

Lecture 7 MIMO 容量与多天线复用技术

2021-4-24

1、快衰落信道

考虑快衰落 MIMO 输入输出信号模型

$$\mathbf{y}_m = \mathbf{H}_m \mathbf{x}_m + \mathbf{w}_m, \quad m = 1, 2, \dots \quad (1)$$

其中 $\mathbf{x}_m = [x_{m,1}, \dots, x_{m,N}]^T \in \mathcal{X}^{N_t}$ 、 $\mathbf{w}_m \sim \mathcal{CN}(0, N_0 \mathbf{I})$ 、 $\mathbf{y}_m = [y_{m,1}, \dots, y_{m,N_r}]^T \in \mathbb{C}^{N_r}$ 和 $\mathbf{H}_m = \{h_{m,i,j}\}_{i=1, \dots, N_r, j=1, \dots, N_t} \in \mathbb{C}^{N_r \times N_t}$ 分别表示发送、噪声、接收信号和信道矩阵。进一步假定 $h_{m,i,j} \sim \mathcal{CN}(0, 1)$ ， $E[\|\mathbf{x}_m\|^2] \leq P$ 。后续部分忽略时间下标 m 。

上式对应的输入输出互信息表示为

$$\begin{aligned} I(\mathbf{x}; \mathbf{y}) &= H(\mathbf{y}) - H(\mathbf{y}|\mathbf{x}) = H(\mathbf{y}) - H(\mathbf{w}) \\ &= \log((\pi e)^{N_r} |\mathbf{K}_y|) - \log((\pi e)^{N_r} |\mathbf{K}_w|) \\ &= \log |\mathbf{K}_y| - \log |\mathbf{K}_w| \\ &= \log |\mathbf{H} \mathbf{K}_x \mathbf{H}^H + N_0 \mathbf{I}| - \log |N_0 \mathbf{I}| \\ &= \log \left| \mathbf{I} + \frac{1}{N_0} \mathbf{H} \mathbf{K}_x \mathbf{H}^H \right| \end{aligned} \quad (2)$$

其中 $\mathbf{K}_a, a = y, x, w$ 表示协方差矩阵。因此 MIMO 信道最大可达信息速率即容量为

$$C = \max_{\text{tr}(\mathbf{K}_x) \leq P} E \left[\log \left| \mathbf{I} + \frac{1}{N_0} \mathbf{H} \mathbf{K}_x \mathbf{H}^H \right| \right] \quad (3)$$

1.1、CSIR 情况

假设仅接收端已知 CSI，当信道矩阵 \mathbf{H} 具有独立同分布元素 $\sim \mathcal{CN}(0, 1)$ 时，易证当

$\mathbf{K}_x = P/N_t \mathbf{I}$ 时，互信息达到最大值，即

$$C = E \left[\log \left| \mathbf{I} + \frac{SNR}{N_t} \mathbf{H} \mathbf{H}^H \right| \right] \quad (4)$$

其中 $SNR = P/N_0$ 。

进一步假定 \mathbf{H} 的奇异值分解为 $\mathbf{H} = \mathbf{U} \mathbf{\Lambda} \mathbf{V}^H$ ，其中 $\mathbf{U} \in \mathbb{C}^{N_r \times N_r}$ ， $\mathbf{V} \in \mathbb{C}^{N_t \times N_t}$ 为酉矩阵，

$\mathbf{\Lambda} = \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_r, 0, \dots, 0\} \in \mathbb{C}^{N_t \times N_t}$ 为对角矩阵并且其 $r = \text{rank}(\mathbf{H})$ 个奇异值满足 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_r > 0$ 。当 \mathbf{H} 具有独立同分布元素 $\sim \mathcal{CN}(0,1)$ 时，一般有 $r = N_{\min} = \min\{N_t, N_r\}$ 。此时，信道容量可进一步表示为

$$\begin{aligned}
 C &= E \left[\log \left| \mathbf{I} + \frac{SNR}{N_t} \mathbf{H} \mathbf{H}^H \right| \right] \\
 &= E \left[\log \left| \mathbf{I} + \frac{SNR}{N_t} \mathbf{U} \mathbf{\Lambda} \mathbf{V}^H \mathbf{V} \mathbf{\Lambda} \mathbf{U}^H \right| \right] = E \left[\log \left| \mathbf{I} + \frac{SNR}{N_t} \mathbf{U} \mathbf{\Lambda}^2 \mathbf{U}^H \right| \right] \\
 &= E \left[\log \left| \mathbf{I} + \frac{SNR}{N_t} \mathbf{\Lambda}^2 \right| \right] = \sum_{i=1}^{N_{\min}} E \left[\log \left(1 + \frac{SNR}{N_t} \lambda_i^2 \right) \right]
 \end{aligned} \tag{5}$$

