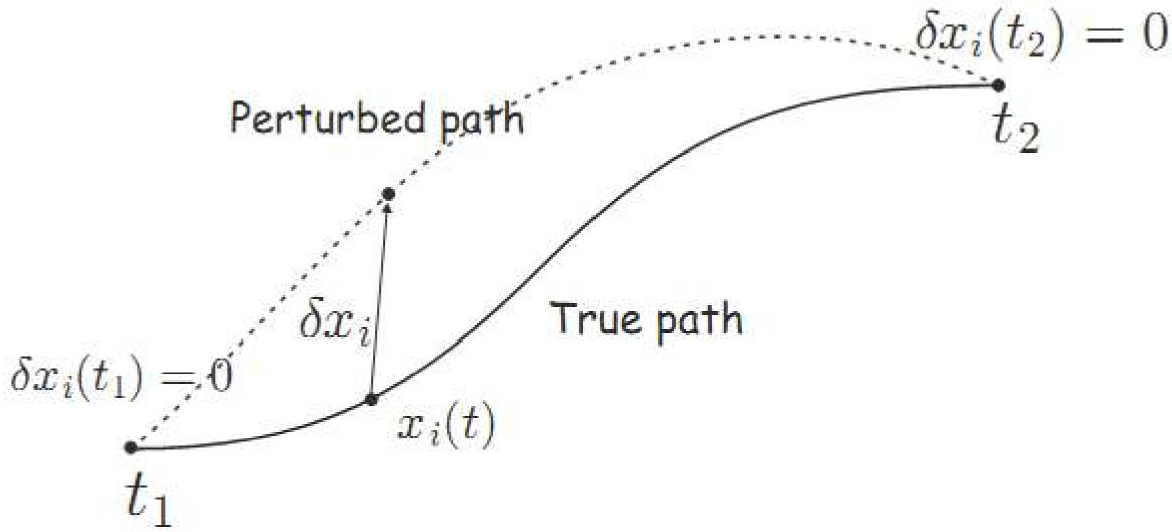
分析力学　5 动力学变分原理（5）



西安电子科技大学　郭空明

qq:717004648

Email：kmguo@xidian.edu.cn

4.1 泛函与变分原理（1）

4.2 哈密顿原理（2）

4.3 连续系统的微振动（1）

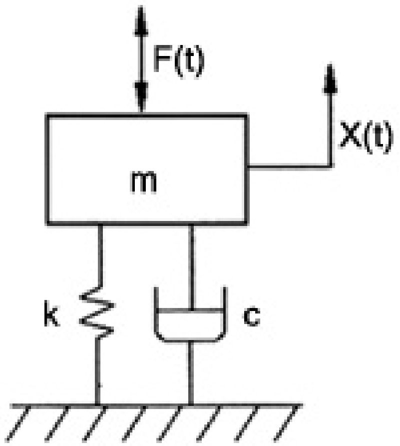
4.4 欧拉-拉格朗日方程（1）

力学的变分原理：提供一种准则，将真实的运动（满足动力学方程）从所有可能的运动中甄别出来。

具有更高的概括性和普适性。

4.1 泛函和变分原理

弹簧的应变能（势能）



数值

数值

$$U(x)=\frac{1}{2}kx^2$$

弹簧的应变能只依赖于一点的位移**x**，是自变量为**x**的函数。

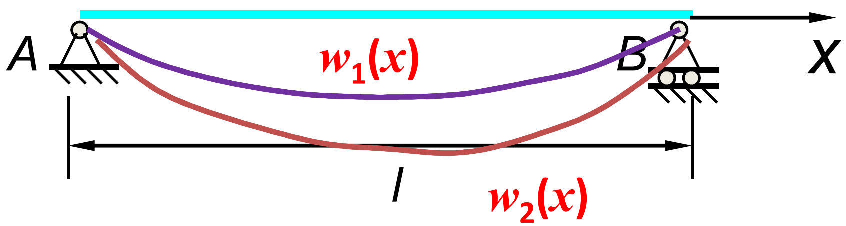
等截面Euler-Bernoulli梁的应变能

函数

数值

$$U\left[w(x)\right]=\frac{1}{2}\int_0^l EI\left(\frac{d^2w(x)}{dx^2}\right)^2 dx$$

对于连续的弹性体，应变能与所有点的位移有关，由于有无穷多个点，位移是一条曲线，必须用函数表示。应变能U的大小依赖于函数*w*(*x*)的形式，称为泛函(functional)。



