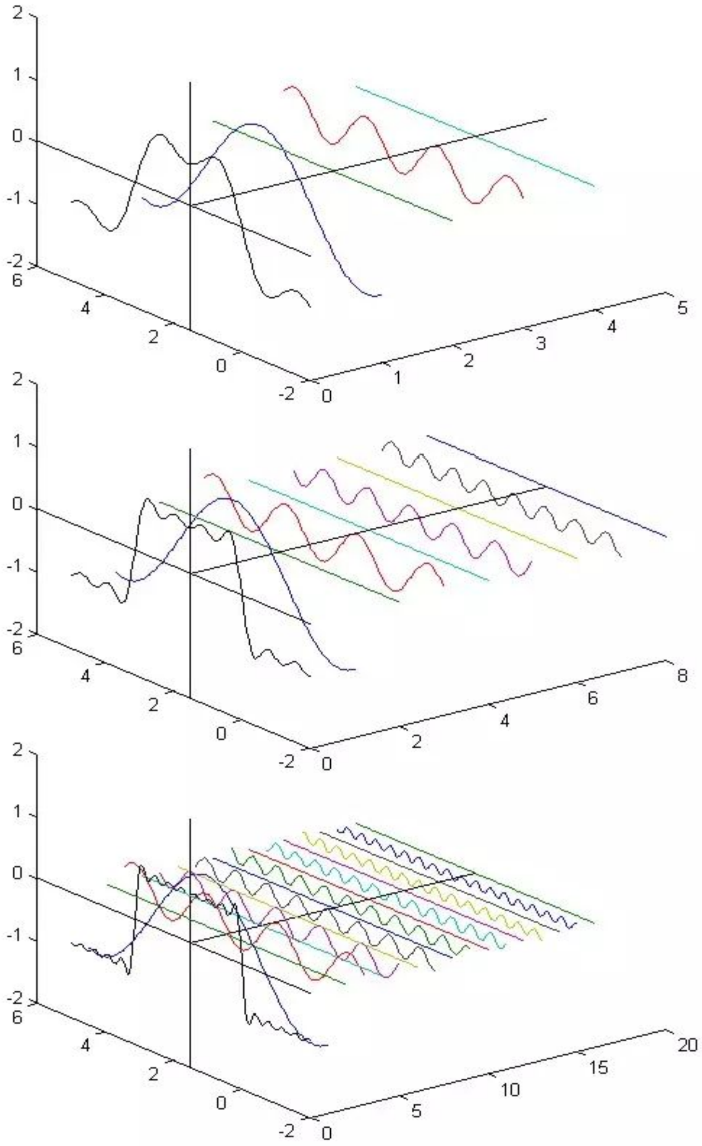
回顾：信号分解

- 目的
- 基本分解函数的选择
  - 时域：冲激函数 / 单位脉冲序列
  - 频域：正弦函数（序列）/ 复指数函数
- 傅里叶级数
- 傅里叶变换

回顾：连续周期信号的傅立叶级数

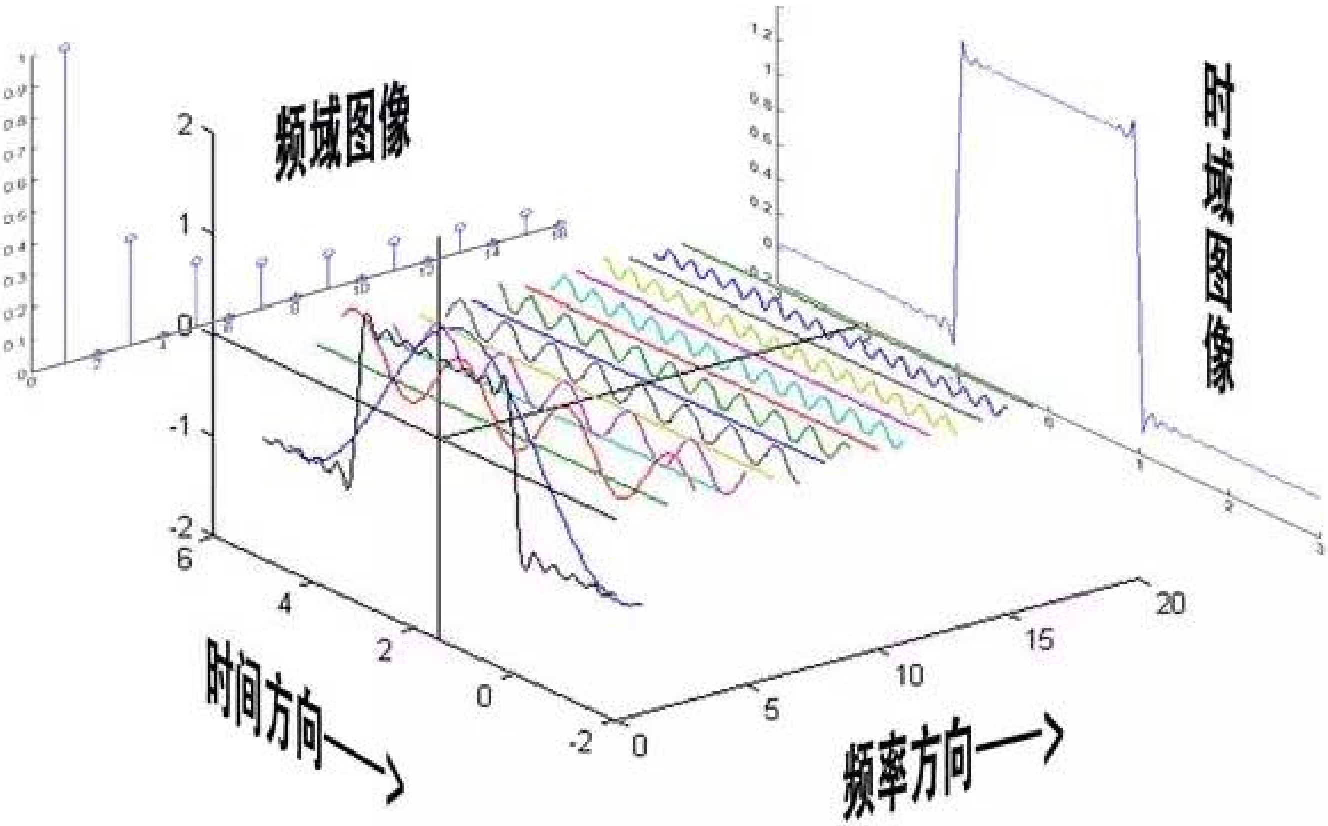
- 例：方波信号展开





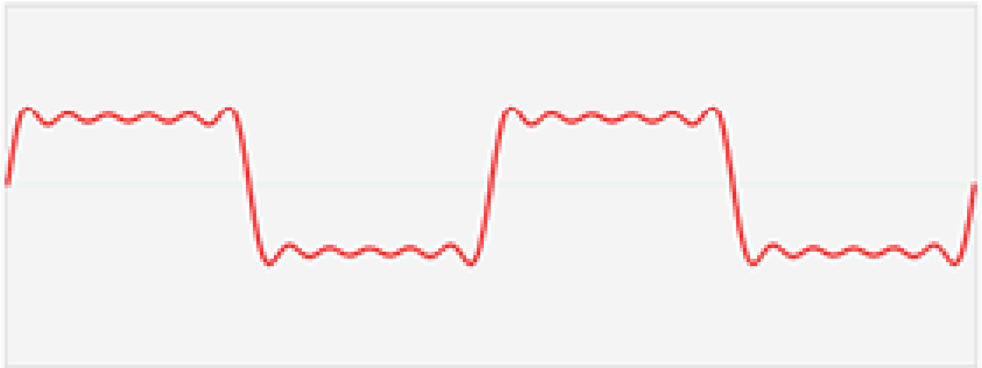
回顾：连续周期信号的傅立叶级数

- 例：方波信号展开



回顾：连续周期信号的傅立叶级数

https://en.wikipedia.org/wiki/Fourier_series



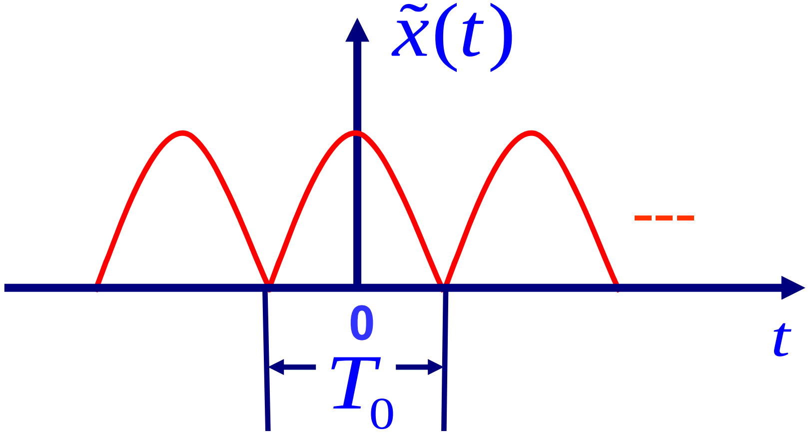
Function *s*(*x*) (in red) is a sum of six sine functions of different amplitudes and harmonically related frequencies. Their summation is called a Fourier series.

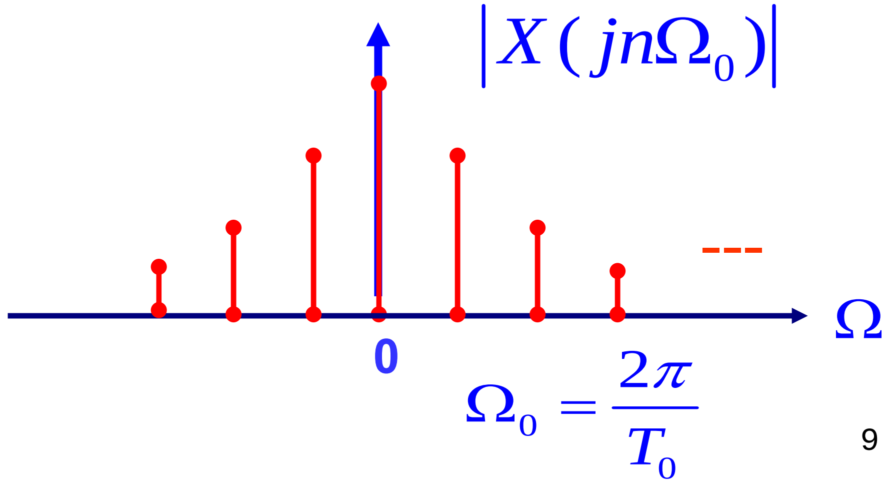
The Fourier transform, *S*(*f*) (in blue), which depicts amplitude vs frequency, reveals the 6 frequencies (*at odd harmonics*) and their amplitudes (*1/odd number*).

- 推荐：**[**知乎**]** 傅里叶分析之掐死教程（完整版） https://zhuanlan.zhihu.com/p/19763358

回顾：连续周期信号的傅立叶级数

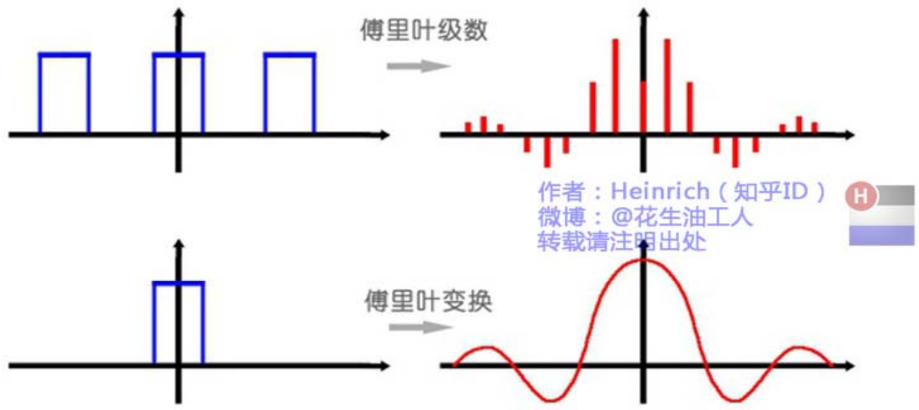
- 正变换（分解） $X(n\Omega_0)=\dfrac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}}\tilde{x}(t)e^{-jn\Omega_0 t}dt=<\tilde{x}(t),e^{jn\Omega_0 t}>$
- 反变换（合成） $\tilde{x}(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}X(jn\Omega_0)\cdot e^{jn\Omega_0 t}$ $\quad \Omega_0=\dfrac{2\pi}{T_0}$
- 时域周期信号，频域离散频谱（T_0越大，频谱越稠密）
- 任意周期信号 $\tilde{x}(t)$ 可分解为无穷多个不同频率的复指数信号之和，即直流分量和各次谐波分量。---（物理含义）





回顾：连续非周期信号的傅立叶变换

- 正变换 $$X(j\Omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\Omega t}dt$$
- 反变换 $$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(j\Omega)\cdot e^{j\Omega t}d\Omega$$
- 时域非周期绝对可积信号，频域连续频谱