接下来，基于 (5) 分析 CSIR 时信道容量特性。首先，应用 Jense 不等式，有

$$\begin{aligned}
 C &= \sum_{i=1}^{N_{\min}} E \left[\log \left(1 + \frac{SNR}{N_t} \lambda_i^2 \right) \right] \\
 &\leq N_{\min} \log \left(1 + \frac{SNR}{N_t} \frac{1}{N_{\min}} \sum_{i=1}^{N_{\min}} \lambda_i^2 \right)
 \end{aligned} \tag{6}$$

当 $\lambda_i^2 = \lambda_1^2, i = 2, \dots, N_{\min}$ 即所有奇异值均相等 (\mathbf{H} 的条件数为 1) 时，上式取到等号即容量达到最大值。一般的，在秩相同的条件下，信道 \mathbf{H} 的条件数越好 (越小)，信道容量越大。

其次，考虑高 SNR 情况。在高 SNR 条件下公式 (5) 可近似为

$$\begin{aligned}
 C &\approx N_{\min} \log \frac{SNR}{N_t} + \sum_{i=1}^{N_{\min}} E \left[\log \lambda_i^2 \right] \\
 &= N_{\min} \log \frac{SNR}{N_t} + \sum_{i=|N_t - N_r| + 1}^{\max\{N_t, N_r\}} E \left[\log \chi_{2i}^2 \right]
 \end{aligned} \tag{7}$$

上式中 χ_{2i}^2 表示自由度为 $2i$ 的中心卡方分布。

作业 1: 证明式 (7)。

接下来，考虑低 SNR 情况。此时公式 (5) 可近似为

$$\begin{aligned}
 C &\approx \frac{SNR}{N_t} \log_2 e \times \sum_{i=1}^{N_{\min}} E \left[\lambda_i^2 \right] = \frac{SNR}{N_t} \log_2 e \times E \left[\text{tr}(\mathbf{H} \mathbf{H}^H) \right] \\
 &= \frac{SNR}{N_t} \log_2 e \times E \left[\sum_i \sum_j |h_{i,j}|^2 \right] = N_r SNR \log_2 e
 \end{aligned} \tag{8}$$

从上式可以看出，此时容量与发送天线数无关。因此在低 SNR 时，天线应该更多配置在接收端以获得功率增益 (如 CDMA 系统)。

最后分别考虑 $N_t = 1$ 、 $N_r = 1$ 和 $N_r = N_t = N \rightarrow \infty$ 的情况。在 $N_t = 1$ 的 SIMO 场景下，公式 (5) 可重写为

$$C = E \left[\log \left| 1 + SNR \sum_{i=1}^{N_r} |h_i|^2 \right| \right] \quad (9)$$

显然，相比 SISO 情况，接收端配置多根天线能获得功率增益。

在 $N_r = 1$ 的 MISO 场景下，公式 (5) 可重写为

$$\begin{aligned} C &= E \left[\log \left(1 + \frac{SNR}{N_t} \sum_{i=1}^{N_t} |h_i|^2 \right) \right] \leq \log \left(1 + \frac{SNR}{N_t} \sum_{i=1}^{N_t} E[|h_i|^2] \right) \\ &= \log(1 + SNR) = C_{SISO} \end{aligned} \quad (10)$$

显然，仅发送端配置多根天线并不合适。

在 $N_r = N_t = N \rightarrow \infty$ 的场景下，根据矩阵理论， $u = \lambda_i^2/N$ 服从分布

$$f(u) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{1}{u} - \frac{1}{4}}, & 0 \leq u \leq 4 \\ 0, & \text{else} \end{cases} \quad (11)$$