泛函的最简单例子：f（1）。

函数的微分 Differential of a function

$$y = f(x)$$

当自变量 *x* 有一增量： $\Delta x = x_1 - x_0$

函数 *y* 也有一增量：

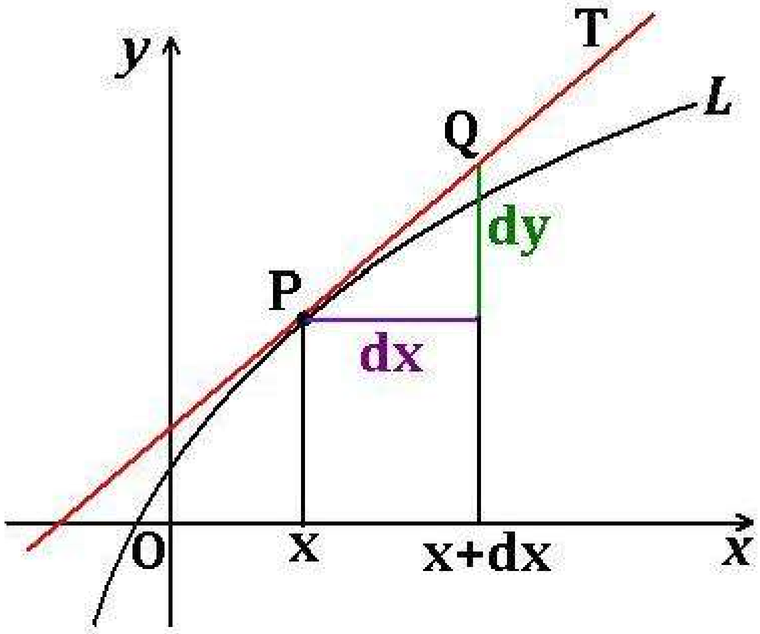
$$\Delta y = y_1 - y_0$$

$$= f(x_1) - f(x_0)$$

$$\Delta y = f'(x)\Delta x$$

$$dy = f'(x)dx$$

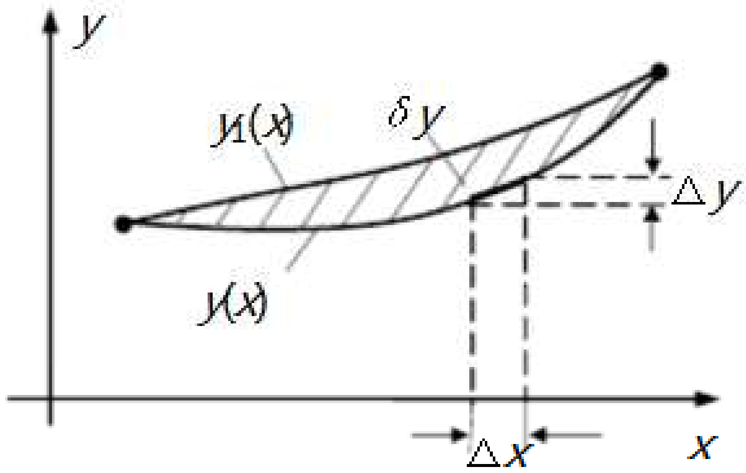
dy 与 *dx*，分别称为自变量 *x* 与函数 *y* 的 微分。



—— 微分问题

泛函的变分 variation of functional

$$U = U\left[y(x)\right]$$



函数 y 有一微小变化： $\Delta y = y_1 - y = \delta y$

泛函 U 也有一增量：

$$\Delta U = U\left[y(x_1)\right] - U\left[y(x)\right] = \delta U$$

函数的增量 δy 、泛函的增量 δU 等称为变分。

研究函数的变化与泛函的增量之间的关系称为变分问题。

变分问题例子：最速下降问题

质点受重力作用从A到B沿曲线路径自由下滑，不考虑摩擦力，求质点下降最快的路径。

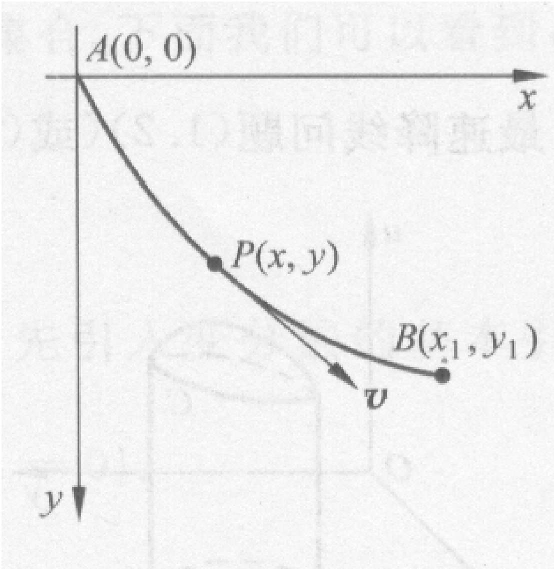


图 7.1

$$T(y)=\int_0^{x_1}\sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}}dx$$

函数的极值：

若 $y = f(x)$ 在 x_0 处有极值，

则有： $$f'(x)\Big|_{x_0} = 0$$

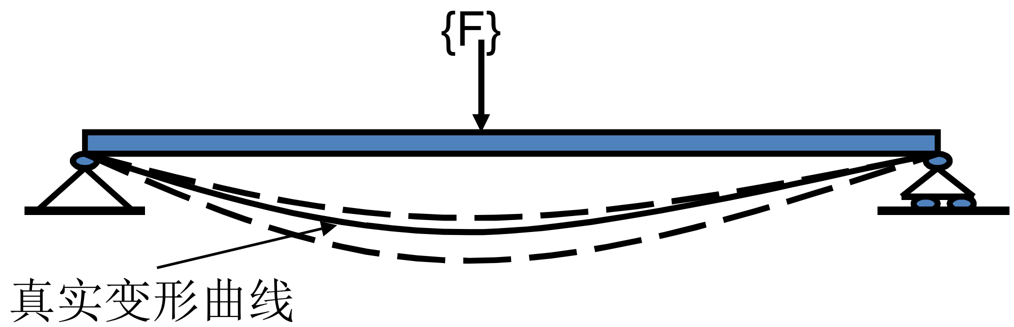
泛函的极值

若 $U[y(x)]$ 在 $y_0(x)$ 处有极值，

则有： $$\boxed{\delta U\left[y(x)\right] = 0}$$

用泛函的极值问题表示的原理称为变分原理。

普通的动力学原理直接研究真实的状态，然后得到状态所应满足的方程。而变分原理则不然，它不是专注于实际的状态，而是考察约束所容许的一切可能的状态，根据真实状态所满足的变分条件（如：真实位移使势能取极值，势能变分为零），进而得到真实状态所应满足的方程。