结论：

- 时域连续周期 → 频域离散非周期
- 时域连续非周期 → 频域连续非周期

2.2 时域离散信号的傅里叶变换

- 时域离散信号的傅里叶变换（DTFT）的定义
- 周期信号的离散傅里叶级数（DFS）
- 周期信号的傅里叶变换
- 时域离散信号傅里叶变换的性质

2.2.1时域离散信号的傅里叶变换定义

- 连续信号的傅立叶变换

连续函数 -- $\boxed{X(j\Omega)} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\Omega t}dt$

- 时域离散信号的傅立叶变换 （DTFT）

正变换： $\boxed{X(e^{j\omega})} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}$ $\omega = \Omega T$ **T是采样间隔**

（注意：频谱是 ω 的连续函数，以 2π 为周期）

成立条件

序列 $x(n)$ 绝对可和，或者说序列能量有限，即

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| < \infty$$

2.2.1时域离散信号的傅里叶变换定义

- 时域离散信号的傅立叶变换（**DTFT**）

反变换： $$x(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

注意：

正变换求和区间为 $(-\infty,\infty)$

反变换积分区间仅为 $[-\pi,\pi]$

- 证明：

$$x(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\sum_{l=-\infty}^{\infty}x(l)e^{-j\omega l}\right]e^{j\omega n}d\omega$$

$$x(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\sum_{l=-\infty}^{\infty}x(l)e^{-j\omega l}\right]e^{j\omega n}d\omega$$

$$=\sum_{l=-\infty}^{\infty}x(l)\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-j\omega l}e^{j\omega n}d\omega \quad =\sum_{l=-\infty}^{\infty}x(l)\frac{\sin\pi(n-l)}{\pi(n-l)}$$

由于:

$$\frac{\sin\pi(n-l)}{\pi(n-l)}=\begin{cases}1 & n=l\\ 0 & n\neq l\end{cases} \quad =\delta(n-l)$$

于是:

$$x(n)=\sum_{l=-\infty}^{\infty}x(l)\frac{\sin\pi(n-l)}{\pi(n-l)}=\sum_{l=-\infty}^{\infty}x(l)\delta(n-l)=x(n)$$

证毕

2.2.1时域离散信号的傅里叶变换定义

- 总结：序列的离散时间傅立叶变换对

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} \quad = \left|X(e^{j\omega})\right| e^{j\arg[X(e^{j\omega})]}$$

$$\updownarrow$$

$$x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

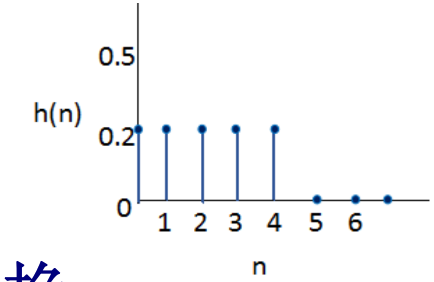
幅频特性 $\left|X(e^{j\omega})\right|$

相频特性 $\arg[X(e^{j\omega})]$

- 注意：

DTFT成立的条件、**n**取整数、**DTFT**是连续周期函数、积分上下限

DTFT

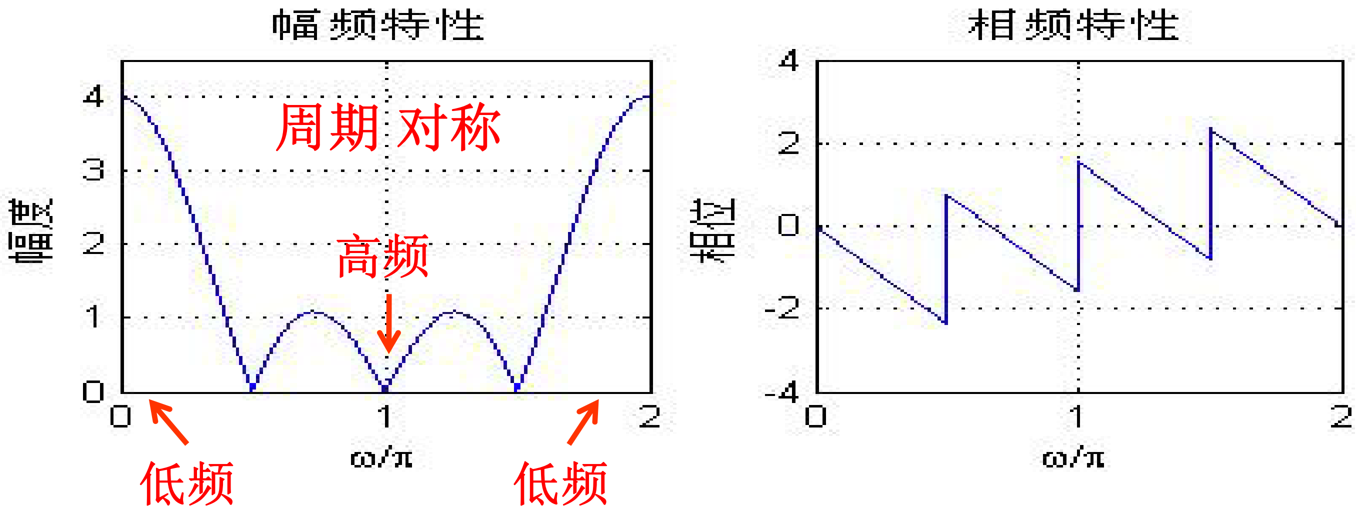


- 例2.2.1求矩形序列 $R_N(n)$ 的傅里叶变换

解： $$R(e^{j\omega}) = FT(R_N(n)) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_N(n)e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\omega n}$$

$$= \frac{1-e^{-j\omega N}}{1-e^{-j\omega}} = \frac{e^{-j\omega N/2}(e^{j\omega N/2}-e^{-j\omega N/2})}{e^{-j\omega/2}(e^{j\omega/2}-e^{-j\omega/2})}$$

滑动平均滤波器



N=4

2.2.2周期信号的离散傅里叶级数

- 周期信号不存在傅里叶变换 $f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\Omega_0 t}$
- 设 $\tilde{x}(n)$ 为以N为周期的周期序列，则可展成傅里叶级数（DFS）

$$\tilde{x}(n)=\sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{j\frac{2\pi}{N}kn}, \qquad \omega_0=\Omega_0 T=\frac{2\pi}{NT}T=\frac{2\pi}{N}$$

- 为什么是有限项之和？
- 如何求 a_k ？

2.2.2周期信号的离散傅里叶级数

$$\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}mn}=\sum_{n=0}^{N-1}\left[\sum_{k=0}^{N-1}a_k e^{j\frac{2\pi}{N}kn}\right]e^{-j\frac{2\pi}{N}mn}$$

$$=\sum_{n=0}^{N-1}\left[\sum_{k=0}^{N-1}a_k e^{j\frac{2\pi}{N}kn}\,e^{-j\frac{2\pi}{N}mn}\right]\qquad=\sum_{k=0}^{N-1}a_k\sum_{n=0}^{N-1}e^{j\frac{2\pi}{N}(k-m)n}$$

$$\sum_{n=0}^{N-1}e^{j\frac{2\pi}{N}(k-m)n}=\frac{1-e^{j\frac{2\pi}{N}(k-m)N}}{1-e^{j\frac{2\pi}{N}(k-m)}}=\frac{1-e^{j2\pi(k-m)}}{1-e^{j\frac{2\pi}{N}(k-m)}}=\begin{cases}N & k=m\\0 & k\neq m\end{cases}$$

$$\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}mn}=\begin{cases}a_k N & k=m\\0 & k\neq m\end{cases}$$

$$a_k=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

$$a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

仅有N个
旋转频率

- **k、n均取整数；** $e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$ 是周期函数，周期为N
- a_k 为周期序列 $a_k = a_{k+lN}$
- 令

$$\tilde{X}(k) = Na_k = \sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \quad -\infty < k < \infty$$

- 离散傅里叶级数对（**DFS**）：

$$\tilde{X}(k) = DFS[\tilde{x}(n)] = \sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \quad -\infty < k < \infty$$

$$\tilde{x}(n) = IDFS[\tilde{X}(k)] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}(k)e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \quad -\infty < n < \infty$$

2.2.2周期信号的离散傅里叶级数

- $\tilde{x}(n)$ 和 $\tilde{X}(k)$ 均是以**N为周期**的周期序列

$$\tilde{X}(k)=DFS[\tilde{x}(n)]=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \quad -\infty<k<\infty$$

$$\tilde{x}(n)=IDFS[\tilde{X}(k)]=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}(k)e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \quad -\infty<n<\infty$$

- ***物理意义：***

周期序列可分解为**N**次谐波，第 k 次谐波的频率是 $\omega_k=\frac{2\pi}{N}k$ ， $k=0,1,2,\ldots N-1$ ，谐波的幅度是 $\frac{1}{N}\left|\tilde{X}(k)\right|$ ，相位是 $\arg[\tilde{X}(k)]$ 。其中，$k=0$ 表示直流分量，其幅度为 $X(0)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)$ 。

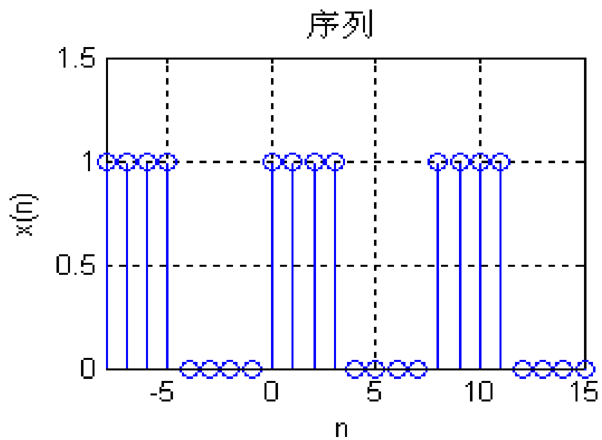
例**2.2.2** 设 $x(n)=R_4(n)$，将 $x(n)$ 以**N=8**为周期进行周期延拓，得到周期序列 $\tilde{x}(n)$ ，试求 $\tilde{x}(n)$ 的离散傅里叶级数的系数 $\tilde{X}(k)$

解：

$$\tilde{X}(k)=\sum_{n=0}^{7}\tilde{x}(n)e^{-j\frac{2\pi}{8}kn}=\sum_{n=0}^{3}e^{-j\frac{2\pi}{8}kn}=\sum_{n=0}^{3}e^{-j\frac{\pi}{4}kn}$$

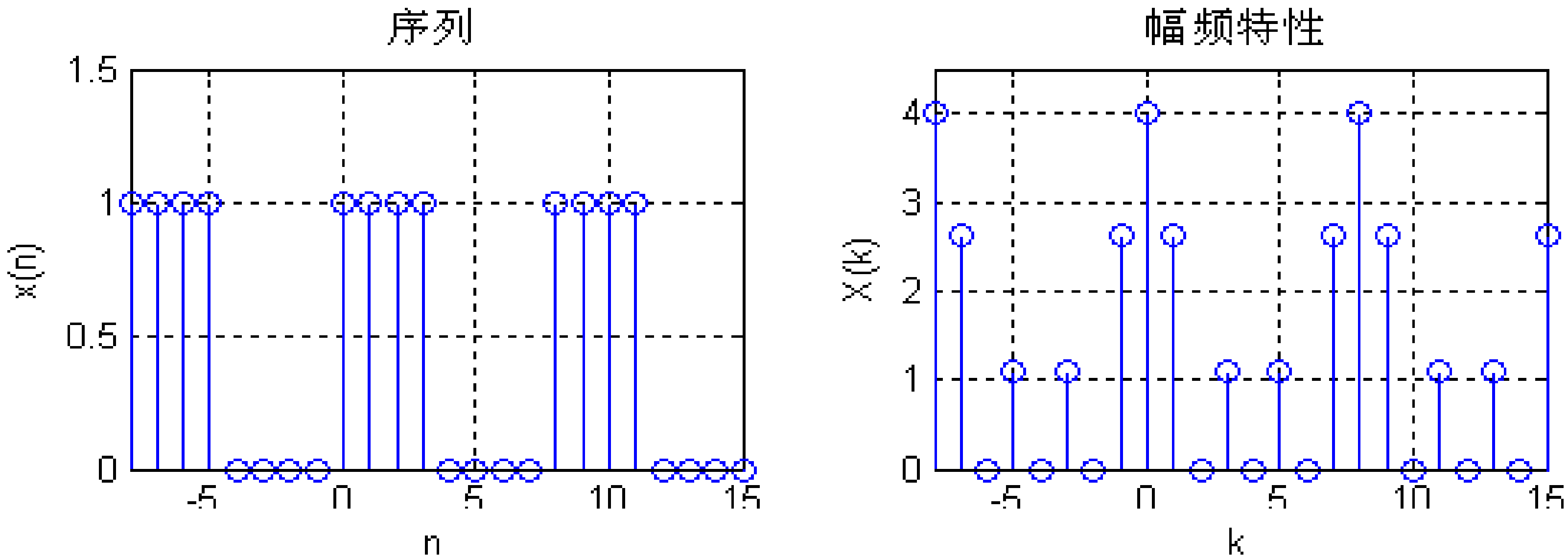
$$=\frac{1-e^{-j\frac{4\pi}{4}k}}{1-e^{-j\frac{\pi}{4}k}}=\frac{1-e^{-j\pi k}}{1-e^{-j\frac{\pi}{4}k}}=\frac{e^{-j\frac{\pi}{2}k}(e^{j\frac{\pi}{2}k}-e^{-j\frac{\pi}{2}k})}{e^{-j\frac{\pi}{8}k}(e^{j\frac{\pi}{8}k}-e^{-j\frac{\pi}{8}k})}$$

$$=e^{-j\frac{3\pi}{8}k}\frac{\sin\frac{\pi}{2}k}{\sin\frac{\pi}{8}k}$$



得：

$$\left|\tilde{X}(k)\right| = \left| e^{-j\frac{3\pi}{8}k} \frac{\sin\frac{\pi}{2}k}{\sin\frac{\pi}{8}k} \right| = \left| \frac{\sin\frac{\pi}{2}k}{\sin\frac{\pi}{8}k} \right|$$