因此，信道容量为

$$\begin{aligned} C &= \sum_{i=1}^N E \left[\log \left(1 + \frac{SNR}{N} \lambda_i^2 \right) \right] \\ &= N \int_0^4 \log(SNR \times u) f(u) du \\ &= 2N \log \left(1 + SNR - \frac{1}{4} F(SNR) \right) - \frac{N \log e}{4SNR} F(SNR) \end{aligned} \quad (12)$$

其中 $F(SNR) = (\sqrt{4SNR+1}-1)^2$ 。显然，MIMO 信道容量随 N 线性增长。虽然该结论是 $N \rightarrow \infty$ 时的渐近分析结果，当 N 较小时公式 (12) 仍然是一个很好的近似。

1.2、CSIT&CSIR 情况

在收发端均已知 CSI 的情况，发送端可采用预编码矩阵 \mathbf{V} 对发送信号 \mathbf{x} 进行预处理，接收端可采用矩阵 \mathbf{U}^H 对接收信号进行后处理，此时有

$$\begin{aligned} \mathbf{z} &= \mathbf{U}^H \mathbf{y} = \mathbf{U}^H \mathbf{H} \mathbf{V} \mathbf{x} + \mathbf{U}^H \mathbf{w} \\ &= \mathbf{U}^H \mathbf{U} \mathbf{\Lambda} \mathbf{V}^H \mathbf{V} \mathbf{x} + \mathbf{U}^H \mathbf{w} \\ &= \mathbf{\Lambda} \mathbf{x} + \mathbf{w}' \end{aligned} \quad (13)$$

其中 $\mathbf{w}' = \mathbf{U}^H \mathbf{w} \sim \mathcal{CN}(0, N_0 \mathbf{I})$ 。根据上式，MIMO 信道等效为 N_{\min} 个并行信道，因此在总

功率约束下，采用功率注水能够获得最大可达速率

$$C = \sum_{i=1}^{N_{\min}} E \left[\log \left(1 + \frac{P_i^*}{N_0} \lambda_i^2 \right) \right] \quad (14)$$

其中

$$P_i^* = \left(u - \frac{N_0}{\lambda_i^2} \right)^+, \quad \sum_{i=1}^{N_{\min}} P_i^* = P \quad (15)$$

根据之前的讨论，在高 SNR 时，功率注水近似等价于等功率分配，即 $P_i^* = P/N_{\min}$ 。

此时，信道容量为

$$C \approx \sum_{i=1}^{N_{\min}} E \left[\log \left(1 + \frac{SNR}{N_{\min}} \lambda_i^2 \right) \right] \quad (16)$$

相比 CSIR 情况下的公式 (5)，CSIT 知识提供的额外功率增益为 N_t/N_{\min} 。

1.3、VBLAST 结构

在如图 7-1 所示的 VBLAST 结构中，每根天线发送一个独立的数据流。在未知 CIST 情况下，每根天线分配相同的发送功率。输入输出信号模型为

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{w} \quad (17)$$

其中 \mathbf{x} 中各分量独立。由之前的讨论知在仅有 CSIR 的 i.i.d.瑞利衰落信道中，容量可达的发送信号协方差矩阵为 $\mathbf{K}_x = P/N_t \mathbf{I}$ 。显然，VBLAST 的发送信号 \mathbf{x} 具有该特性，因此在该场景下是容量可达的。

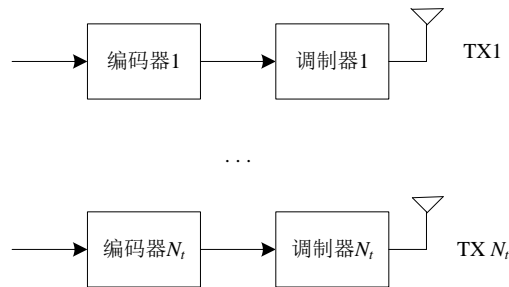


图 7-1 VBLAST 发送端结构示意图。

上述 VBLAST 结构的最佳性是假定发送端采用最佳的 ML 检测得到的。注意到 ML 检测的复杂度为 $\mathcal{O}(M^{N_t})$ ，其中 M 为所采用的调制信号星座大小。当 N_t 和/或 M 较大时，该检测算法由于太高的复杂度变得不实用。下面考虑几种低复杂度的检测算法。