4.2 哈密顿原理：

a) 作用：提出了质点系的真实运动与在质点系真实运动邻近，且为约束所能允许的可能运动的区分准则。

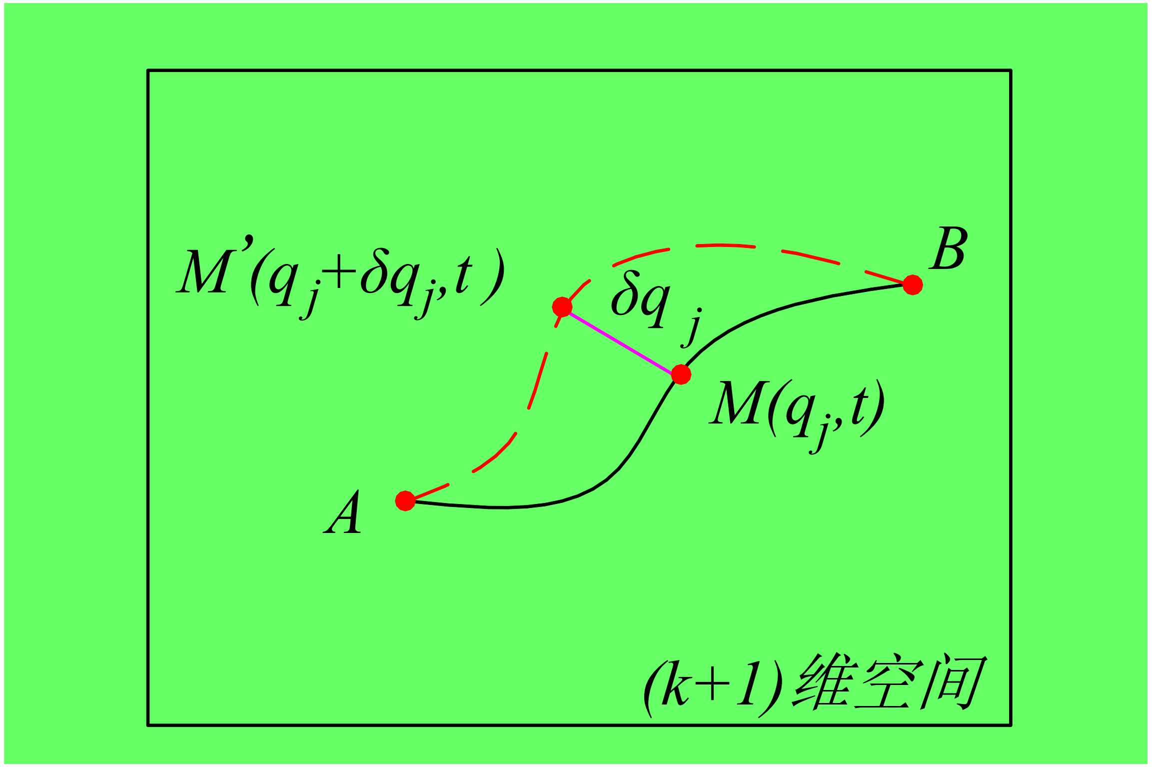
① 研究对象：具有k个自由度的理想、完整约束下的质点系的运动

② 广义坐标：q_1，q_2，……q_k

③ 质点系的位置：

1) 若在平面上运动的质点，其坐标可选x,y，若再考虑时间，则有3个坐标，

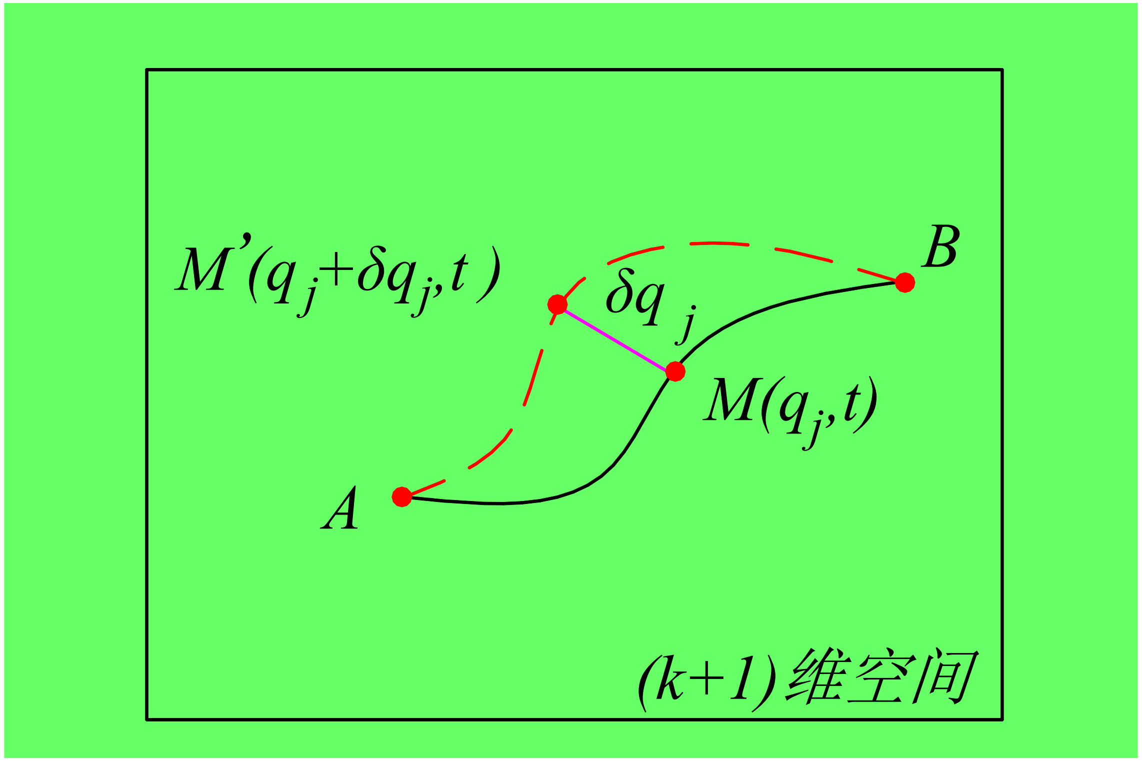
2）一般地，用由q和t组成的（$k+1$）维空间内的一点表示运动的状态，若在某一瞬时t，广义坐标q_1，q_2，…q_k均有确定的值，则可在（$k+1$）维空间中找到一个点，该点表示一质点在t时的位置



