Lecture 8 多天线分集复用折中

2021-5-4

由之前章节可知在 N_t 发 N_r 收的多天线信道中，最大自由度为 $N_{\min}=\min(N_t, N_r)$，最大分集度为 N_tN_r。收发端结构设计可以以分集增益为目标提高可靠性，也可以以复用增益为目标提高速率，还可以用来同时提供分集和复用增益。这就涉及分集-复用增益折中（DMT）的问题，即如何获得最佳的 DMT。

假定复用增益为 r，即传输速率 R 满足

$$R = r\log SNR \tag{1}$$

如果该收发机的中断概率可以表达为

$$\lim_{SNR\to\infty}\frac{\log P_{out}\left(r\log SNR\right)}{\log SNR} = -d^*\left(r\right) \tag{2}$$

或近似为

$$P_{out}\left(R\right)\approx SNR^{-d^*(r)} \tag{3}$$

则称该结构可达 DMT 为$\left(r, d^*\left(r\right)\right)$。

Remark 1: 上述 DMT 的定义基于慢衰落信道的中断概率，该定义可以推广到任意的空时编码结构（一般假设为快衰落信道如 VBLAST 或块衰落信道如 OSTBC），此时用错误概率代替中断概率。

1、SISO 瑞利衰落信道

首先考虑 M-PAM 调制的 SISO 瑞利信道

$$y = hx + w \tag{4}$$

其中 $h, w \sim \mathcal{CN}\left(0,1\right)$。假设 PAM 星座相邻点之间的最小距离为 $D_{\min}$，则有

$$SNR = E_s = \frac{\left(M^2-1\right)D_{\min}^2}{12} \tag{5}$$

注意到 $M = 2^R$，根据上式有

$$D_{\min}^2 = \frac{12SNR}{2^{2R}-1}\propto\frac{SNR}{2^{2R}} \tag{6}$$

此外，根据联合界技术，*M*-PAM 的符号错误概率的一个近似上界为

$$\begin{aligned}
P_e &= \frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M} P\left(e \middle| A_m\right) \le \frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}\sum_{m'\neq m} P\left(A_m \to A_{m'}\right) \\
&\approx \frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M} 2P\left(A_m \to A_{m'} \middle\| A_m - A_{m'}\right| = D_{\min}\right) \\
&\approx 2P\left(x = -\frac{D_{\min}}{2} \to x' = \frac{D_{\min}}{2}\right) \\
&= 2P_e\left(BPSK \middle| SNR = \frac{D_{\min}^2}{4}\right) \\
&= 1 - \sqrt{\frac{D_{\min}^2/4}{1+D_{\min}^2/4}} \propto \frac{1}{D_{\min}^2} \propto \frac{2^{2R}}{SNR} = \frac{1}{SNR^{1-2r}}
\end{aligned} \tag{7}$$

根据 DMT 定义，采用 PAM 调制的可达 DMT 为$\left(r, d\left(r\right) = 1-2r\right), 0 \le r \le 1/2$。

同样的，可分析采用 QAM 时的可达 DMT。注意到在 QAM 中，

$$D_{\min}^2 = \propto \frac{SNR}{2^R} \tag{8}$$

因此根据（7）的推导有$d\left(r\right) = 1-r, 0 \le r \le 1$。

SISO 瑞利衰落信道的最佳 DMT 可根据定义推导

$$\begin{aligned}
P_{out}\left(R\right) &= \Pr\left(\log\left(1+\left|h\right|^2 SNR\right) < r\log SNR\right) \\
&= \Pr\left(\left|h\right|^2 < \frac{SNR^r - 1}{SNR}\right) \approx SNR^{-(1-r)}
\end{aligned} \tag{9}$$

因此最佳 DMT 为$d^*\left(r\right) = 1-r,\ 0 \le r \le 1$。根据 PAM 和 QAM 分析结果，QAM 是最佳 DMT 可达的。直观的看，PAM 由于只利用了一个实数维度传输信息，显然不是最佳的。