周期信号的频谱是离散线状谱

信号的周期为**N**，则 $\tilde{X}(k)$ 的周期为**N**。

2.2.3 周期信号的傅里叶变换

- 序列的傅立叶变换的条件是序列必须绝对可和，某些序列不满足绝对可和的条件，因此严格讲傅立叶变换不存在。
- 但如果像连续信号那样，引入奇异函数（单位冲激函数），傅立叶变换的定义可以放松，可以用冲激函数表示其傅立叶变换。

复指数序列的傅里叶变换

- 复指数序列的傅里叶变换
  - $x_a(t)=e^{j\Omega_0 t}$ 的傅里叶变换

$$FT(1)=2\pi\delta(\Omega)$$

$$X_a(j\Omega)=FT(e^{j\Omega_0 t})=2\pi\delta(\Omega-\Omega_0)$$

  - 假设复指数序列 $e^{j\omega_0 n}$ 的傅里叶变换为

$$X(e^{j\omega})=FT(e^{j\omega_0 n})=\sum_{r=-\infty}^{\infty}2\pi\delta(\omega-\omega_0-2\pi r)$$

$$-\pi\le\omega_0\le\pi$$

复指数序列的傅里叶变换

$$X(e^{j\omega}) = FT(e^{j\omega_0 n}) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega - \omega_0 - 2\pi r)$$

- 是以 2π 为周期的单位脉冲序列
- 上式为假设，如该假设成立，其傅立叶反变换应为

$$IFT[X(e^{j\omega})] = e^{j\omega_0 n}$$

$$X(e^{j\omega}) = FT(e^{j\omega_0 n}) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega - \omega_0 - 2\pi r)$$

- 求证： $IFT[X(e^{j\omega})] = e^{j\omega_0 n}$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underline{\sum_{r=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega - \omega_0 - 2\pi r)e^{j\omega n}}d\omega$$

$$\Downarrow$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underline{2\pi\delta(\omega - \omega_0)e^{j\omega n}}d\omega = e^{j\omega_0 n}$$

一般周期序列的傅里叶变换

- 设 $\tilde{x}(n)$为以N为周期的周期序列，则可展成傅里叶级数

$$\tilde{x}(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}(k)e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \qquad -\infty<n<\infty$$

- 对每一项进行傅立叶变换 $X(e^{j\omega})=FT(e^{j\omega_0 n})=\sum_{r=-\infty}^{\infty}2\pi\delta(\omega-\omega_0-2\pi r)$

$$FT\left[\frac{1}{N}\tilde{X}(k)e^{j\frac{2\pi}{N}kn}\right]=\frac{2\pi}{N}\tilde{X}(k)\sum_{r=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-\frac{2\pi}{N}k-2\pi r)$$

$$X(e^{j\omega})=FT\left[\tilde{x}(n)\right]=\sum_{k=0}^{N-1}\frac{2\pi}{N}\tilde{X}(k)\sum_{r=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-\frac{2\pi}{N}k-2\pi r)$$

一般周期序列的傅里叶变换

$$X(e^{j\omega})=FT[\tilde{x}(n)]=\sum_{k=0}^{N-1}\frac{2\pi}{N}\tilde{X}(k)\sum_{r=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-\frac{2\pi}{N}k-2\pi r)$$

由于： $k=0,1,2,\cdots,N-1$

$r=\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots,$

于是： $$\boxed{X(e^{j\omega})=FT[\tilde{x}(n)]=\frac{2\pi}{N}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\tilde{X}(k)\delta(\omega-\frac{2\pi}{N}k)}$$

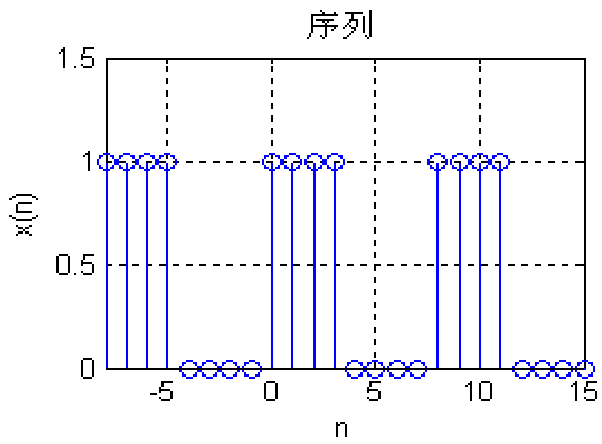
- 周期序列的傅里叶变换由 $\omega=\frac{2\pi}{N}k$， $-\infty<k<\infty$ 的冲激函数的和组成，各冲激函数的强度为 $\frac{2\pi}{N}\tilde{X}(k)$， $\tilde{X}(k)$ 是离散傅里叶级数的系数。

$$X(e^{j\omega})=FT[\tilde{x}(n)]=\frac{2\pi}{N}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\tilde{X}(k)\delta(\omega-\frac{2\pi}{N}k)$$

例**2.2.2** 设 $x(n)=R_4(n)$，将 $x(n)$ 以**N=8**为周期进行周期延拓，得到周期序列 $\tilde{x}(n)$，试求 $\tilde{x}(n)$ 的傅里叶变换。

- 解：先求周期序列 $\tilde{x}(n)$ 的傅里叶级数

$$\tilde{X}(k)=e^{-j\frac{3\pi}{8}k}\frac{\sin\frac{\pi}{2}k}{\sin\frac{\pi}{8}k}$$



- 周期序列 $\tilde{x}(n)$ 的傅里叶变换为

$$X(e^{j\omega})=FT[\tilde{x}(n)]=\frac{2\pi}{N}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\tilde{X}(k)\delta(\omega-\frac{2\pi}{N}k)$$

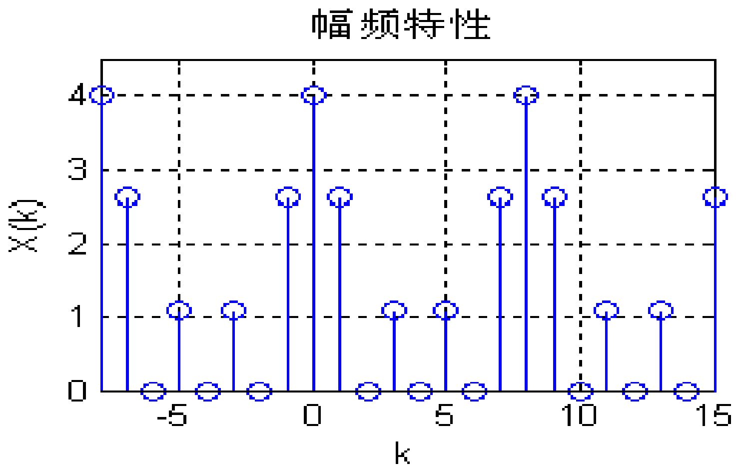
$$=\frac{2\pi}{N}\sum_{k=-\infty}^{\infty}e^{-j\frac{3\pi}{8}k}\frac{\sin\frac{\pi}{2}k}{\sin\frac{\pi}{8}k}\delta(\omega-\frac{2\pi}{N}k)$$

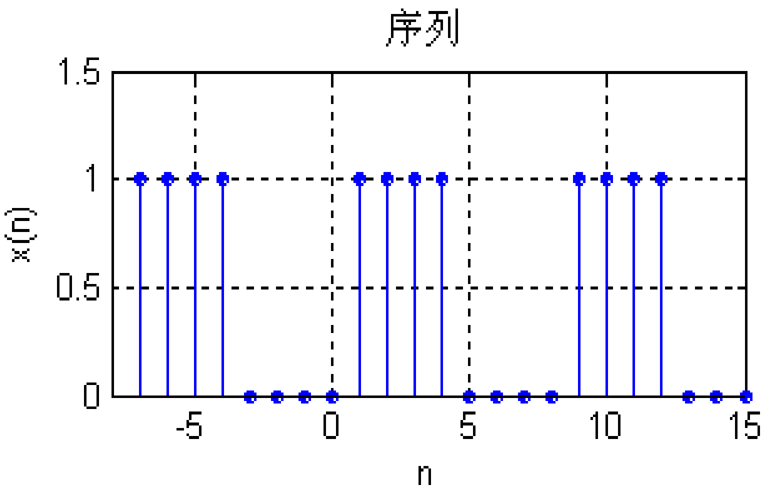
■ 幅频特性：

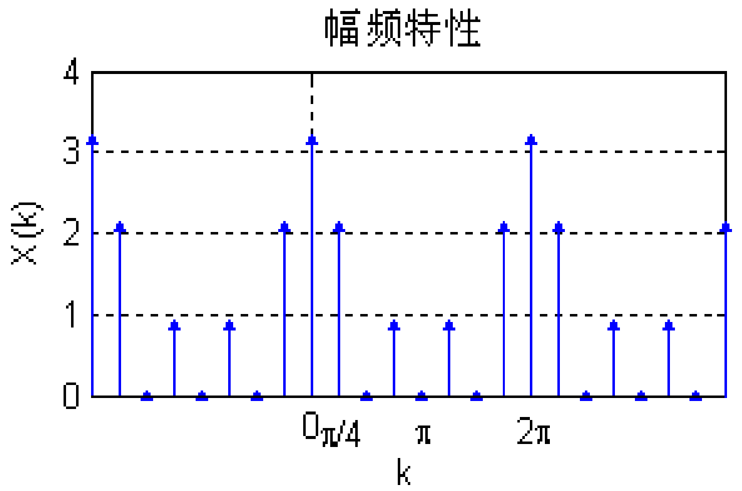
幅频特性的包络形状一样，但表示方法不同

$$\left|X(e^{j\omega})\right| = \left|\frac{2\pi}{N}\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-j\frac{3\pi}{8}k}\frac{\sin\frac{\pi}{2}k}{\sin\frac{\pi}{8}k}\delta(\omega-\frac{2\pi}{N}k)\right|$$

$$=\frac{2\pi}{N}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left|\frac{\sin\frac{\pi}{2}k}{\sin\frac{\pi}{8}k}\right|\delta(\omega-\frac{2\pi}{N}k)$$







- 例2.2.4 令 $\tilde{x}(n)=\cos\omega_0 n$，$2\pi/\omega_0$ 为有理数，求其傅里叶变换。

- 解：

$$\tilde{x}(n)=\frac{1}{2}(e^{j\omega_0 n}+e^{-j\omega_0 n})$$

$$FT[e^{j\omega_0 n}]=\sum_{r=-\infty}^{\infty}2\pi\delta(\omega-\omega_0-2\pi r)$$

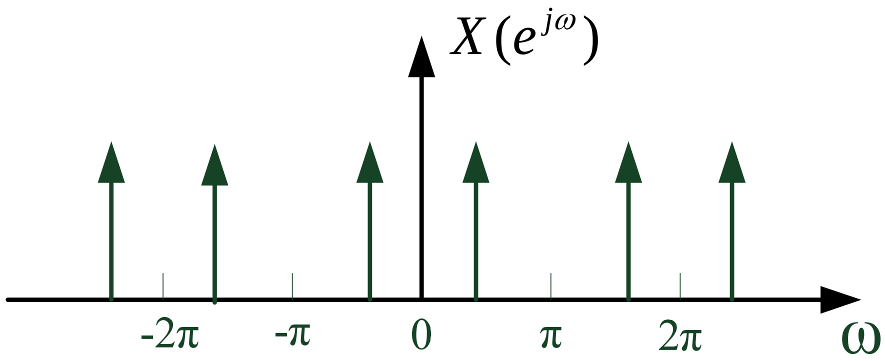
$$FT[\tilde{x}(n)]=\frac{1}{2}FT[e^{j\omega_0 n}+e^{-j\omega_0 n}]$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{r=-\infty}^{\infty}[2\pi\delta(\omega-\omega_0-2\pi r)+2\pi\delta(\omega+\omega_0-2\pi r)]$$

$$=\pi\sum_{r=-\infty}^{\infty}\left[\delta(\omega-\omega_0-2\pi r)+\delta(\omega+\omega_0-2\pi r)\right]$$

$$FT[\tilde{x}(n)] = FT[\cos\omega_0 n]$$

$$= \pi \sum_{r=-\infty}^{\infty} \left[\delta(\omega - \omega_0 - 2\pi r) + \delta(\omega + \omega_0 - 2\pi r)\right]$$