④ 质点系的真实运动：

如上图中 (k+1) 维空间中的实曲线 $\overset{\frown}{AMB}$ 表示；

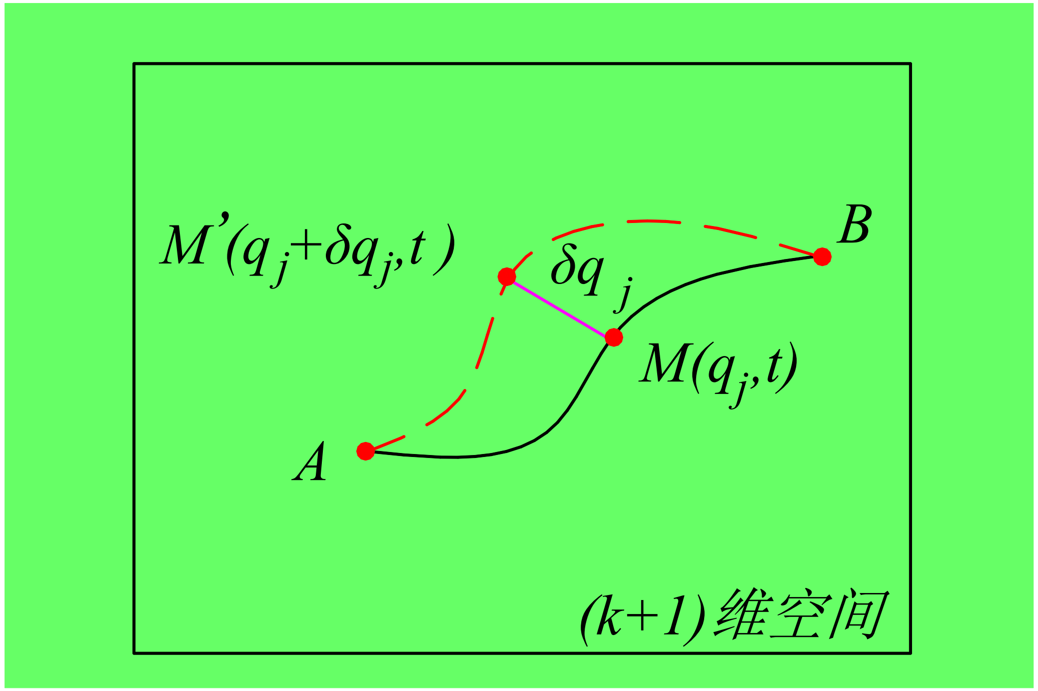
$\overset{\frown}{AMB}$ 称为质点系的真实路径，又叫正路。