1) 线性解相关器

线性解相关器的基本思想是在估计第 k 个数据流时，将其他数据流对其干扰完全消除。具体的，考虑第 k 个数据流的检测，接收信号 (17) 重表示为

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{w} = \mathbf{h}_k x_k + \sum_{i \neq k} \mathbf{h}_i x_i + \mathbf{w} \quad (18)$$

其中 \mathbf{h}_k 是矩阵 \mathbf{H} 的第 k 列，表示第 k 个数据流 (第 k 根发送天线) 到接收端的信道。对 (17) 左乘向量矩阵 \mathbf{Q}_k ，得到

$$\mathbf{Q}_k \mathbf{y} = \mathbf{Q}_k \mathbf{h}_k x_k + \sum_{i \neq k} \mathbf{Q}_k \mathbf{h}_i x_i + \mathbf{Q}_k \mathbf{w} \quad (19)$$

为了完全消除其他数据流的干扰 $\sum_{i \neq k} \mathbf{h}_i x_i$ ，即 $\mathbf{Q}_k \mathbf{h}_i = \mathbf{0}, \forall i \neq k$ ，要求 \mathbf{Q}_k 在

$\mathbf{V}_k = (\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_{k-1}, \mathbf{h}_{k+1}, \dots, \mathbf{h}_{N_t}) \in \mathbb{C}^{N_r \times (N_t - 1)}$ 张成空间的零空间。这可以通过对 \mathbf{V}_k^T 进行奇异值分解得到。具体的，假设 \mathbf{V}_k^T 的奇异值分解为

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_k^T &= \mathbf{A}_k \mathbf{\Lambda}_k \mathbf{B}_k^H = \mathbf{A}_k \mathbf{\Lambda}_k (\mathbf{B}_k^1, \mathbf{B}_k^0)^H, \\ \mathbf{A}_k &\in \mathbb{C}^{(N_t - 1) \times (N_t - 1)}, \mathbf{\Lambda}_k \in \mathbb{C}^{(N_t - 1) \times N_r}, \mathbf{B}_k^1 \in \mathbb{C}^{N_r \times \text{rank}(\mathbf{V}_k)}, \mathbf{B}_k^0 \in \mathbb{C}^{N_r \times (N_r - \text{rank}(\mathbf{V}_k))} \end{aligned} \quad (20)$$

则可令 $\mathbf{Q}_k = \mathbf{B}_k^{0,H}$ 。

进一步采用 MF，有

$$\frac{(\mathbf{Q}_k \mathbf{h}_k)^H}{\|\mathbf{Q}_k \mathbf{h}_k\|} \mathbf{Q}_k \mathbf{y} = \|\mathbf{Q}_k \mathbf{h}_k\| x_k + \frac{(\mathbf{Q}_k \mathbf{h}_k)^H}{\|\mathbf{Q}_k \mathbf{h}_k\|} \mathbf{Q}_k \mathbf{w} \quad (21)$$

显然，第 k 个数据流的接收 SNR 为

$$SNR_k = \frac{P \|\mathbf{Q}_k \mathbf{h}_k\|^2}{N_t N_0} = \frac{SNR \|\mathbf{Q}_k \mathbf{h}_k\|^2}{N_t} \quad (22)$$

一般的， $\text{rank}(\mathbf{V}_k) = \min\{N_t - 1, N_r\}$ 。当 $N_t - 1 \geq N_r$ 时， $N_r - \text{rank}(\mathbf{V}_k) \leq 0$ ，即零空间不存在。因此，线性解相关器的基本前提是 $N_r \geq N_t$ 。此时 $N_{\min} = N_t$ ，整个 VBLAST 的可达速率为

$$R = \sum_{k=1}^{N_{\min}} E \left[\log \left(1 + \frac{SNR \|\mathbf{Q}_k \mathbf{h}_k\|^2}{N_t} \right) \right] \quad (23)$$