- 余弦信号的傅里叶变换是在 $\omega = \pm\omega_0$ 处的冲激函数；强度为 π；以 2π 为周期进行周期性延拓。

- 正弦序列 $\tilde{x}(n)=\sin\omega_0 n$，$2\pi/\omega_0$ 为有理数，求其傅里叶变换。

$$FT[\tilde{x}(n)]=-\frac{j}{2}FT[e^{j\omega_0 n}-e^{-j\omega_0 n}]$$

$$=-j\pi\sum_{r=-\infty}^{\infty}\left[\delta(\omega-\omega_0-2\pi r)-\delta(\omega+\omega_0-2\pi r)\right]$$

结论：

- ✓ **FS：** 时域连续周期 → 频域离散非周期
- ✓ **FT ：** 时域连续非周期 → 频域连续非周期
- ✓ **DFS：** 时域离散周期 → 频域离散周期
- ✓ **DTFT：** 时域离散非周期 → 频域连续周期

基本序列的傅里叶变换

- **P30 图表**

Sequence		DTFT
$\delta[n]$	$\leftrightarrow$	1
1	$\leftrightarrow$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega+2\pi k)$
$e^{j\omega_o n}$	$\leftrightarrow$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega-\omega_o+2\pi k)$
$\mu[n]$	$\leftrightarrow$	$\frac{1}{1-e^{-j\omega}}+\sum_{k=-\infty}^{\infty} \pi\delta(\omega+2\pi k)$
$\alpha^n u(n)(\lvert\alpha\rvert<1)$	$\leftrightarrow$	$\frac{1}{1-\alpha e^{-j\omega}}$

2.2.4时域离散信号傅里叶变换的性质

- 周期性——时域离散信号的傅里叶变换以 2π 为周期

$$X(e^{j\omega}) = X(e^{j(\omega+2\pi M)}) \quad \text{M为整数}$$

证明：

$$X(e^{j(\omega+2\pi M)}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j(\omega+2\pi M)n}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}e^{-j2\pi Mn} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} = X(e^{j\omega})$$

1. 周期性

- 周期性的意义
  - 对信号进行频域分析时，只需分析一个周期即可；
  - 在 $\omega=0,\pm2\pi,\pm4\pi,\cdots$ 处，表示直流分量；
  - 在 $\omega=0,\pm2\pi,\pm4\pi,\cdots$ 附近为低频分量；
  - 在 $\omega=\pm\pi,\pm3\pi,\cdots$ 处，表示最高频率；
  - 在 $\omega=\pm\pi,\pm3\pi,\cdots$ 附近为高频分量。

2. 频域的卷积定理

- 设 $X(e^{j\omega})=FT[x(n)],\ H(e^{j\omega})=FT[h(n)],$

  $y(n)=x(n)h(n)$

- 则

$$Y(e^{j\omega})=\frac{1}{2\pi}X(e^{j\omega})*H(e^{j\omega})$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(e^{j\omega})H(e^{j(\omega-\theta)})d\theta$$

■ 证明

$$Y(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)h(n)e^{-j\omega n}$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}H(e^{j\theta})e^{j\theta n}d\theta\right]e^{-j\omega n}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}H(e^{j\theta})\underline{\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-j\omega n}e^{j\theta n}\right]}d\theta$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}H(e^{j\omega})X(e^{j(\omega-\theta)})d\theta$$

$$=\frac{1}{2\pi}X(e^{j\omega})*H(e^{j\omega})$$

■ 时域相乘，频域卷积。亦称为调制定理

■ 例2.2.5 设: $FT[x(n)]=X(e^{j\omega})$, $y(n)=e^{j\pi n}=(-1)^n$

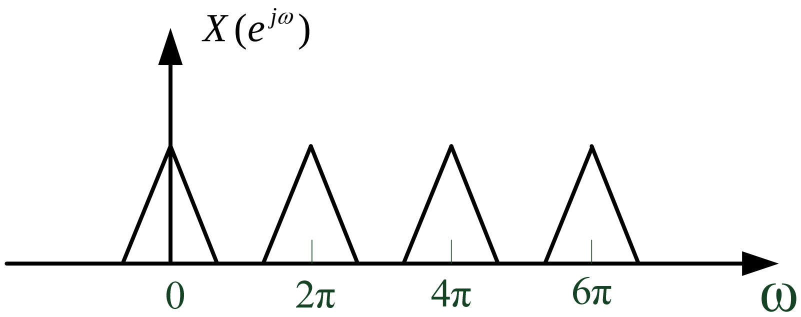
求 $w(n)=x(n)y(n)$ 的傅里叶变换

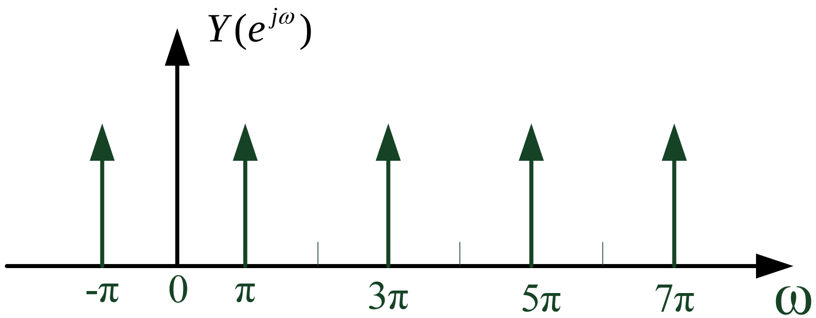
■ 解: $Y(e^{j\omega})=FT[e^{j\pi n}]=\sum_{r=-\infty}^{\infty}2\pi\delta(\omega-\pi-2\pi r)$

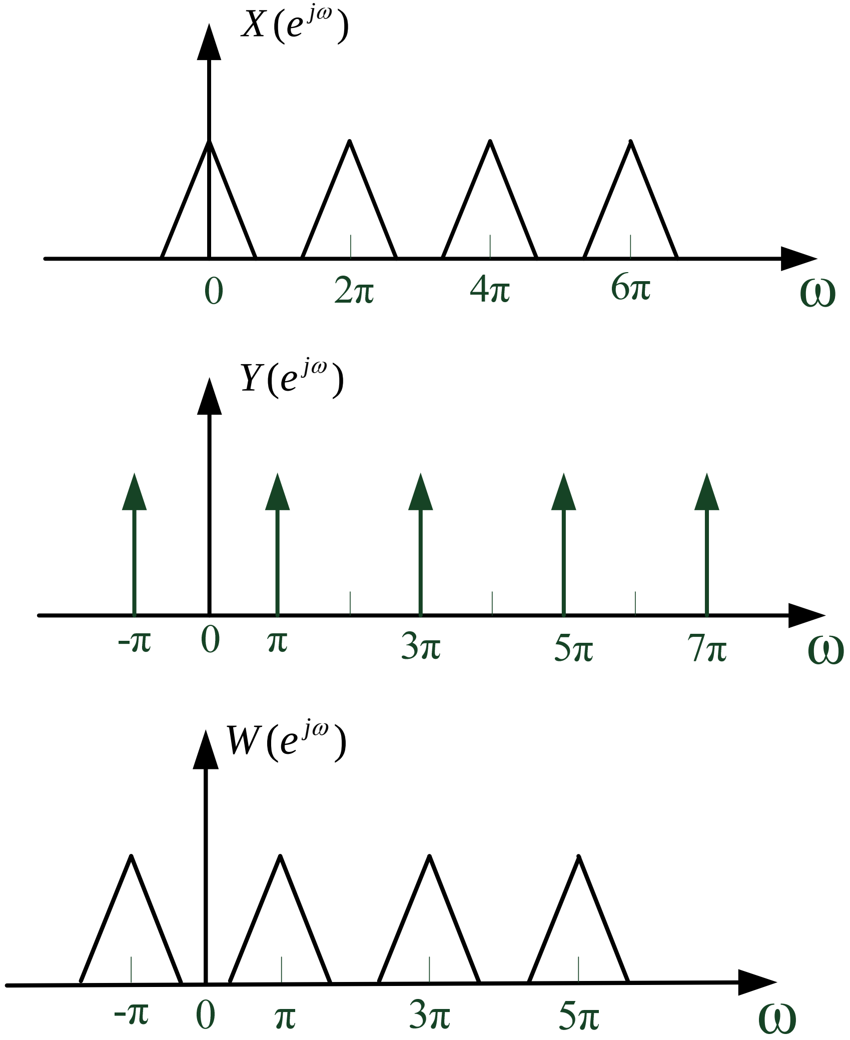
$$W(e^{j\omega})=\frac{1}{2\pi}X(e^{j\omega})*Y(e^{j\omega})$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(e^{j(\omega-\theta)})\sum_{r=-\infty}^{\infty}2\pi\delta[\theta-(2r+1)\pi]\,\mathrm{d}\theta$$

$$=X(e^{j(\omega-\pi)})$$







$$W(e^{j\omega})=\frac{1}{2\pi}X(e^{j\omega})*Y(e^{j\omega})=\sum_{r=-\infty}^{\infty}X(e^{j[\omega-(2r+1)\pi]})$$

- 将 $X(e^{j\omega})$ 移动了 π ，即将 $x(n)$ 信号调制到 $y(n)$ 信号上。

- 序列与 $(-1)^n$ 相乘，相当于奇数序列值乘以**-1**，频域上 $X(e^{j\omega})$ 平移了 π ，即高频段与低频段互换了位置。

3.傅里叶变换的对称性

- 一般，序列 $x(n)$ 为复序列

$$x(n)=x_r(n)+jx_i(n) \qquad x^*(n)=x_r(n)-jx_i(n)$$

- 共轭对称序列

$$x_e(n)=x_e^*(-n)$$

$$x_{er}(n)=x_{er}(-n)$$

$$x_{ei}(n)=-x_{ei}(-n)$$

- 复共轭反对称序列

$$x_o(n)=-x_o^*(-n)$$

$$x_{or}(n)=-x_{er}(-n)$$

$$x_{oi}(n)=x_{oi}(-n)$$

3. 傅里叶变换的对称性

- 频域共轭对称性

$$X_e(e^{j\omega}) = X_e^*(e^{-j\omega})$$

$$X_{er}(e^{j\omega}) = X_{er}(e^{-j\omega}) \qquad X_{ei}(e^{j\omega}) = -X_{ei}(e^{-j\omega})$$

- 频域共轭反对称性

$$X_o(e^{j\omega}) = -X_o^*(e^{-j\omega})$$

$$X_{or}(e^{j\omega}) = -X_{or}(e^{-j\omega}) \qquad X_{oi}(e^{j\omega}) = X_{oi}(e^{-j\omega})$$

- 序列的对称性与其傅里叶变换的对称性之间的关系？

3.傅里叶变换的对称性

- 情况1： 序列 $x(n)=x_r(n)+jx_i(n)$

$$FT[x_r(n)]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_r(n)e^{-j\omega n}=X_R(e^{j\omega})$$

$$X_R(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_r(n)e^{-j\omega n}=\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_r(n)e^{j\omega n}\right]^*=X_R^*(e^{-j\omega})$$

- 序列实部的傅里叶变换具有共轭对称性质

$$X_I(e^{j\omega})=FT[jx_i(n)]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}jx_i(n)e^{-j\omega n}$$

$$=\left[-\sum_{n=-\infty}^{\infty}jx_i(n)e^{j\omega n}\right]^*=-X_I^*(e^{-j\omega})$$

- 序列虚部 $jx_i(n)$ 的傅里叶变换具有共轭反对称性质

3.傅里叶变换的对称性

$$X(e^{j\omega}) = FT[x(n)] = FT[x_r(n) + jx_i(n)]$$

$$= X_e(e^{j\omega}) + X_o(e^{j\omega})$$

$$X_e(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_r(n)e^{-j\omega n} \qquad X_o(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} jx_i(n)e^{-j\omega n}$$