⑤ 质点系的可能运动：

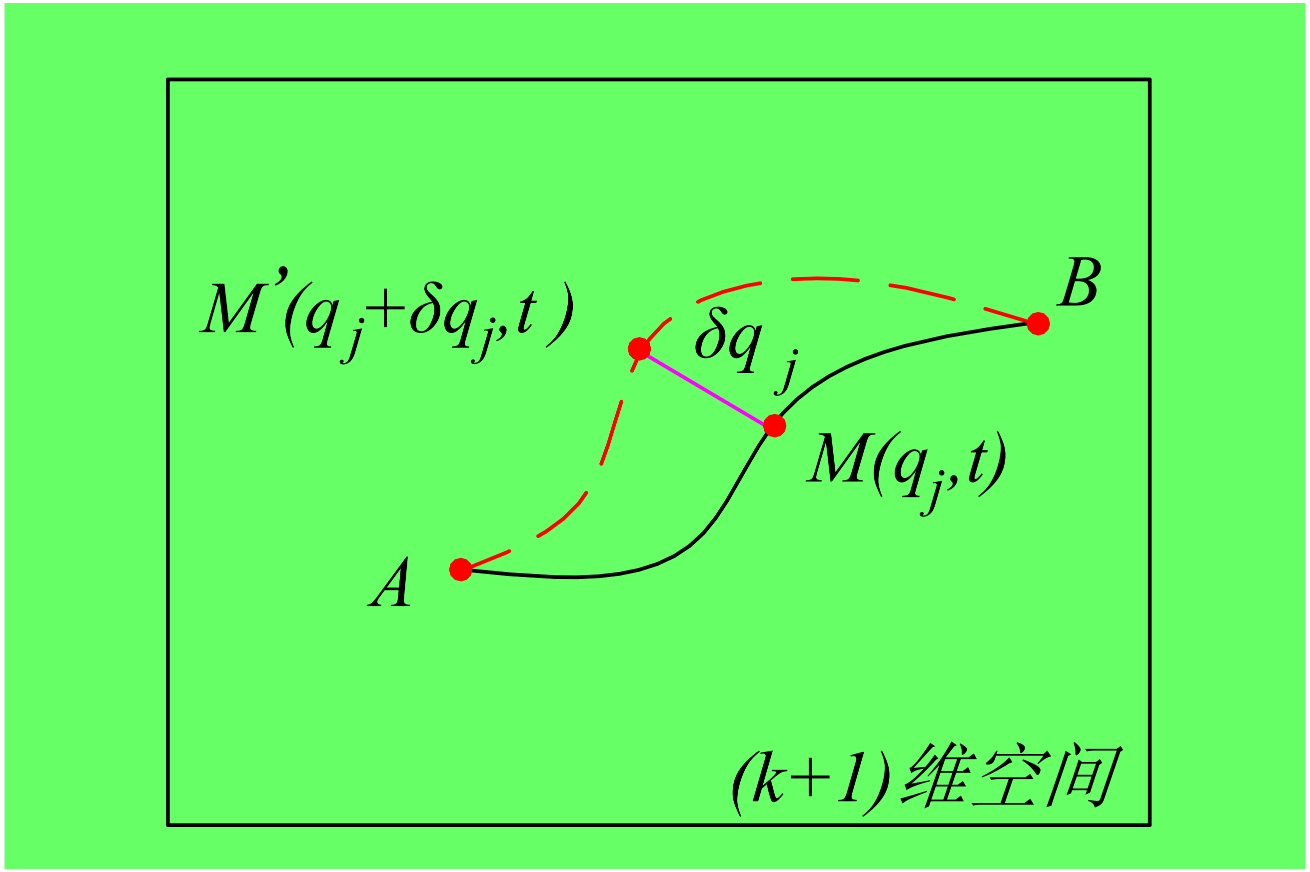
质点系在真实运动邻近为约束所允许的任意一个可能运动，用 $\overset{\frown}{AM'B}$ 表示。$\overset{\frown}{AM'B}$ 称为质点系的可能路径，或旁路。