进一步 $\mathbf{Q}_k \mathbf{h}_k \in \mathbb{C}^{(N_r - N_t + 1) \times 1}$ ， $\|\mathbf{Q}_k \mathbf{h}_k\|^2 \sim \chi_{2(N_r - N_t + 1)}^2$ 。对照公式 (7)，采用线性解相关器不能获得最佳性能。

Remark 1: 当 $N_r = N_t$ 时， \mathbf{Q}_k 实际上对应 \mathbf{H} 的逆矩阵的第 k 列。

2) 线性解相关器+SIC

在上述线性解相关器中，每个数据流并行检测时其他数据流对其均有干扰。为了降低干扰，可以执行串行检测并且利用 SIC 策略：首先重构已检测符号并将其对当前数据流的干扰进行预减，再利用解相关器消除未检测符号对其的干扰。具体的，假设串行检测顺序为 $1, 2, \dots, N_t$ 。则在数据流 k 的检测时，首先计算

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_k &= \mathbf{y} - \sum_{i < k} \mathbf{h}_i \hat{x}_i = \mathbf{h}_k x_k + \sum_{i < k} \mathbf{h}_i (x_i - \hat{x}_i) + \sum_{i > k} \mathbf{h}_i x_i + \mathbf{w} \\ &= \mathbf{h}_k x_k + \sum_{i > k} \mathbf{h}_i x_i + \mathbf{w} \end{aligned} \quad (24)$$

然后对预减后 \mathbf{z}_k 执行线性解相关运算

$$\mathbf{Q}_k \mathbf{z}_k = \mathbf{Q}_k \mathbf{h}_k x_k + \sum_{i > k} \mathbf{Q}_k \mathbf{h}_i x_i + \mathbf{w} \quad (25)$$

类似的，此时要求 \mathbf{Q}_k 在 $\mathbf{V}_k = (\mathbf{h}_{k+1}, \dots, \mathbf{h}_{N_t}) \in \mathbb{C}^{N_r \times (N_t - k)}$ 张成空间的零空间。相比仅采用线性解相关器的情况，此时的 \mathbf{Q}_k 具有更大的自由度，并且

$$\mathbf{Q}_k \mathbf{h}_k \in \mathbb{C}^{(N_r - N_t + k) \times 1}, \quad \|\mathbf{Q}_k \mathbf{h}_k\|^2 \sim \chi_{2(N_r - N_t + k)}^2 \quad (26)$$

将 (26) 代入 (23)，采用 SIC 后能获得更大的可达速率。

3) 匹配滤波器 MF

一种更简单的检测器是 MF。MF 的基本思想是最大化目标数据流的信号功率，即最大化 $\|\mathbf{Q}_k \mathbf{h}_k\|^2$ 。显然，根据柯西不等式，有

$$\mathbf{Q}_k = \frac{\mathbf{h}_k^H}{\|\mathbf{h}_k\|} \quad (27)$$

此时，接收信号经过 MF 后变为

$$\mathbf{Q}_k \mathbf{y} = \|\mathbf{h}_k\| x_k + \sum_{i \neq k} \frac{\mathbf{h}_k^H \mathbf{h}_i}{\|\mathbf{h}_k\|} x_i + \underbrace{\frac{\mathbf{h}_k^H}{\|\mathbf{h}_k\|} \mathbf{w}}_{\mathbf{w}'} \quad (28)$$

其中 \mathbf{w}' 和 \mathbf{w} 具有相同的分布，但是干扰项不再为 0。

类似线性解相关器+SIC，MF 还能与 SIC 结合使用进一步改善性能。

Remark 2: 简单的说，MF 虽然能最大化目标数据流的信号功率并且不放大噪声，但是不能消除干扰；线性解相关器能够完全消除干扰，但是不能使得目标数据流信号功率最大化，同时还放大了噪声。一般的，在低 SNR 时，噪声是影响性能的主要因素，MF 最大化目标

数据流的信号功率并且不放大噪声，因此具有更好的性能。再高 SNR 时，干扰是影响性能的主要因素，线性解相关器能够完全消除干扰，因此具有更好的性能。

4) 线性最小均方误差检测 LMMSE

线性最小均方误差检测的目标是使得估计值与真实值的均方误差最小。根据公式(18)，数据流 k 的 LMMSE 检测可建模为

$$\min_{\mathbf{v}_k} E \left[|x_k - \hat{x}_k|^2 \right] = \min_{\mathbf{v}_k} E \left[|x_k - \mathbf{v}_k \mathbf{y}|^2 \right] \quad (29)$$