2、并行瑞利衰落信道

并行 SISO 瑞利信道

$$y_l = h_l x_l + w_l,\ l = 1, \ldots, L \tag{10}$$

的中断概率为

$$P_{out}\left(R\right) = \Pr\left(\sum_{l=1}^{L}\log\left(1+\left|h_l\right|^2 SNR\right) < Lr\log SNR\right) \tag{11}$$

在 i.i.d.信道假设下，中断主要发生在当每个子信道均不能支撑速率 *R* 时，即

$$\begin{aligned}P_{out}(R) &\approx \left(\Pr\left(\log\left(1+|h_l|^2 SNR\right) < r\log SNR\right)\right)^L \\ &\approx SNR^{-L(1-r)}\end{aligned} \tag{12}$$

即 $d^*(r) = L(1-r),\ 0 \le r \le 1$。

如果在并行信道上采用重复编码 $x_l = x,\ l = 1,\ldots,L$，则有

$$\begin{aligned}P_{out}(R) &= \Pr\left(\log\left(1+\|\mathbf{h}\|^2 SNR\right) < Lr\log SNR\right) \\ &= \Pr\left(\|\mathbf{h}\|^2 < \frac{SNR^{Lr}-1}{SNR}\right) \approx \left(\frac{SNR^{Lr}-1}{SNR}\right)^L \\ &\approx SNR^{-L(1-Lr)}\end{aligned} \tag{13}$$

即 $d^*(r) = L(1-Lr),\ 0 \le r \le 1/L$。显然，重复编码不是最佳 DMT 可达结构。

3、MISO 瑞利衰落信道

考虑具有 N_t 根发送天线的 MISO 信道

$$y = \mathbf{h}^T\mathbf{x} + w \tag{14}$$

其中断概率为

$$\begin{aligned}P_{out}(R) &= \Pr\left(\log\left(1+\|\mathbf{h}\|^2 \frac{SNR}{N_t}\right) < r\log SNR\right) \\ &= \Pr\left(\|\mathbf{h}\|^2 < \frac{SNR^r-1}{SNR}\times N_t\right) \approx \left(\frac{SNR^r-1}{SNR}\times N_t\right)^{N_t} \\ &\approx SNR^{-N_t(1-r)}\end{aligned} \tag{15}$$

即 $d^*(r) = N_t(1-r),\ 0 \le r \le 1$。

作业 1：证明 Alamouti 结构+QAM 在 2 发 1 收 MISO 信道上是最佳 DMT 可达结构。

4、MIMO 信道（N_t=N_r=2）

在两发两收 MIMO 信道中，首先考虑重复编码结构。其两时隙接收信号为

$$\mathbf{y} = \mathbf{h}^T x + \mathbf{w},\ \mathbf{h} \in \mathbb{C}^4 \tag{16}$$

中断概率为

$$\begin{aligned}P_{out}(R) &= \Pr\left(\log\left(1+\|\mathbf{h}\|^2 SNR\right) < 2r\log SNR\right) \\ &= \Pr\left(\|\mathbf{h}\|^2 < \frac{SNR^{2r}-1}{SNR}\right) \approx SNR^{-4(1-2r)}\end{aligned} \tag{17}$$

即 $d(r)=4(1-2r)$，$0\le r\le 1/2$。

其次考虑 Alamouti 结构，其等效信道为

$$y_a=\left(\sum_{i=0}^{1}\sum_{j=0}^{1}\left|h_{i,j}\right|^2\right)^{1/2}x_a+w_a=\|\mathbf{h}\|x_a+w_a,\ a=1,2 \tag{18}$$

中断概率为

$$P_{out}(R)=\Pr\left(\log\left(1+\|\mathbf{h}\|^2 SNR\right)<r\log SNR\right)\approx SNR^{-4(1-r)} \tag{19}$$