运动始末位置上，正路和旁路的位置相同（显然，可能运动的曲线有无数条）。



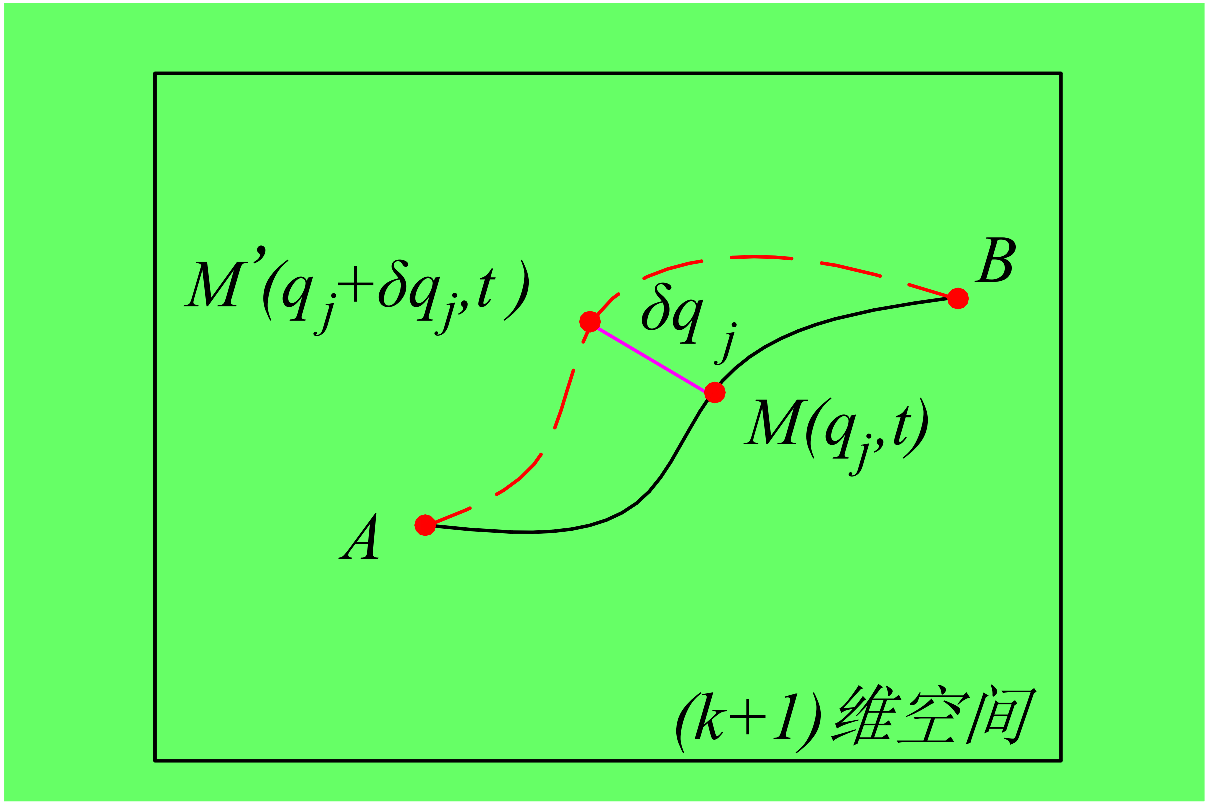
⑥ **虚位移（等时变分）：** δq_j

表示在同一瞬时，旁路对正路的偏离 $\overline{MM'}$。



正路与旁路的区别：

正路是真实路径，不但要满足约束、运动始末两点的位置，还要满足动力学方程。而旁路只需满足约束和运动始末两点的位置。（固定边界变分）



复习：设A、B为k个广义坐标、相应广义速度以及时间t的函数，则等时变分的运算性质：

（a） $\delta\left(A+B\right)=\delta A+\delta B$

（b） $\delta\left(AB\right)=B\delta A+A\delta B$

（c） $\delta A=\sum_{1}^{k}\left(\frac{\partial A}{\partial q_i}\delta q_i+\frac{\partial A}{\partial \dot{q}_i}\delta \dot{q}_i\right)$ 链式法则，但不考虑时间！（等时变分）

（d） **若q不但是时间的函数，还是空间的函数，有**

$$\delta(\frac{\partial q}{\partial x})=\frac{\partial}{\partial x}(\delta q)$$

（e） **对于完整系统，有：**

$$\delta(\frac{dq}{dt})=\frac{d}{dt}(\delta q) \qquad \delta\int_{t_1}^{t_2} q dt=\int_{t_1}^{t_2}\delta q dt$$

哈密顿原理的推导（本不需要证明）：

设只受完整约束的非自由质点系有n个质点，k个自由度。规定：在瞬时t_0，正路与旁路都通过A点，在瞬时t_1又都通过B点

$$\sum_{i=1}^{n}(\mathbf{F}_i - m_i\ddot{\mathbf{r}}_i)\delta\mathbf{r}_i = 0$$

沿着正路自t_0至t_1对时间t积分：

$$\int_{t_0}^{t_1}\sum_{i=1}^{n}(\mathbf{F}_i - m_i\ddot{\mathbf{r}}_i)\cdot\delta\mathbf{r}_i \mathrm{d}t = 0$$

对于完整系统：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta\mathbf{r}_i) = \delta\dot{\mathbf{r}}_i$$

$$\int_{t_0}^{t_1}\sum_{i=1}^{n}\left[\mathbf{F}_i\cdot\delta\mathbf{r}_i - m_i\ddot{\mathbf{r}}_i\cdot\delta\mathbf{r}_i\right]\mathrm{d}t = 0$$

$$\int_{t_0}^{t_1}\sum_{i=1}^{n} m_i\ddot{\mathbf{r}}_i\cdot\delta\mathbf{r}_i\mathrm{d}t=\int_{t_0}^{t_1}\sum_{i=1}^{n} m_i\delta\mathbf{r}_i\mathrm{d}\dot{\mathbf{r}}_i$$

$$\boxed{=\sum_{i=1}^{n} m_i\delta\mathbf{r}_i\dot{\mathbf{r}}_i\Big|_{t_0}^{t_1}-\int_{t_0}^{t_1}\sum_{i=1}^{n} m_i\dot{\mathbf{r}}_i\frac{d}{dt}(\delta\mathbf{r}_i)\,dt}$$

$$=-\int_{t_0}^{t_1}\sum_{i=1}^{n} m_i\dot{\mathbf{r}}_i\delta\dot{\mathbf{r}}_i dt$$

分步积分

$$\delta\mathbf{r}_i\,|_{t_0}=\delta\mathbf{r}_i\,|_{t_1}=0$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\dot{\mathbf{r}}_i\cdot\delta\dot{\mathbf{r}}_i=\sum_{i=1}^{n}\delta\left(\frac{1}{2}m_i\dot{\mathbf{r}}_i^2\right)=\delta\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}m_i\dot{\mathbf{r}}_i^2=\delta T$$

虚功δW一般并不是功W的变分

$$\int_{t_0}^{t_1}\sum_{i=1}^{n}\left[\mathbf{F}_i\cdot\delta\mathbf{r}_i-m_i\ddot{\mathbf{r}}_i\cdot\delta\mathbf{r}_i\right]\mathrm{d}t=0$$

对于完整系统：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta\mathbf{r}_i)=\delta\dot{\mathbf{r}}_i$$

$$\int_{t_0}^{t_1}\left[\delta T+\sum_{i=1}^{n}\mathbf{F}_i\cdot\delta\mathbf{r}_i\right]\mathrm{d}t=0$$

$$\int_{t_0}^{t_1}\left[\delta T+\delta W\right]\mathrm{d}t=0$$

$$\int_{t_0}^{t_1}\left[\delta L+\delta W_{nc}\right]\mathrm{d}t=0$$

哈密顿原理（但不是变分原理）：适用完整系统。

$$\int_{t_0}^{t_1}\left[\delta T+\delta W\right]\mathrm{d}t=0$$

若主动力均为保守力，势能函数为V

注意：做功时大小和方向均不变的外力也是保守力

虚功δV是势能V的变分

$$\int_{t_0}^{t_1}\left[\delta T-\delta V\right]\mathrm{d}t=0$$

$$\int_{t_0}^{t_1}\delta L\mathrm{d}t=0$$

对于完整系统,变分和积分可互换

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}L(q_1,q_2,\cdots,q_n;\ \dot{q}_1,\dot{q}_2,\cdots,\dot{q}_n,t)\mathrm{d}t=0$$