- 结论：序列的傅里叶变换包含共轭对称分量和共轭反对称分量，其中共轭对称分量对应序列的实部，共轭反对称分量对应序列的虚部（包括*j*）。

3.傅里叶变换的对称性

- 情况2：将序列分成共轭对称部分和共轭反对称部分

$$x(n) = x_e(n) + x_o(n)$$

- 其傅立叶变换的性质？
- 由于

$$x^*(-n) = x_e^*(-n) + x_o^*(-n) = x_e(n) - x_o(n)$$

- 得到

$$x_e(n) = \frac{1}{2}[x(n) + x^*(-n)]$$

$$x_o(n) = \frac{1}{2}[x(n) - x^*(-n)]$$

3.傅里叶变换的对称性

$$x_e(n)=\frac{1}{2}[x(n)+\underline{x^*(-n)}]$$

$$x_o(n)=\frac{1}{2}[x(n)-x^*(-n)]$$

$$FT[x^*(-n)]=FT[x_r(-n)-jx_i(-n)]$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}[x_r(-n)-jx_i(-n)]e^{-j\omega n}$$

$$=\sum_{m=-\infty}^{\infty}[x_r(m)-jx_i(m)]e^{j\omega m}$$

$$=\left[\sum_{m=-\infty}^{\infty}[x_r(m)+jx_i(m)]e^{-j\omega m}\right]^*$$

$$=X^*(e^{j\omega})$$

- 分别对 $x_e(n)$ 和 $x_o(n)$ 进行傅里叶变换，得到

$$FT[x_e(n)]=\frac{1}{2}[X(e^{j\omega})+\underline{X^*(e^{j\omega})}]=\mathrm{Re}\left[X(e^{j\omega})\right]=X_R(e^{j\omega})$$

$$FT[x_o(n)]=\frac{1}{2}[X(e^{j\omega})-X^*(e^{j\omega})]=j\,\mathrm{Im}\left[X(e^{j\omega})\right]=jX_I(e^{j\omega})$$

$$X(e^{j\omega})=FT[x(n)]=FT[x_e(n)+x_o(n)]$$

$$=X_R(e^{j\omega})+jX_I(e^{j\omega})$$

3.傅里叶变换的对称性

$$X(e^{j\omega}) = FT[x(n)] = FT[x_e(n) + x_o(n)]$$
$$= X_R(e^{j\omega}) + jX_I(e^{j\omega})$$

- 结论：

傅里叶变换的实部对应序列的共轭对称部分，而它的虚部（包括j）对应序列的共轭反对称部分。

- P34 证明（实序列傅里叶变换的对称性？）

小结：

- 时域离散信号的离散时间傅里叶变换（DTFT）
  - 非周期信号 → 连续周期频谱
  - 周期信号 → 连续周期冲激频谱
- 时域离散周期信号的离散傅里叶级数（DFS）
  - 周期信号 → 离散周期频谱
- 变换的物理意义
- 离散信号傅里叶变换的性质

2.3时域离散信号的Z变换

z-Transform

2.3时域离散信号的Z变换

- Z变换的定义及其与傅立叶变换的关系
- Z变换的收敛域与序列特性之间的关系
- 逆Z变换
- Z变换的性质和定理

Z变换的意义

- 傅立叶变换为信号提供了一种频域表示方法，便于进行频域分析及信号处理；
- 序列的离散时间傅立叶变换是有条件的，即需满足绝对可和的条件；
- 很多情况下，序列的傅立叶变换不存在，无法利用其频域特征；
- Z变换是傅立叶变换的推广形式，为许多信号提供了（复）频域表示。

Z变换的意义

- 很多序列的离散时间傅立叶变换不存在，但其Z变换存在；
- Z变换是数字滤波器设计与分析的重要工具；
- 线性时不变离散时间系统的分析工具，如稳定性、性能指标等。

2.3.1 Z变换的定义及其与傅立叶变换的关系

- **Z变换的定义**

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}$$

Z是复变量 $z=\mathrm{Re}(z)+j\,\mathrm{Im}(z)$

- 双边**Z**变换
- 单边**Z**变换

Z变换的定义

- Z变换存在的充分条件：前面的幂级数收敛，

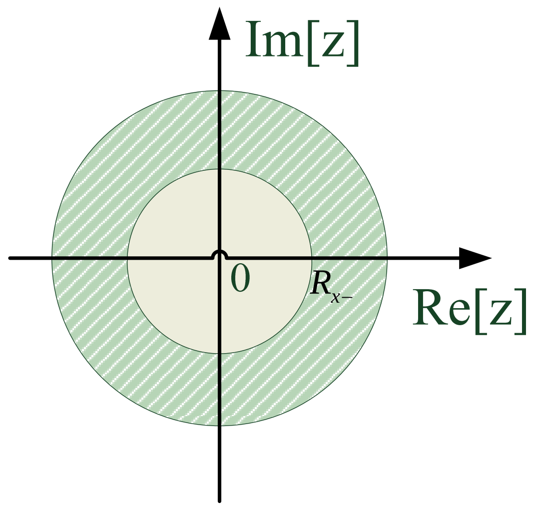
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| x(n) z^{-n} \right| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| |z|^{-n} < \infty$$

- 使上式满足的|z|的取值域，为X(z)的收敛域。

$$\boxed{R_{x-} < |z| < R_{x+}}$$

$R_{x-} \geq 0$ 收敛域的最小收敛半径

R_{x+} 收敛域的最大收敛半径



Z变换的定义

- 收敛域 (ROC) 是Z变换不可缺少的一部分

例2.3.1　$x(n)=a^n u(n)$，求其Z变换，并确定收敛域

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u(n) z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}(az^{-1})^n$$

收敛的条件：

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left|az^{-1}\right|^n<\infty \Rightarrow \left|az^{-1}\right|<1 \Rightarrow |z|>|a|$$

得到：

$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(az^{-1})^n=\frac{1}{1-az^{-1}} \qquad |z|>|a|$$

Z变换与傅里叶变换之间的关系

- 令 $z = re^{j\omega}$

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)r^{-n}e^{-j\omega n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}[x(n)r^{-n}]e^{-j\omega n}$$

- 如果 $r=|z|=1$ **Z**变换变为傅立叶变换
- 傅立叶变换是单位圆上的**Z**变换，单位圆必须包含在收敛域中

例：$x(n)=a^n u(n)$ 中，当**a=1**，即**u(n)** 的**Z**变换为

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}u(n)z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}z^{-n}=\frac{1}{1-z^{-1}}\quad |z|>1$$

收敛域不包含单位圆，单位圆上的**Z**变换不存在，傅立叶变换不存在

2.3.2 Z变换的收敛域与序列特性之间的关系

- 一般而言，z变换是有理函数，分子分母用z的多项式描述：

$$X(z)=\frac{P(z)}{D(z)}=\frac{p_0+p_1z^{-1}+\cdots+p_{M-1}z^{-M+1}+p_Mz^{-M}}{d_0+d_1z^{-1}+\cdots+d_{N-1}z^{-N+1}+d_Nz^{-N}}$$

- Z变换的零点：分子多项式的根
- Z变换的极点：分母多项式的根
- 收敛域总以极点为界
- 有限长序列、右序列、左序列、双边序列的收敛域？

1. 有限长序列Z变换的收敛域

- 有限长序列：$x(n), \quad n_1 < n < n_2, \quad |x(n)| < \infty$
- Z变换：$$X(z) = \sum_{n=n_1}^{n_2} x(n) z^{-n}$$
- 收敛域：

$$0 < |z| < \infty \qquad n_1 < 0,\ n_2 > 0$$

$$0 \le |z| < \infty \qquad n_1 < 0, n_2 \le 0$$

$$0 < |z| \le \infty \qquad n_1 \ge 0, n_2 > 0$$

2. 右序列Z变换的收敛域

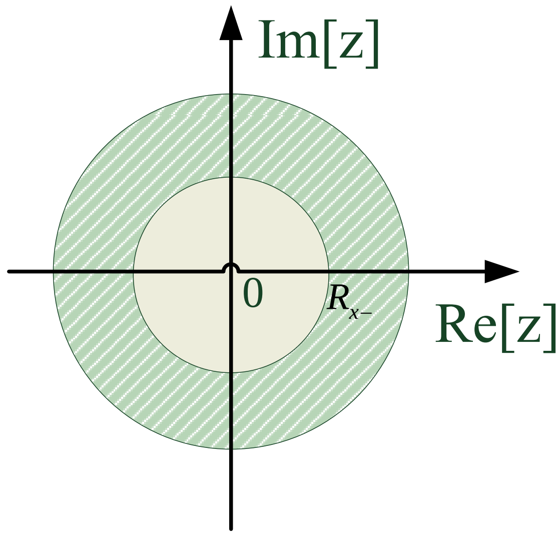
- 右序列： $x(n),\quad n \ge n_1,\quad |x(n)| < \infty$
- 右序列的Z变换

$$X(z) = \sum_{n=n_1}^{\infty} x(n) z^{-n} = \sum_{n=n_1}^{-1} x(n) z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n}, \qquad n_1 < 0$$

- 收敛域：

第一项(有限序列)： $0 \le |z| < \infty$

第二项(因果序列)： $R_{x-} < |z| \le \infty$



收敛域： $R_{x-} < |z| < \infty \qquad n_1 < 0$

$R_{x-} < |z| \le \infty \qquad n_1 \ge 0$

3. 左序列Z变换的收敛域

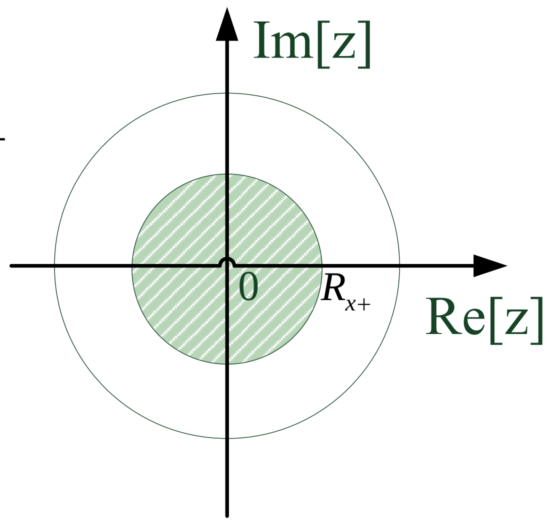
- 左序列： $x(n), \quad n \le n_1, \quad |x(n)| < \infty$
- 左序列的Z变换

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{n_1} x(n) z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} x(n) z^{-n} + \sum_{n=0}^{n_1} x(n) z^{-n}, \quad n_1 \ge 0$$

- 收敛域：

第一项(反因果序列)：$0 \le |z| < R_{x+}$

第二项(有限序列)：$0 < |z| \le \infty$



收敛域：

$$0 < |z| < R_{x+} \qquad n_1 \ge 0$$

$$0 \le |z| < R_{x+} \qquad n_1 < 0$$

4. 双边序列Z变换的收敛域

- 双边序列： $x(n), \quad -\infty \le n \le \infty, \quad |x(n)| < \infty$
- 双边序列的Z变换

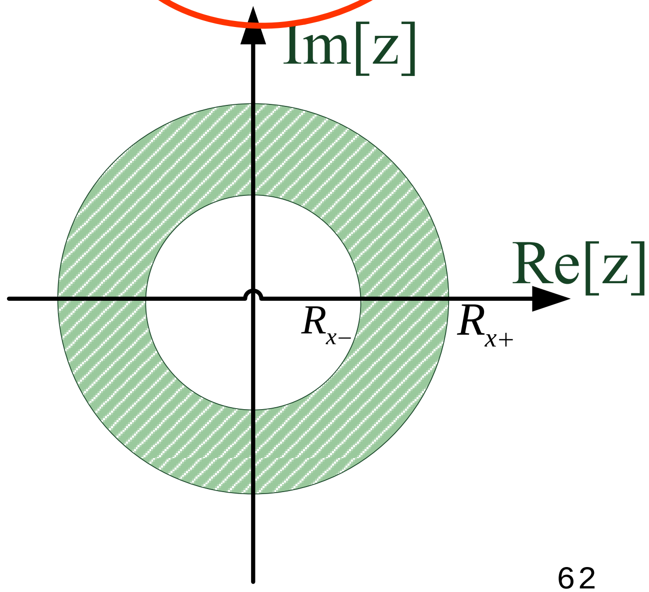
$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} x(n) z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

- 收敛域：

第一项(左序列)： $0 \le |z| < R_{x+}$

第二项(右序列)： $R_{x-} < |z| \le \infty$

收敛域： $R_{x-} < |z| < R_{x+}$



例2.3.2： 求 $x(n)=R_N(n)$ 的Z变换及其收敛域。

解：有限长序列，n＝0～N-1，

收敛域： $0<|z|\le\infty$

Z变换：

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}R_N(n)z^{-n}=\sum_{n=0}^{N-1}z^{-n}=\frac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}}$$

Z＝1既是极点也是零点，抵消后单位圆仍在收敛域内。

例2.3.3：求 $x(n)=-a^n u(-n-1)$ 的Z变换及其收敛域。

解： $-n-1\geq 0$， 即$n\leq -1$，序列值非零，即为左序列

收敛域： $0\leq |z| < R_{x+}$

Z变换：

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}-a^n u(-n-1)z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{-1}-a^n z^{-n}=\sum_{n=1}^{\infty}-a^{-n}z^n$$

如果$X(z)$存在，则要求 $|a^{-1}z|<1$，得到收敛域为 $|z|<|a|$

在收敛域内，其Z变换为：

$$X(z)=\frac{-a^{-1}z}{1+a^{-1}z}=\frac{1}{1-az^{-1}} \qquad |z|<|a|$$

比较：<u>例2.3.1</u> 和 <u>例2.3.3</u>

例2.3.1 $x(n)=a^n u(n)$，求其Z变换，并确定收敛域

$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(az^{-1})^n=\frac{1}{1-az^{-1}} \qquad |z|>|a|$$