该问题是凸问题，令目标函数对 \mathbf{v}_k 的偏导为 0，可得

$$\hat{x}_{k,lmse} = \mathbf{h}_k^H \left(\mathbf{H}\mathbf{H}^H + \frac{1}{SNR/N_t} \mathbf{I} \right)^{-1} \mathbf{y} \quad (30)$$

实际上，第 k 个数据流的 LMMSE 检测也可通过白化+MF 两步实现。首先对干扰和噪声项进行白化

$$\mathbf{K}_I^{-1/2} \mathbf{y} = \mathbf{K}_I^{-1/2} \mathbf{h}_k x_k + \underbrace{\mathbf{K}_I^{-1/2} \left(\sum_{i \neq k} \mathbf{h}_i x_i + \mathbf{w} \right)}_{\sim \mathcal{CN}(0, \mathbf{I})} \quad (31)$$

其中 \mathbf{K}_I 是干扰和噪声 $\sum_{i \neq k} \mathbf{h}_i x_i + \mathbf{w}$ 的协方差矩阵，即

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_I &= E \left(\left(\sum_{i \neq k} \mathbf{h}_i x_i + \mathbf{w} \right) \left(\sum_{i \neq k} \mathbf{h}_i x_i + \mathbf{w} \right)^H \right) \\ &= \frac{P}{N_t} \sum_{i \neq k} \mathbf{h}_i \mathbf{h}_i^H + N_0 \mathbf{I} \end{aligned} \quad (32)$$

然后进行 MF，

$$\frac{(\mathbf{K}_I^{-1/2} \mathbf{h}_k)^H}{\|\mathbf{K}_I^{-1/2} \mathbf{h}_k\|} \mathbf{K}_I^{-1/2} \mathbf{y} = \|\mathbf{K}_I^{-1/2} \mathbf{h}_k\| x_k + \underbrace{\frac{(\mathbf{K}_I^{-1/2} \mathbf{h}_k)^H}{\|\mathbf{K}_I^{-1/2} \mathbf{h}_k\|} \mathbf{K}_I^{-1/2} \left(\sum_{i \neq k} \mathbf{h}_i x_i + \mathbf{w} \right)}_{\sim \mathcal{CN}(0, \mathbf{I})} \quad (33)$$

Remark 3: 证明白化+MF 与直接 LMMSE 的等价性参见附录。

同样的，SIC 策略可以和 LMMSE 结合进一步改善检测性能。考虑检测顺序 $1, 2, \dots, N_t$ 。同 (24)，执行预减后，第 k 个数据流的接收信号可以表示为

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{h}_k x_k + \sum_{i > k} \mathbf{h}_i x_i + \mathbf{w} \quad (34)$$

采用 LMMSE 检测，有

$$\frac{(\mathbf{K}_{I'}^{-1/2} \mathbf{h}_k)^H}{\|\mathbf{K}_{I'}^{-1/2} \mathbf{h}_k\|} \mathbf{K}_{I'}^{-1/2} \mathbf{z}_k = \|\mathbf{K}_{I'}^{-1/2} \mathbf{h}_k\| x_k + \underbrace{\frac{(\mathbf{K}_{I'}^{-1/2} \mathbf{h}_k)^H}{\|\mathbf{K}_{I'}^{-1/2} \mathbf{h}_k\|} \mathbf{K}_{I'}^{-1/2} \left(\sum_{i>k} \mathbf{h}_i x_i + \mathbf{w} \right)}_{\sim \mathcal{CN}(0, \mathbf{I})} \quad (35)$$

其中

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{I'} &= E \left[\left(\sum_{i>k} \mathbf{h}_i x_i + \mathbf{w} \right) \left(\sum_{i>k} \mathbf{h}_i x_i + \mathbf{w} \right)^H \right] \\ &= \frac{P}{N_t} \sum_{i>k} \mathbf{h}_i \mathbf{h}_i^H + N_0 \mathbf{I} \end{aligned} \quad (36)$$