哈密顿原理（变分原理形式的）。

适用范围：完整系统、主动力有势

$$S=\int_{t_0}^{t_1} L\mathrm{d}t$$

称为哈密顿作用量(action)，它是依赖于可能运动**q**(t)的泛函，即

$$S=\int_{t_0}^{t_1} L(q_1,q_2,\cdots,q_n;\ \dot{q}_1,\dot{q}_2,\cdots,\dot{q}_n,t)\mathrm{d}t$$

哈密顿原理: $\delta S=0$

哈密顿变分原理：对于完整系统，若主动力有势，在相同的时间、相同的起迄位置的条件下，在所有为约束允许的可能运动中，真实运动使哈密顿作用量具有极值，或者说，正路与旁路相比，沿正路的哈密顿作用量的变分为零。

哈密顿原理具有高度的简洁性和概括性，但对于简单问题，使用哈密顿原理反而比较复杂。一般需要使用分部积分，将广义速度的变分化为对广义坐标的变分。

若系统有非保守外力，可以使用非变分原理的哈密顿原理。

例1 使用哈密顿原理推导第二类拉格朗日方程。

$$\delta S=\delta\int_{t_0}^{t_1}L\mathrm{d}t=0$$

$$\delta S=\int_{t_0}^{t_1}\delta L\mathrm{d}t=\int_{t_0}^{t_1}\sum_{j=1}^{k}\left(\frac{\partial L}{\partial q_j}\delta q_j+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\delta\dot{q}_j\right)\mathrm{d}t$$

$$=\int_{t_0}^{t_1}\sum_{j=1}^{k}\left[\frac{\partial L}{\partial q_j}\delta q_j\mathrm{d}t-\delta q_j\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)dt\right]+\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\delta q_j\bigg|_{t_0}^{t_1}$$

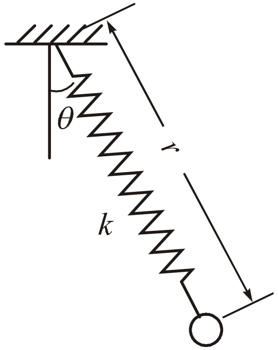
$$\delta q_j\mid_{t_0}=\delta q_j\mid_{t_1}=0$$

$$=\int_{t_0}^{t_1}\sum_{j=1}^{k}\left[\frac{\partial L}{\partial q_j}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)\right]\delta q_j\mathrm{d}t$$

各广义坐标的变分独立、任意

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_j}=0\qquad(j=1,2,\cdots,k)$$

例2　使用哈密顿原理推导弹簧摆的动力学方程。



$$S=\int_{t_0}^{t_1}L\mathrm{d}t=\int_{t_0}^{t_1}\left[\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2)+mgr\cos\theta-\frac{1}{2}k(r-r_0)^2\right]\mathrm{d}t$$

$$\delta S=0$$

$$\int_{t_0}^{t_1}[m(\dot{r}\delta\dot{r}+r\delta r\dot{\theta}^2+r^2\dot{\theta}\delta\dot{\theta})+mg\delta r\cos\theta-mgr\sin\theta\delta\theta-k(r-r_0)\delta r]\mathrm{d}t=0$$

分部积分

$$\int_{t_0}^{t_1}\dot{r}\delta\dot{r}dt=\dot{r}\delta r\Big|_{t_0}^{t_1}-\int_{t_0}^{t_1}\ddot{r}\delta rdt=-\int_{t_0}^{t_1}\ddot{r}\delta rdt$$

$$\int_{t_0}^{t_1}r^2\dot{\theta}\delta\dot{\theta}dt=r^2\dot{\theta}\delta\theta\Big|_{t_0}^{t_1}-\int_{t_0}^{t_1}\delta\theta\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\theta}\right)dt=-\int_{t_0}^{t_1}\left(2r\dot{r}\dot{\theta}-r^2\ddot{\theta}\right)\delta\theta dt$$

$$\delta r\,|_{t_0}=\delta r\,|_{t_1}=\delta\theta\,|_{t_0}=\delta\theta\,|_{t_1}=0$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \{[m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 - mg\cos\theta + k(r - r_0)]\delta r + [mr^2\ddot{\theta} + 2mr\dot{r}\dot{\theta} + mgr\sin\theta]\delta\theta\}\mathrm{d}t = 0$$

$$\Downarrow$$

$$m\ddot{r} - mr\dot{\theta} - mg\cos\theta + k(r - r_0) = 0$$

$$mr^2\ddot{\theta} + 2mr\dot{r}\dot{\theta} + mgr\sin\theta = 0$$

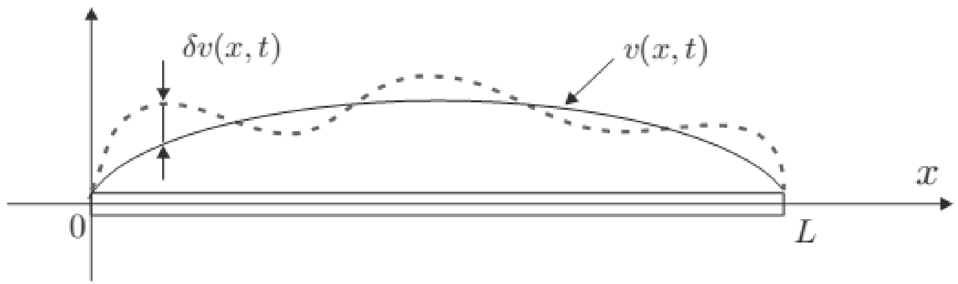
4.3 连续系统的微振动

哈密顿原理只涉及到系统的动能和势能。对于这两个表达系统状态的整体性函数，没有规定必须用多少坐标来表达。

因此，哈密顿原理不但适用于有限多自由度系统，也适用于连续系统。哈密顿原理比拉格朗日方程更有普遍意义的原因就在于此。将哈密顿原理应用到连续体时，只要写出连续体的动能和势能就可以求解。