例2.3.3：求 $x(n)=-a^n u(-n-1)$ 的Z变换及其收敛域

$$X(z)=\frac{-a^{-1}z}{1+a^{-1}z}=\frac{1}{1-az^{-1}} \qquad |z|<|a|$$

结果：Z变换的表达式相同，但收敛域不同。

收敛域是Z变换不可缺少的一部分

例2.3.4：求 $x(n)=a^{|n|}$ 的Z变换及其收敛域。

解： 双边序列

收敛域： $R_{x-}<|z|<R_{x+}$

Z变换： $X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a^{|n|}z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{-1}a^{-n}z^{-n}+\sum_{n=0}^{\infty}a^{n}z^{-n}$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}a^{n}z^{n}+\sum_{n=0}^{\infty}a^{n}z^{-n}$$

两部分的收敛域分别为：

$|az|<1$，则 $|z|<|a|^{-1}$； $|az^{-1}|<1$，则 $|z|>|a|$

因此，该序列Z变换的收敛域为：

$$|a|<|z|<|a|^{-1}$$

在该收敛域内，Z变换为：

- **P38 图表**

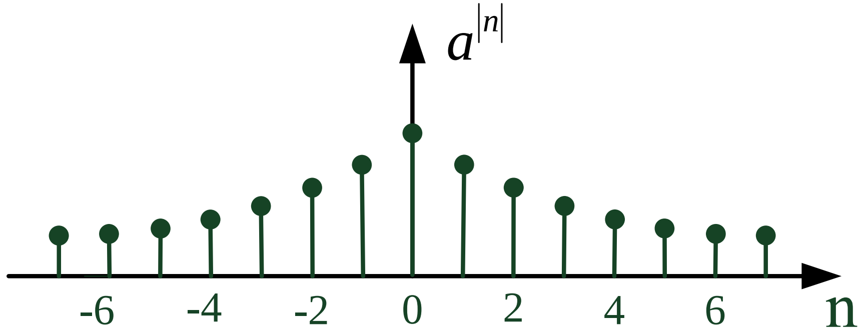
$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a^{|n|}z^{-n}=\sum_{n=1}^{\infty}a^{n}z^{n}+\sum_{n=0}^{\infty}a^{n}z^{-n}$$

$$=\frac{az}{1-az}+\frac{1}{1-az^{-1}}=\frac{1-a^{2}}{(1-az)(1-az^{-1})}$$

$|a|<|z|<|a|^{-1}$ 且 $|a|<1$

- 收敛域包含单位圆，其傅立叶变换存在，可直接求出

$$X(e^{j\omega})=X(z)|_{z=e^{j\omega}}=\frac{1-a^{2}}{(1-ae^{j\omega})(1-ae^{-j\omega})}$$



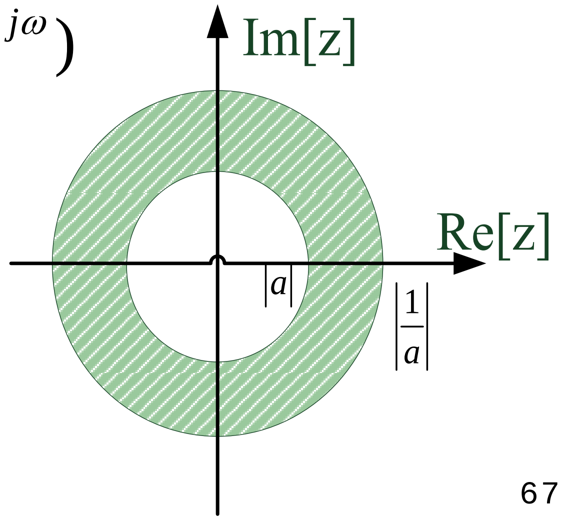


Table 2.3.2: Some commonly used z-transform pairs. P38 图表

Sequence	z-Transform	ROC
$\delta[\mathrm{n}]$	**1**	All values of z
$u[\mathrm{n}]$	$\dfrac{1}{1-\mathrm{z}^{-1}}$	$\lvert\mathrm{z}\rvert > 1$
$\alpha^{\mathrm{n}}u[n]$	$\dfrac{1}{1-\alpha\mathrm{z}^{-1}}$	$\lvert\mathrm{z}\rvert > \lvert\alpha\rvert$
$\left(\mathrm{r}^{\mathrm{n}}\cos\omega_0\mathrm{n}\right)u[n]$	$\dfrac{1\text{-}(\mathrm{r}\cos\omega_0)\mathrm{z}^{-1}}{1-(2\mathrm{r}\cos\omega_0)\mathrm{z}^{-1}+\mathrm{r}^2\mathrm{z}^{-2}}$	$\lvert\mathrm{z}\rvert > r$
$\left(\mathrm{r}^{\mathrm{n}}\sin\omega_0\mathrm{n}\right)u[n]$	$\dfrac{1\text{-}\left(\mathrm{r}\sin\omega_0\right)\mathrm{z}^{-1}}{1-\left(2\mathrm{r}\cos\omega_0\right)\mathrm{z}^{-1}+\mathrm{r}^2\mathrm{z}^{-2}}$	$\lvert\mathrm{z}\rvert > r$

2.3.3逆Z变换

- 已知序列的Z变换及其收敛域，求原序列
- 方法：
  - 部分分式展开
  - 围线积分法
  - 幂级数法

1.幂级数法

- 从定义出发

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

- 原序列是z的幂级数的系数

- Z变换的两个多项式之比，通过长除，可以得到z的负幂级数

$$X(z)=\frac{P(z)}{D(z)}=\frac{p_0+p_1z^{-1}+\cdots+p_{M-1}z^{-M+1}+p_Mz^{-M}}{d_0+d_1z^{-1}+\cdots+d_{N-1}z^{-N+1}+p_Nz^{-N}}$$

例：

$$X(z)=\frac{1-\frac{1}{3}z^{-1}}{1-\frac{1}{4}z^{-2}},\quad |z|>\frac{1}{2}$$

$$1-\frac{1}{3}z^{-1}+\frac{1}{4}z^{-2}-\frac{1}{12}z^{-3}+\cdots$$

$$1-\frac{1}{4}z^{-2}\,\Big)\,1-\frac{1}{3}z^{-1}$$

$$1\qquad\qquad -\frac{1}{4}z^{-2}$$

$$-\frac{1}{3}z^{-1}+\frac{1}{4}z^{-2}$$

$$-\frac{1}{3}z^{-1}\qquad\qquad +\frac{1}{12}z^{-3}$$

$$+\frac{1}{4}z^{-2}-\frac{1}{12}z^{-3}$$

$$x(n)=\left\{1,-\frac{1}{3},\frac{1}{4},-\frac{1}{12},\cdots\right\}$$

2.部分分式法

- 将Z变换的有理分式分解为简单的部分分式之和，
- 查表得到各部分分式所对应的序列，
- 求和，获得原序列。

2.部分分式法

- 设**X(z)** 有**N**个一阶极点

$$X(z)=A_0+\sum_{m=1}^{N}\frac{A_m z}{z-z_m}$$

$$\frac{X(z)}{z}=\frac{A_0}{z}+\sum_{m=1}^{N}\frac{A_m}{z-z_m}$$

- 通过留数，求取 A_0, A_m

$$A_0=\mathrm{Res}[\frac{X(z)}{z},\ 0] \qquad A_m=\mathrm{Res}[\frac{X(z)}{z},\ z_m]$$

例2.3.5 用部分分式法求逆Z变换

$$X(z)=\frac{5z^{-1}}{1+z^{-1}-6z^{-2}},\quad 2<|z|<3$$

解：

$$X(z)=\frac{5z^{-1}}{1+z^{-1}-6z^{-2}}=\frac{5z}{z^2+z-6}$$

$$\frac{X(z)}{z}=\frac{5}{z^2+z-6}=\frac{A_1}{z-2}+\frac{A_2}{z+3}$$

$$A_1=\mathrm{Res}[\frac{X(z)}{z},\ 2]=\frac{5}{(z-2)(z+3)}(z-2)\,|_{z=2}=1$$

$$A_2=\mathrm{Res}[\frac{X(z)}{z},\ -3]=\frac{5}{(z-2)(z+3)}(z+3)\,|_{z=-3}=-1$$

于是，得：

$$\frac{X(z)}{z}=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z+3},\quad 则X(z)=\frac{1}{1-2z^{-1}}-\frac{1}{1+3z^{-1}}$$

$$X(z)=\frac{1}{1-2z^{-1}}-\frac{1}{1+3z^{-1}},\quad 2<|z|<3$$

- 双边序列
- 根据极点(**z=2, z=-3**)确定每个分式的收敛域
  - 第一个分式的收敛域 $|z|>2$
  - 第二个分式的收敛域 $|z|<|-3|$,即$|z|<3$
- 查表，获得每个分式的原序列

$$2^n u(n) \qquad -(-3)^n u(-n-1)$$

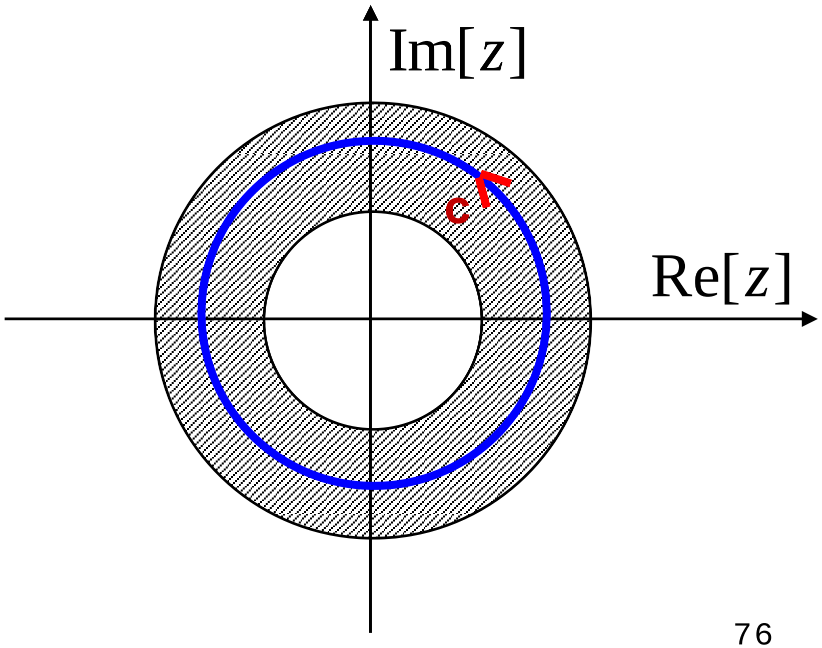
- **X(z)**的原序列 $x(n)=2^n u(n)+(-3)^n u(-n-1)$

3.围线积分法

- 基于围线积分的原序列求取公式:

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j}\oint_c X(z) z^{n-1} dz \quad c \in (R_{x-}, R_{x+})$$

  - **c是X(z)收敛域中任意一条包含原点的逆时针旋转的封闭曲线**
  - 柯西留数定理计算围线积分



柯西留数定理

$$x(n)=\frac{1}{2\pi j}\oint_c X(z)z^{n-1}dz \quad c\in(R_{x-},R_{x+})$$

- 令 $F(z)=X(z)z^{n-1}$，z_k 为**F(z)**在围线**c**内的极点，设有**M**个极点，则：

$$\boxed{x(n)=\frac{1}{2\pi j}\oint_c X(z)z^{n-1}dz=\sum_{k=1}^{M}\mathrm{Res}[F(z),z_k]}$$

逆**z**变换： 围线积分 → 围线**c**内所有极点的留数之和

- z_k 为单阶极点（单重极点）

$$\mathrm{Res}[F(z),z_k]=(z-z_k)F(z)\big|_{z=z_k}$$

- z_k 为**N**阶极点（多重极点）

$$\mathrm{Res}[F(z),z_k]=\frac{1}{(N-1)!}\frac{d^{N-1}}{dz^{N-1}}\left[(z-z_k)^N F(z)\right]\Big|_{z=z_k}$$

留数辅助定理

$$F(z)=X(z)z^{n-1},\quad X(z)=\frac{Q(z)}{P(z)}$$

- 多阶极点留数的计算比较麻烦，可以根据留数辅助定理改求围线c以外的极点的留数之和。
- 如果F(z)在z平面上有N个极点，围线c内有 N_1 个，围线c外有 N_2 个，则有：

$$\sum_{k=1}^{N_1}\mathrm{Res}[F(z),z_{1k}]=-\sum_{k=1}^{N_2}\mathrm{Res}[F(z),z_{2k}]$$