此时检测 SINR 为

$$SINR_k^{LMMSE} = \frac{P \|\mathbf{K}_{I'}^{-1/2} \mathbf{h}_k\|^2}{N_t N_0} = \frac{P}{N_t N_0} \mathbf{h}_k^H \left(\frac{P}{N_t} \sum_{i>k} \mathbf{h}_i \mathbf{h}_i^H + N_0 \mathbf{I} \right)^{-1} \mathbf{h}_k \quad (37)$$

因此采用 LMMSE-SIC 的 VBLAST 的可达和速率为

$$\begin{aligned} R_{VBLAST}^{LMMSE-SIC} &= \sum_{k=1}^{N_{\min}} E \left[\log(1 + SINR_k) \right] \\ &= \sum_{k=1}^{N_{\min}} E \left[\log \left(1 + \frac{P}{N_t N_0} \mathbf{h}_k^H \left(\frac{P}{N_t} \sum_{i>k} \mathbf{h}_i \mathbf{h}_i^H + N_0 \mathbf{I} \right)^{-1} \mathbf{h}_k \right) \right] \end{aligned} \quad (38)$$

可以证明, 该收发机结构是容量可达的, 即

$$R_{VBLAST}^{LMMSE-SIC} = E \left[\log \left| \mathbf{I} + \frac{SNR}{N_t} \mathbf{H} \mathbf{H}^H \right| \right] \quad (39)$$

Remark 4: LMMSE-SIC 最佳性的信息理论解释。首先, 根据互信息的链法则,

$$\begin{aligned} I(\mathbf{x}; \mathbf{y}) &= I(x_1, \dots, x_{N_t}; \mathbf{y}) \\ &= I(x_1; \mathbf{y}) + I(x_2; \mathbf{y} | x_1) + \dots + I(x_k; \mathbf{y} | x_1, \dots, x_{k-1}) + \dots + I(x_{N_t}; \mathbf{y} | x_1, \dots, x_{N_t-1}) \end{aligned} \quad (40)$$

考虑 LMMSE-SIC 中第 k 个数据流的检测, 有

$$\begin{aligned} I(x_k; \mathbf{y} | x_1, \dots, x_{k-1}) &= I(x_k; \mathbf{z}_k) \\ &= I \left(x_k; \frac{(\mathbf{K}_{I'}^{-1/2} \mathbf{h}_k)^H}{\|\mathbf{K}_{I'}^{-1/2} \mathbf{h}_k\|} \mathbf{K}_{I'}^{-1/2} \mathbf{z}_k \right) = C(SINR_{k, LMMSE-SIC}) \end{aligned} \quad (41)$$

上式中第二个等号利用了 LMMSE 的信息理论最佳性。

Remark 5: LMMSE 的信息理论最佳性见附录。

Remark 6: LMMSE 检测得到的均方误差有如下表达式

$$\frac{1}{N_t} \|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}_{lmsc}\|^2 = \frac{1}{N_t} \sum_{i=1}^{N_{\min}} \frac{1}{1 + \frac{SNR}{N_t} \lambda_i^2} \quad (42)$$

其中 $\lambda_i, i=1, \dots, N_{\min}$ 为 \mathbf{H} 的奇异值。

2、慢衰落信道

2.1、DBLAST 结构

在慢衰落 MIMO 信道上，系统的最大分集度为 $N_t N_r$ 。获得该最大分集度的收发机结构称为慢衰落信道上的最佳结构。在 VBLAST 结构中，每个数据流独立地在一根发送天线上传输，不能获得发送分集增益，其最大分集度为 N_r ，因此 VBLAST 在慢衰落信道上不是最佳的。