在Goldstein 的《Classical Mechanics》中推导了一类连续系统的拉格朗日方程。

例1 细长简支梁，ρ、A、L、EI。使用哈密顿原理推导梁的受迫振动方程。横向外力为p(x,t) 这里的x只相当于离散系统的下标，广义坐标是v（x，t），有无限多个



简支边界条件：支座处梁的挠度为0，不受力偶作用。

$$v|_{x=0} = v|_{x=0} = 0$$

$$EIv''|_{x=0} = EIv''|_{x=L} = 0$$

由于有非保守力，采用非变分原理的哈密顿原理

$$\int_{t_0}^{t_1} \left[\delta L + \delta W_{nc}\right] \mathrm{d}t = 0$$

$$T = \frac{1}{2}\int_0^L \rho A \dot{\upsilon}^2 dx \qquad V = \frac{1}{2}\int_0^L EI\left(\upsilon''\right)^2 dx$$

$$\delta W_{nc} = \int_0^L p\delta\upsilon dx$$

$$\int_{t_0}^{t_1}\left[\delta T-\delta V+\delta W_{nc}\right]\mathrm{d}t=0$$

$$\int_{t_0}^{t_1}\delta T\mathrm{d}t=\int_{t_0}^{t_1}\delta\left(\frac{1}{2}\int_0^L\rho A\dot{\upsilon}^2dx\right)\mathrm{d}t=\int_{t_0}^{t_1}\int_0^L\rho A\dot{\upsilon}\delta\dot{\upsilon}dx\mathrm{d}t$$

$$=\rho A\int_0^L\left(\int_{t_0}^{t_1}\dot{\upsilon}\delta\dot{\upsilon}dt\right)dx=-\rho A\int_0^L\int_{t_0}^{t_1}\ddot{\upsilon}\delta\upsilon dtdx$$

分步积分，时间端点变分为零

$$\delta V = \int_0^L \mathrm{EI}\upsilon''\delta\upsilon''\mathrm{d}x$$

$$= \cancel{\left[EI\upsilon''\delta\upsilon''\right]_0^L} - \int_0^L \mathrm{EI}\upsilon'''\delta\upsilon'\mathrm{d}x$$

$$\upsilon\,|_{x=0} = \upsilon\,|_{x=0} = 0$$

$$EI\upsilon''\,|_{x=0} = EI\upsilon''\,|_{x=L} = 0$$

$$= -\int_0^L \mathrm{EI}\upsilon'''\delta\upsilon'\mathrm{d}x$$

$$= -\cancel{\left[EI\upsilon'''\delta\upsilon\right]_0^L} + \int_0^L \mathrm{EI}\upsilon''''\delta\upsilon\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^L \mathrm{EI}\upsilon''''\delta\upsilon\mathrm{d}x$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta V\mathrm{d}t = EI\int_0^L \int_{t_0}^{t_1} \upsilon''''\delta\upsilon dtdx$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta T \mathrm{d}t = -\rho A \int_0^L \int_{t_0}^{t_1} \ddot{\upsilon} \delta \upsilon dt dx$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta V \mathrm{d}t = EI \int_0^L \int_{t_0}^{t_1} \upsilon'''' \delta \upsilon dt dx$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta W_{nc} dt = \int_0^L \int_{t_0}^{t_1} p \delta \upsilon dt dx$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \left[\delta L + \delta W_{nc}\right] \mathrm{d}t = 0$$

$$\int_0^L \int_{t_0}^{t_1} \left(\rho A \ddot{\upsilon} + EI \upsilon'''' - p\right) \delta \upsilon dt dx = 0$$

$$\rho A \ddot{\upsilon} + EI \upsilon'''' = p\left(x, t\right)$$

事实上,使用变分原理中的欧拉方程,可直接从哈密顿原理得到拉格朗日方程.

对于无限自由度系统,使用变分原理中多元函数泛函的 Остроградский(奥斯特罗格拉茨基)方程也可直接得到动力学方程.

4.4 欧拉方程

若$y(x_0)$和$y(x_1)$均给定，使泛函

$$U\left[y(x)\right]=\int_{x_0}^{x_1}F\left(x,y,y'\right)dx$$

取极值的方程应满足必要条件：

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)-\frac{\partial F}{\partial y}=0}$$

欧拉方程

对于依赖于多个一元函数的泛函，若每个函数在边界上的值均给定，使泛函

$$U\left[y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)\right] = \int_{x_0}^{x_1} F\left(x, y_1, y_2, \cdots y_n, y_1', y_2', \cdots y_n'\right) dx$$

取极值的方程应满足必要条件：

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial y_i'}\right) - \frac{\partial F}{\partial y_i} = 0 \qquad i = 1, 2, \cdots n}$$

欧拉方程组

例1 使用哈密顿原理推导第二类拉格朗日方程。

$$\delta S=\delta\int_{t_0}^{t_1} L\left(t, y_1, y_2, \dots y_k, \dot{y}_1, \dot{y}_2, \dots \dot{y}_k\right)\mathrm{d}t=0$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_j}=0 \qquad (j=1, 2, \cdots, k)$$