- 上式成立的条件：F(z)分母的阶次≥分子的阶次+2

设P(z)、Q(z)的阶次分别为N、M，则成立的条件为：

$$N-M-(n-1)\geq 2 \quad \text{或者} \quad n\leq N-M-1$$

例子：

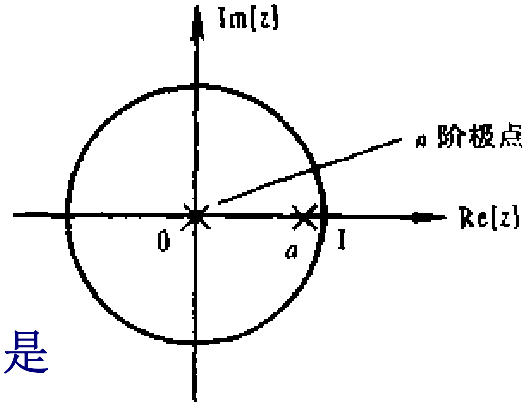
1. 已知 $X(z)=\dfrac{1}{1-az^{-1}},\quad |z|>|a|$ ，求其逆z变换 $x(n)$ 。

2. 已知 $X(z)=\dfrac{1-a^2}{\left(1-az^{-1}\right)\left(1-az\right)},\quad |a|<1$ ， $a<|z|<|a|^{-1}$

求其逆z变换 $x(n)$ 。

例2.3.6 已知 $X(z)=(1-az^{-1})^{-1}$ $|z|>|a|$ ，求其逆z变换 $x(n)$ 。

解：收敛域包含∞，是一个因果序列。



求F(z)的极点

$$F(z)=X(z)z^{n-1}=\frac{z^{n-1}}{(1-az^{-1})}=\frac{z^n}{(z-a)} \quad |z|>|a|$$

$n\geq 0$ F(z)的极点为 $z=a$ ，它是围线c内的极点，于是

$$x(n)=\mathrm{Res}[F(z),a]=(z-a)\frac{z^n}{z-a}\bigg|_{z=a}=a^n \quad n\geq 0$$

$$x(n)=a^n, \quad n\geq 0$$

$n<0$ F(z)的极点为 $z=a$ 和 n 阶极点 z=0 ，均在围线c内，

X(z)的分子、分母的阶次相等 N=M=1，满足留数辅助定理的条件

$$n\leq N-M-1$$

可用围线外的留数代替围线内的留数，但围线外无极点，可得

$$x(n)=0, \quad n<0$$

因此，原序列为 $x(n)=a^n u(n)$

例2.3.7 $X(z)=\dfrac{1-a^2}{(1-az)(1-az^{-1})}$, $|a|<|z|<|a|^{-1}, |a|<1$，求逆z变换

解：收敛域为环状域，原序列是双边序列。求F(z)

$$F(z)=\frac{1-a^2}{(1-az)(1-az^{-1})}z^{n-1}=-\frac{(1-a^2)z^n}{a(z-a)(z-a^{-1})}$$

分别考虑 $n\ge 0$，$n<0$

$n\ge 0$ F(z)的极点有$z=a$，$z=a^{-1}$， 围线内只有极点$z=a$

$$x(n)=\mathrm{Res}[F(z),a]=(z-a)\left.\frac{(1-a^2)z^n}{-a(z-a)(z-a^{-1})}\right|_{z=a}=a^n$$

$n<0$ F(z)的极点 $z=0,a,a^{-1}$， $z=0$是n阶极点

围线内有极点$z=0,a$，围线外有极点$z=a^{-1}$

$$x(n)=-\mathrm{Res}[F(z),a^{-1}]=-(z-a^{-1})\left.\frac{(1-a^2)z^n}{-a(z-a)(z-a^{-1})}\right|_{z=a^{-1}}=a^{-n}$$

$$X(z)=\frac{1-a^2}{(1-az)(1-az^{-1})},\ |a|<|z|<|a|^{-1}, |a|<1$$

- 所以，原序列为

$$x(n)=\begin{cases} a^n & n\geq 0 \\ a^{-n} & n<0 \end{cases}$$

$$=a^{|n|}$$

例3：$X(z)=\dfrac{1-a^2}{(1-az)(1-az^{-1})}$，$|a|<1$，求逆Z变换。

解：$x(n)=\dfrac{1}{2\pi j}\oint_c \dfrac{1-a^2}{(1-az)(1-az^{-1})}z^{n-1}dz$

令$F(z)=\dfrac{1-a^2}{(1-az)(1-az^{-1})}z^{n-1}=\dfrac{(a^2-1)z^n}{a(z-a^{-1})(z-a)}$

c为X(z)收敛域内闭合围线.

而题中未给出收敛域，根据$X(z)$的极点$z=a,a^{-1}$

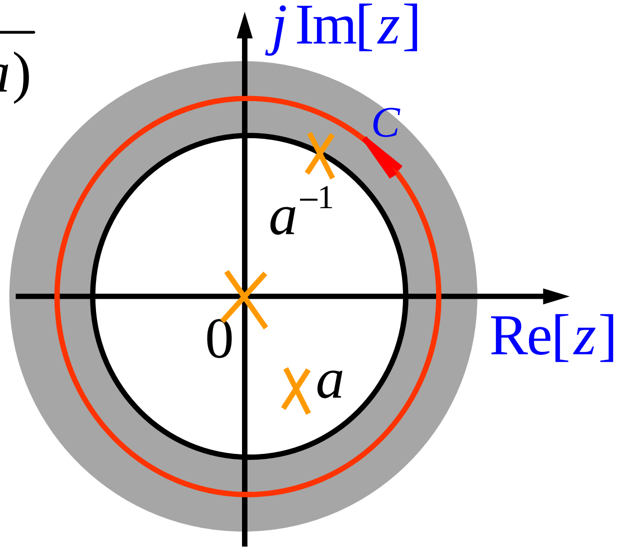
有三种可能的收敛域：

1) $|z|>|a^{-1}|$ 右序列

2) $|z|<|a|$ 左序列

3) $|a|<|z|<|a^{-1}|$ 双边序列

1) $|z|>|a^{-1}|$ $\quad F(z)=\dfrac{(a^2-1)z^n}{a(z-a^{-1})(z-a)}$



$\because$ 收敛域是圆的外部

当 $n<0$ 时

$F(z)$ 在围线 c 内有极点 $z=a$，$a^{-1}, 0$

由于 $n \le N-M-1$,

$\therefore x(n)=0$，$n<0$

当 $n \ge 0$ 时，$F(z)$ 在围线 c 内有两个一阶极点 $z=a$，a^{-1}

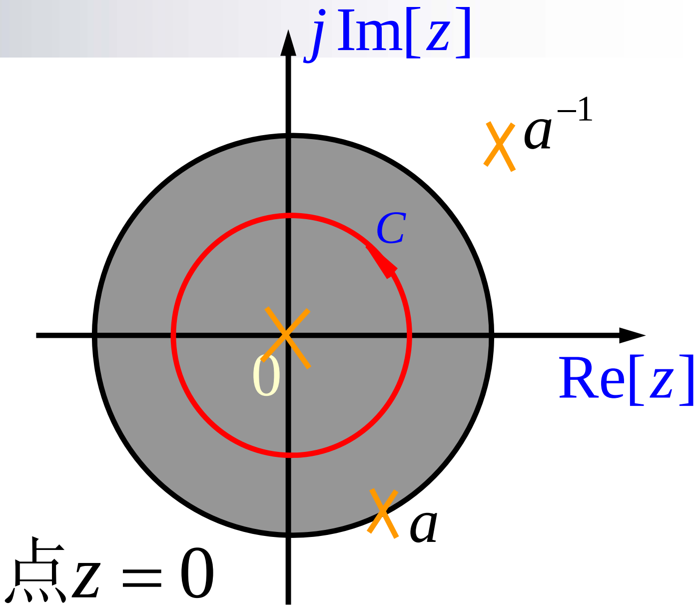
$$x(n)=\mathrm{Res}[F(z)]_{z=a}+\mathrm{Res}[F(z)]_{z=a^{-1}}$$

$$=\left[(z-a)\frac{(a^2-1)z^n}{a(z-a^{-1})(z-a)}\right]_{z=a}+\left[(z-a^{-1})\frac{(a^2-1)z^n}{a(z-a^{-1})(z-a)}\right]_{z=a^{-1}}$$

$$=a^n-a^{-n}$$

$$\therefore x(n)=(a^n-a^{-n})u(n)$$

2) $|z|<|a|$



当$n \geq 0$时，$F(z)$在围线c内无极点

故 $x(n)=0$

当$n<0$时，$F(z)$在c内有一个n阶极点$z=0$

在c外有一阶极点$z=a,a^{-1}$，

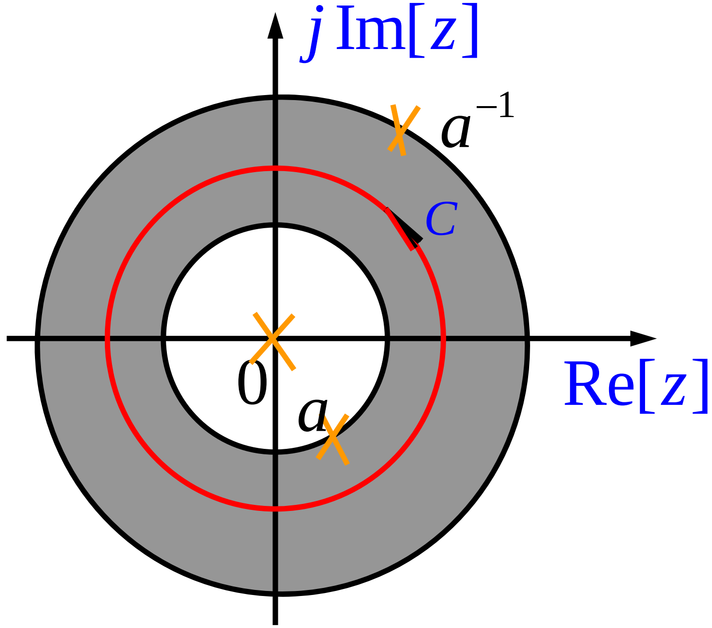
且分母阶次比分子高两阶以上

$$x(n)=-\mathrm{Res}[F(z)]_{z=a}-\mathrm{Res}[F(z)]_{z=a^{-1}}$$

$$=-a^{n}-(-a^{-n})=a^{-n}-a^{n}$$

$$\therefore x(n)=(a^{-n}-a^{n})u(-n-1)$$

3) $|a|<|z|<|a^{-1}|$



当$n \geq 0$时

$F(z)$在c内有一阶极点$z=a$

$$x(n)=\mathrm{Res}[F(z)]_{z=a}=a^{n}$$

当$n<0$时

$F(z)$在c内有一阶极点$z=a$和n阶极点$z=0$

在c外有一阶极点$z=a^{-1}$,

且分母阶次比分子高两阶以上

$$x(n)=-\mathrm{Res}[F(z)]_{z=a^{-1}}=a^{-n}$$

$$\therefore x(n)=a^{n}u(n)+a^{-n}u(-n-1)=a^{|n|}$$

2.3.4 Z变换的性质

- Z变换的性质与DTFT的性质相似
- 掌握Z变换的性质，便于z域的计算与信号分析
- 注意收敛域（ROC）的变化。借以揭示信号在时域与在 Z 域的特性之间的关系。

2.3.4 z变换的性质(1)

线性

$$x(n) \Leftrightarrow X(z) \quad R_{x-} < |z| < R_{x+}$$

$$y(n) \Leftrightarrow Y(z) \quad R_{y-} < |z| < R_{y+}$$

$$w(n) = ax(n) + by(n)$$

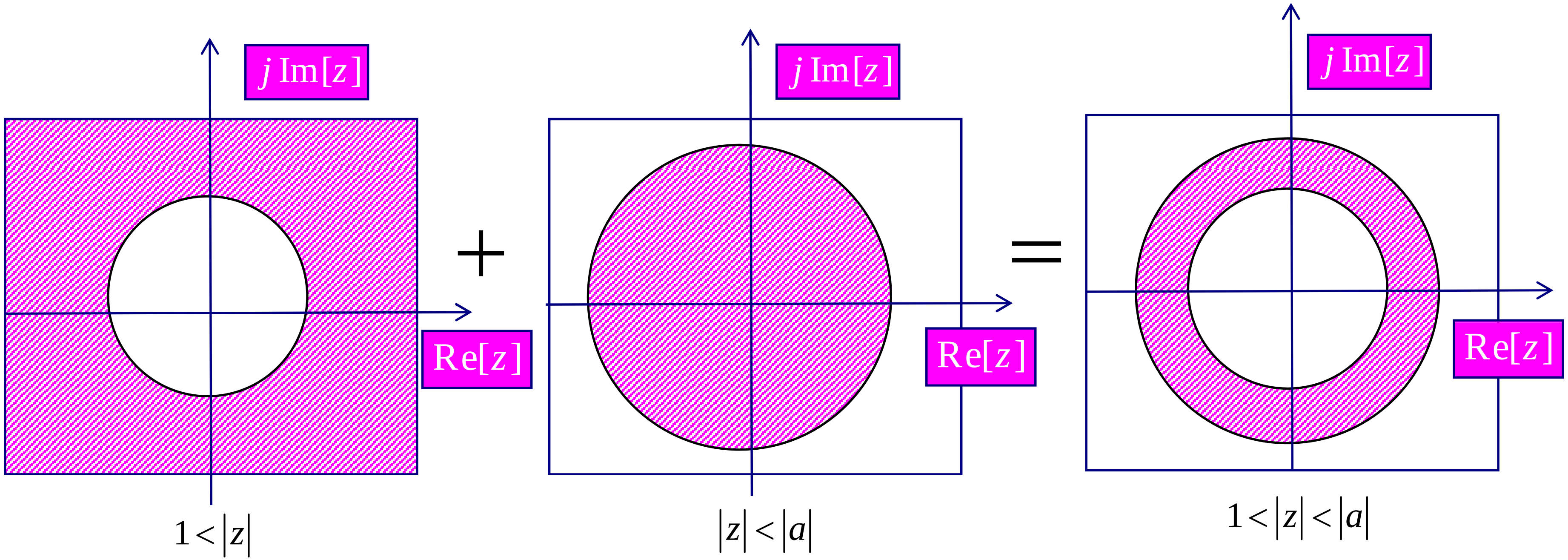
$$W(z) = aX(z) + bY(z) \quad R_{w-} < |z| < R_{w+}$$

$$R_{w-} = \max[R_{x-}, R_{y-}], \quad R_{w+} = \min[R_{x+}, R_{y+}]$$

2.3.4 z变换的性质(1)

$$ROC \supset ROC_1 \cap ROC_2$$

例： $x(n) = u(n) - a^n u(-n-1) \Leftrightarrow \dfrac{1}{1-z^{-1}} + \dfrac{1}{1-az^{-1}}, 1<|z|<|a|$