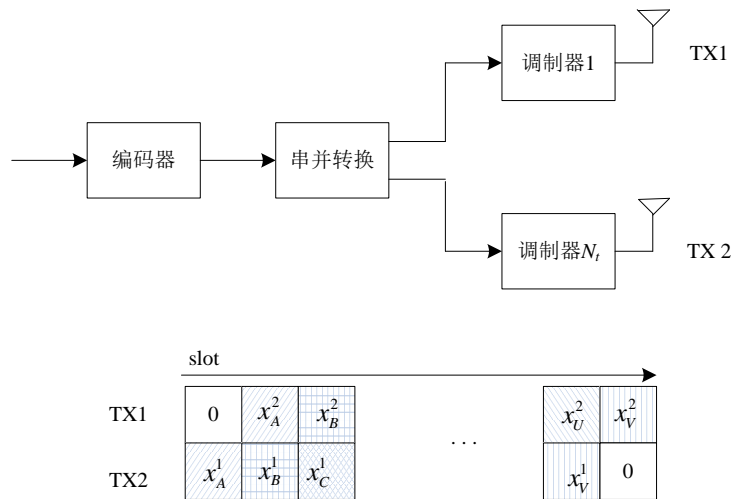


图 7-2 两根发送天线时的 DBLAST 发送信号结构。

为了获得满分集增益，需要在不同数据流之间进行编码，这样同一数据流就能通过不同的发送天线传输，进而可能获得满分集增益。图 7-2 给出了 $N_t=2$ 时 D-BLAST 结构发送信号示意图。在该结构中，每个数据流都在两根天线上进行发送。接收端采用 SIC 策略对每个数据流进行译码。

考虑图 7-2 中数据 x_A^1 的译码。在第 1 时隙，仅数据 x_A^1 在第 2 根天线发送，此时的接收信号为

$$\mathbf{y}_1 = \mathbf{h}_2 x_A^1 + \mathbf{w}_1 \quad (43)$$

采用 LMMSE 检测，最大传输速率为

$$R_{A,1} = \log \left(1 + \frac{SNR}{2} \|\mathbf{h}_2\|^2 \right) \quad (44)$$

该时隙虽然第 1 根天线不发送信号，第 2 根天线的功率仍然为 $P/2$ 。

接下来考虑 x_A^2 的检测。在第 2 时隙，数据 x_A^2 和 x_B^2 分别在两根天线发送，此时的接收信号为

$$\mathbf{y}_2 = \mathbf{h}_1 x_A^2 + \mathbf{h}_2 x_B^1 + \mathbf{w}_2 \quad (45)$$

将 $\mathbf{h}_2 x_B^1$ 当作干扰直接对 x_A^2 进行译码，其最大传输速率为

$$R_{A,2} = \log \left(1 + \frac{\frac{P}{N_t} \|\mathbf{h}_2\|^2}{\frac{P}{N_t} \|\mathbf{h}_1\|^2 + N_0} \right) \quad (46)$$

由于 x_A^1 和 x_A^2 之间有编码约束，因此仅当传输速率

$$\begin{aligned} R_{A,1} + R_{A,2} &= \log \left(1 + \|\mathbf{h}_2\|^2 \frac{P}{N_t N_0} \right) + \log \left(1 + \frac{\frac{P}{N_t} \|\mathbf{h}_1\|^2}{\frac{P}{N_t} \|\mathbf{h}_2\|^2 + N_0} \right) \\ &= C(\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2) \end{aligned} \quad (47)$$

大于信道容量时， $\mathbf{x}_A = (x_A^1, x_A^2)$ 的传输才发生中断。上式中第二个等号由 LMMSE-SIC 的信息理论最佳性得到。

在 \mathbf{x}_A 正确译码后，将 $\mathbf{h}_2 x_B^1$ 从 \mathbf{y}_2 中减去， x_B^1 检测对应的最大速率为 (44)。同样的，在第 3 个时隙， x_B^2 的最大速率为 (44)。因此 $\mathbf{x}_B = (x_B^1, x_B^2)$ 的传输也是中断最佳的。采用相同的方法，所有数据流的传输都是中断最佳的。

上述两根发送天线的 DBLAST+LMMSE-SIC 收发机可以推广到任意数目的发送天线结构。因此，DBLAST+LMMSE-SIC 在慢衰落 MIMO 信道上中断最佳的。

Remark 7: 根据图 7-2 的中断信号模型，DBLAST 存在谱效率的损失。当传输时隙数为 T ，发送天线数为 N_t 时，实际使用的空时资源占比为

$$\eta = \frac{TN_t - 2(1+2+\dots+N_t-1)}{TN_t} = 1 - \frac{N_t-1}{T} \quad (48)$$

当 $T \gg N_t$ 时，谱效率的损失可以忽略。