即 $d(r)=4(1-r)$，$0\le r\le 1$。

最后考虑 VBLAST 结构，当采用迫零检测（线性解相关）时，等效信道为

$$y_a=h_a x_a+w_a,\ \left|h_a\right|^2\sim\chi^2(2),\ a=1,2 \tag{20}$$

因此有

$$P_{out}(R)=\Pr\left(\log\left(1+\left|h_a\right|^2 SNR\right)<\frac{r\log SNR}{2}\right)\approx SNR^{-(1-2r)} \tag{21}$$

即 $d(r)=1-r/2,\ 0\le r\le 2$。

当采用最佳的 ML 检测时，有

$$P_e(R)\propto\max\frac{16}{SNR^2\left\|\mathbf{x}_a-\mathbf{x}_b\right\|^4} \tag{22}$$

定义 $D_{\min}=\min\limits_{a\neq b}\left\|\mathbf{x}_a-\mathbf{x}_b\right\|$ 即不同码字之间的最小距离平方。当采用 M-QAM 调制时，有

$$M=2^{R/2} \tag{23}$$

此外 $D_{\min}$ 对应 $\mathbf{x}_a$ 和 $\mathbf{x}_b$ 中仅一个 QAM 符号不同的情况，并且该 QAM 符号仅实部或虚部不同（将 QAM 看作两个 PAM 符号的笛卡尔积，则仅一个 PAM 符号不同），因此有

$$D_{\min}\propto\frac{1}{M^{1/2}}=\frac{1}{2^{R/4}} \tag{24}$$

将（24）代入（22）式，有

$$P_e(R)\propto\frac{16}{SNR^2 2^R}\propto SNR^{-(2-r)} \tag{25}$$

即 $d(r)=2-r,\ 0\le r\le 2$。

5、MIMO 信道最佳 DMT 的一般表达式

MIMO 信道最佳 DMT 的一般表达式为

$$d^*(r)=(N_t-r)(N_r-r),\ r=0,\dots,N_{\min} \tag{26}$$

考虑 2 发 2 收的特殊情况，其最佳 DMT 为

$$d^*(r)=\begin{cases}4-3r, & 0\le r<1\\ 2-r, & 1\le r\le 2\end{cases} \tag{27}$$

显然第 4 节中给出的几种结构均不是 DMT 最佳的。

上式一般表达式的一个解释。根据 MIMO 信道容量，中断概率可以表示为

$$\begin{aligned}P_{out}(R)&=\Pr\left(\sum_{i=1}^{N_{\min}}\log\left(1+\frac{\lambda_i^2 SNR}{N_t}\right)<r\log SNR\right)\\ &\approx \Pr(\mathbf{H}\text{ is closed to a rank-}r\text{ matrix})\\ &=\Pr(\mathbf{H}\in\mathcal{V}_r)\end{aligned} \tag{28}$$

为了保证服用增益为 r，要求矩阵 **H** 考虑秩为。假设其前 r 行相互独立，则前 r 行共有 rN_t 个自由变量，后 N_r-r 行中每一行均是由前 r 行线性组合而成哟，共有$(N_r-r)r$ 个自由变量。因此，为了确保矩阵 **H** 的秩为 r，需要用掉 $rN_t+(N_r-r)r$ 个自由变量。**H** 矩阵的最大自由变量个数为 N_tN_r。因此，可用来提供分集增益的最大自由变量个数为

$$d(r)=N_tN_r-rN_t-r(N_r-r)=(N_t-r)(N_r-r) \tag{29}$$

Remark 2：如果一个该空时码结构仅在信道本身发生中断时发送中断，则将该结构称为渐近通用的。因此，通用码是 DMT 最佳的结构。比如前文介绍的 QAM 就是 SISO 瑞利衰落信道上的一个通用码，Alamouti+QAM 是 2 发 1 收 MISO 信道上的一个通用码。