例2.3.8 求$x(n)=r^n\cos(\omega_0 n)u(n)$的z变换及其收敛域

解：

$$x(n)=r^n\cos(\omega_0 n)u(n)=\frac{r^n}{2}[e^{j\omega_0 n}+e^{-j\omega_0 n}]u(n)$$

令 $v(n)=\frac{r^n}{2}e^{j\omega_0 n}u(n)=\frac{1}{2}\alpha^n u(n),$ 则 $v^*(n)=\frac{r^n}{2}e^{-j\omega_0 n}u(n)$

$$V(z)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{1-\alpha z^{-1}}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{1-re^{j\omega_0}z^{-1}} \qquad \left|re^{j\omega_0}\right|<|z|\le\infty$$

$$V^*(z^*)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{1-\alpha^* z^{-1}}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{1-re^{-j\omega_0}z^{-1}} \qquad \left|re^{j\omega_0}\right|<|z|\le\infty$$

$$X(z)=V(z)+V^*(z^*)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-re^{j\omega_0}z^{-1}}+\frac{1}{1-re^{-j\omega_0}z^{-1}}\right)$$

$$=\frac{1-r\cos\omega_0 z^{-1}}{1-2r\cos\omega_0 z^{-1}+r^2z^2} \qquad |z|>|r|$$

2.3.4 z 变换的性质(2)

序列移位

$$x(n-n_0) \Leftrightarrow z^{-n_0} X(z) \quad n_0 \geq 0$$

ROC不变

例2.3.9 设 $x(n)$是因果序列,收敛域为$|z| > R_x$,求 $y(n) = \sum_{m=0}^{n} x(m)$ 的z变换及其收敛域

解: $$x(n) = \sum_{m=0}^{n} x(m) - \sum_{m=0}^{n-1} x(m) = y(n) - y(n-1)$$

序列移位

$$X(z) = Y(z) - z^{-1}Y(z)$$

$$Y(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} X(z)$$

因Y(z)有极点z=1,且y(n)为因果序列，Y(z)的收敛域为:

$$|z| > \max[R_x, 1]$$

2.3.4 z变换的性质(3)

时间反转

$$x(n) \Leftrightarrow X(z) \quad R_{x-} < |z| < R_{x+}$$

$$x(-n) \Leftrightarrow X\left(z^{-1}\right) \quad {R_{x+}}^{-1} < |z| < {R_{x-}}^{-1}$$

2.3.4 z变换的性质(4)

乘以指数序列

$$x(n) \Leftrightarrow X(z) \quad R_{x-} < |z| < R_{x+}$$

$$a^n x(n) \Leftrightarrow X(a^{-1}z) \quad |a| R_{x-} < |z| < |a| R_{x+}$$

2.3.4 z变换的性质(5)

Z域微分

$$x(n) \Leftrightarrow X(z) \quad R_{x-} < |z| < R_{x+}$$

$$nx(n) \Leftrightarrow -z\frac{dX(z)}{dz}$$

*ROC*不变

例2.3.10 $X(z)=\lg(1+az^{-1}),|z|>|a|$, 求其反变换

解：利用微分性质，将非有理函数转换成有理函数表达式

$$-z\frac{dX(z)}{dz}=\frac{az^{-1}}{1+az^{-1}}\quad |z|>|a|$$

$$nx(n)\Leftrightarrow -z\frac{dX(z)}{dz}$$

$$IZT[\frac{a}{1+az^{-1}}]=a(-a)^{n}u(n)$$

序列移位性质 $$IZT[\frac{az^{-1}}{1+az^{-1}}]=a\left(-a\right)^{n-1}u(n-1)=nx(n)$$

$$x(n)=\frac{(-1)^{n-1}a^{n}}{n}u(n-1)$$

2.3.4 z变换的性质(6)

共轭

$$x^*(n) \Leftrightarrow X^*(z^*)$$

*ROC*不变

2.3.4 z变换的性质(7)

时域卷积定理

$$x(n) \Leftrightarrow X(z) \quad R_{x-} < |z| < R_{x+}$$

$$y(n) \Leftrightarrow Y(z) \quad R_{y-} < |z| < R_{y+}$$

$$w(n) = x(n) * y(n)$$

$$W(z) = X(z)Y(z) \qquad R_{w-} < |z| < R_{w+}$$

$$R_{w-} = \max[R_{x-}, R_{y-}], \quad R_{w+} = \min[R_{x+}, R_{y+}]$$

例：令 系统的单位脉冲响应 $h(n)=a^n u(n), |a|<1$, 输入序列 $x(n)=u(n)$, 求系统的输出序列 $y(n)$

解：

$$y(n)=h(n)*x(n)$$

根据时域卷积定理 $Y(z)=H(z)X(z)$

$$\mathrm{H}(z)=ZT[a^n u(n)]=\frac{1}{1-az^{-1}}, \quad |z|>|a|$$

$$X(z)=ZT[u(n)]=\frac{1}{1-z^{-1}}, \qquad |z|>|1|.$$

$$\therefore Y(z)=\frac{1}{(1-az^{-1})(1-z^{-1})}, \quad |z|>|1|$$

利用围线积分，求输出序列y(n)

$$F(z)=Y(z)z^{n-1}=\frac{z^{n+1}}{(z-a)(z-1)}$$

- 输出序列为因果序列，**n≥0**，围线包围**2**个极点**z=a**，**1**

$$y(n)=\mathrm{Res}[F(z),a]+\mathrm{Res}[F(z),1]$$

$$=(z-a)\frac{z^{n+1}}{(z-a)(z-1)}\bigg|_{z=a}+(z-1)\frac{z^{n+1}}{(z-a)(z-1)}\bigg|_{z=1}$$

$$=\frac{a^{n+1}}{a-1}+\frac{1}{1-a}=\frac{1-a^{n+1}}{1-a}$$

- 最后得

$$y(n)=\frac{1-a^{n+1}}{1-a}u(n)$$

2.3.4 z变换的性质(8)

复卷积定理

$$x(n) \Leftrightarrow X(z) \quad R_{x-} < |z| < R_{x+}$$

$$y(n) \Leftrightarrow Y(z) \quad R_{y-} < |z| < R_{y+}$$

$$w(n) = x(n)y(n)$$

$$W(z) = \frac{1}{2\pi j} \oint_c X(v) Y\left(\frac{z}{v}\right) \frac{dv}{v}$$

$$R_{x-}R_{y-} < |z| < R_{x+}R_{y+}$$

$$\max[R_{x-}, |z| / R_{y+}] < |v| < \min[R_{x+}, |z| / R_{y-}]$$

例：设 $Y(z) = ZT[y(n)] = \dfrac{1}{1-z^{-1}} \qquad |z| > 1,$

$$X(z) = ZT[x(n)] = \frac{1-a^2}{(1-az^{-1})(1-az)} \qquad |a| < |z| < |a^{-1}|,$$

$w(n) = x(n)y(n),$ 求 $W(z) = ZT[w(n)]$ 及其收敛域

解（1）：

$$\because y(n) = IZT[\frac{1}{1-z^{-1}}] = u(n)$$

$$x(n) = a^{|n|}$$

得到 $w(n) = a^{|n|}u(n) = a^n u(n)$

$$\therefore W(z) = \frac{1}{1-az^{-1}} \qquad |z| > |a|$$

$$Y(z)=\frac{1}{1-z^{-1}} \quad |z|>1$$

复卷积定理

$$X(z)=\frac{1-a^2}{(1-az^{-1})(1-az)} \quad |a|<|z|<|a^{-1}|$$

解（2）：

$$W(z)=\frac{1}{2\pi j}\oint_c X(v)Y(\frac{z}{v})\frac{dv}{v}$$

$$W(z)=\frac{1}{2\pi j}\oint_c \frac{1-a^2}{(1-av^{-1})(1-av)}\frac{1}{1-\left(\frac{z}{v}\right)^{-1}}\frac{dv}{v}$$

- **V平面上的收敛域**

$$\max[R_{x-},|z|/R_{y+}]<|v|<\min[R_{x+},z/R_{y-}]$$

- 由**X(z)**的收敛域

$$|a|<|z|<|a^{-1}| \quad 得 \quad R_{x-}=|a| \quad R_{x+}=|a^{-1}|$$

- 由**Y(z)**的收敛域

$$|z|>1 \quad 得 \quad R_{y-}=1 \quad R_{y+}=\infty$$

- 故**V**平面上的收敛域

$$\max[R_{x-},|z|/R_{y+}]<|v|<\min[R_{x+},|z|/R_{y-}]$$

$$\max[|a|,0]<|v|<\min[|a^{-1}|,|z|]$$

- 求围线积分

$$W(z)=\frac{1}{2\pi j}\oint_c \frac{1-a^2}{(1-av^{-1})(1-av)}\frac{1}{1-\left(\frac{z}{v}\right)^{-1}}\frac{dv}{v}$$

- 求围线积分

$$W(z)=\frac{1}{2\pi j}\oint_c \frac{1-a^2}{(1-av^{-1})(1-av)}\frac{1}{1-\left(\frac{z}{v}\right)^{-1}}\frac{dv}{v}$$

$$F(v)=X(v)y\left(\frac{z}{v}\right)v^{-1}=\frac{1-a^2}{(1-av^{-1})(1-av)}\frac{1}{1-\left(\frac{z}{v}\right)^{-1}}v^{-1}$$

- **V平面上的极点** $v=a,\ a^{-1},\ z$

- **V平面围线c以内的极点**

$$\max[|a|,0]<|v|<\min[|a^{-1}|,|z|] \Longrightarrow v=a$$

- **W(z)**

$$W(z)=\mathrm{Res}[F(v),a]$$

$$=(v-a)\frac{1-a^2}{(1-av^{-1})(1-av)}\frac{1}{1-vz^{-1}}v^{-1}\bigg|_{v=a}=\frac{1}{1-az^{-1}}$$

$$W(z) = \mathrm{Res}[F(v), a]$$

$$= (v-a)\frac{1-a^2}{(1-av^{-1})(1-av)}\frac{1}{1-vz^{-1}}v^{-1}\bigg|_{v=a} = \frac{1}{1-az^{-1}}$$

- **W(z)的收斂域**

$$R_{x-}R_{y-} < |z| < R_{x+}R_{y+}$$

$$|a|1 < |z| < |a^{-1}|\infty \quad \Rightarrow \quad |a| < |z| \le \infty$$

2.3.4 z变换的性质(9)

初值定理

$$\lim_{z\to\infty} X(z) = x(0)$$

若$x[n]$是因果序列，且已知$X(z)=\mathcal{Z}[x[n]]$

则

$$x[0]=\lim_{z\to\infty} X(z)$$

证明

$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n} = x[0]+x[1]z^{-1}+x[2]z^{-2}+\cdots$$

当$z\to\infty$ 时，上式的级数中除了第一项$x[0]$外，其余各项都趋近于零，所以

$$x[0]=\lim_{z\to\infty} X(z)$$

2.3.4 z变换的性质(10)

终值定理

$$\lim_{n\to\infty} x(n) = \lim_{z\to 1}(z-1)X(z)$$

- **X(z)**在单位圆上只能有一个一阶极点，其它极点均在单位圆内。

作业

- **P56-61:**

  1(2,3)，2(1,3,5,6)，5，8，12，20，21(3,5,8,9)，23，27(3)，29(2)，30，33，44

- 编程：

  P60：38, 40