

## Lecture 5 多用户容量和机会通信

2021-4-6

之前讨论了单用户无线衰落信道的误码和容量性能,本部分讨论多用户无线衰落信道容量区域。

## 1、上行 AWGN 信道

首先考虑两用户上行 AWGN 信道,其输入输出信号模型为

$$y = x_1 + x_2 + w \quad (1)$$

其中,  $E[|x_k|^2] \leq P_k, k=1,2$ ,  $w \sim \mathcal{CN}(0, N_0)$  表示加性高斯噪声。

其容量区域定义为用户 1 和 2 分别能实现可靠传输时对应速率对的集合, 即

$$\mathcal{C} = \{(R_1, R_2) | p_{1,e}(R_1) \rightarrow 0, p_{2,e}(R_2) \rightarrow 0\} \quad (2)$$

其中  $p_{k,e}(R_k), k=1,2$  表示用户  $k$  以速率  $R_k$  传输时的错误概率。进一步定义对称容量为两用户以相同速率实现可靠传输时的最大速率, 即

$$C_{sym} = \max_{(R,R) \in \mathcal{C}} R \quad (3)$$

定义和容量为实现可靠传输的最大和速率, 即

$$C_{sym} = \max_{(R_1, R_2) \in \mathcal{C}} R_1 + R_2 \quad (4)$$

两用户上行 AWGN 信道的容量区域由满足下面约束的速率对构成

$$\begin{aligned} R_1 &\leq \log\left(1 + \frac{P_1}{N_0}\right), \quad R_2 \leq \log\left(1 + \frac{P_2}{N_0}\right) \\ R_1 + R_2 &\leq \log\left(1 + \frac{P_1 + P_2}{N_0}\right) \end{aligned} \quad (5)$$

其中前两个约束为单用户约束 (即假定只服务当前用户时对应的信道容量约束), 第三个约束是当两用户能实现完全协作时的虚拟单用户信道容量约束。

公式 (5) 的容量区域的一个示例如图 5-1 所示。图中点 A 和 B 分别对应只服务用户 1 和 2 的情况, 点 C 对应接收端先译用户 2 再干扰抵消然后译用户 1 的情况, 点 D 与 C 译码顺序相反。线段 ACDB 上的点均可以通过时分正交策略得到, CD 线段上的点均达到最大和速率 (公式 (5) 第三个约束的上界)。具体的, 点对应 C 的可达速率对为

$$R_1 = \log\left(1 + \frac{P_1}{N_0}\right), \quad R_2 = \log\left(1 + \frac{P_2}{P_1 + N_0}\right) \quad (6)$$

在 BS 端首先译用户 2 的信号，此时直接将用户 1 的信号看作干扰，从公式 (1) 知，此时的 SINR 为  $P_2/(P_1 + N_0)$ 。然后将用户 2 的信号进行重构和消除，在假定  $x_2$  译码完全正确的条件下即  $\hat{x}_2 = x_2$ ，干扰消除后的信号为

$$y' = y - \hat{x}_2 = x_1 + x_2 - \hat{x}_2 + w = x_1 + w \quad (7)$$

此时译用户 1 信号对应的 SNR 为  $P_1/N_0$ 。

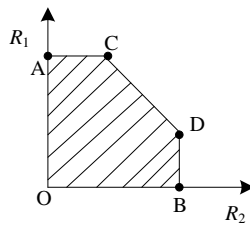


图 5-1. 两用户上行高斯信道容量区域。

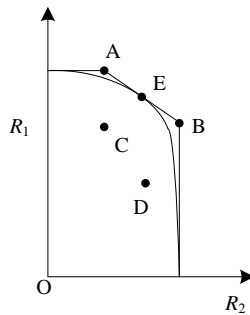


图 5-2. 两用户上行高斯信道容量区域。

**作业 1:** 线段 CD 上的点出了可以采用时分策略得到，也可以通过速率分裂策略得到。两用户速率分裂的基本思想是将一个用户比如用户 1 分裂为两个虚拟用户 1a 和 1b，分配的功率分别为  $\delta$  和  $P_1 - \delta$ ，然后按照 1a、2 和 1b 的顺序采用 SIC 译码。试证明该方案的可行性即能达到式 (5) 第三个约束的和速率上限。

上面给出了两用户上行高斯信道的容量区域及其可达技术 SIC 译码策略。下面考虑常用的 CDMA 策略和正交策略。在 CDMA 策略中，每用户进行单用户译码（将其他用户信号看作干扰），其可达速率为

$$R_k = \log \left( 1 + \frac{Q_k}{\sum_{k' \neq k} Q_{k'} + N_0} \right), \quad k = 1, 2 \quad (8)$$

当发送端未知 CSI 时，每用户等功率发送信号；当已知 CSIT 时，进行功率控制使得  $Q_k = Q, \forall k$ 。图 5-2 给出了 C 和 D 点分别对应未采用功率控制和采用功率控制时 CDMA 的可达速率对。

在正交策略中，其可达速率取推导如下。假设将用户 1 和 2 分别分配信道自由度的  $\alpha$  和  $1-\alpha$  部分。则用户 1 和 2 的可达速率分别为

$$\begin{aligned} R_1 &= \alpha \log \left( 1 + \frac{P_1}{\alpha N_0} \right) \\ R_2 &= (1-\alpha) \log \left( 1 + \frac{P_2}{(1-\alpha) N_0} \right) \end{aligned} \quad (9)$$

其和速率为

$$R_1 + R_2 = \alpha \log \left( 1 + \frac{P_1}{\alpha N_0} \right) + (1-\alpha) \log \left( 1 + \frac{P_2}{(1-\alpha) N_0} \right) \quad (10)$$

定义辅助变量

$$u = \begin{cases} \frac{P_1}{\alpha}, & \text{with probability } \alpha \\ \frac{P_2}{1-\alpha}, & \text{with probability } 1-\alpha \end{cases} \quad (11)$$

则和速率可表示为

$$\begin{aligned} R_1 + R_2 &= E_u \left[ \log \left( 1 + \frac{u}{N_0} \right) \right] \\ &\leq \log \left( 1 + \frac{E[u]}{N_0} \right) = \log \left( 1 + \frac{P_1 + P_2}{N_0} \right) = C_{sum} \end{aligned} \quad (12)$$

上式利用了  $\log(1+x)$  当  $x>0$  时的上凸性和  $E[u] = P_1 + P_2$ 。从上式可以看出采用正交策略仅当

$$\frac{P_1}{\alpha} = \frac{P_2}{1-\alpha} \Leftrightarrow \alpha = \frac{P_1}{P_1 + P_2} \quad (13)$$

时能达到最大和速率。图 5-2 中点 E 即表示当分配因子  $\alpha$  满足上式时的可达速率对。

最后，将  $K=2$  的两用户推广到一般的多用户情况。此时  $K$  用户上行 AWGN 信道的容量区域为

$$\sum_{k \in \mathcal{S}} R_k \leq \log \left( 1 + \frac{\sum_{k \in \mathcal{S}} P_k}{N_0} \right), \text{ for all } \mathcal{S} \subseteq \{1, 2, \dots, K\} \quad (14)$$

上式总共有  $2^K - 1$  个不等式约束。和容量为

$$C_{sum} = \log \left( 1 + \frac{\sum_{k=1}^K P_k}{N_0} \right) \quad (15)$$

对应协作的虚拟单用户信道容量。当所有用户等功率发送信号即  $P_k = P, \forall k$  时，对称速率为

$$C_{sym} = \frac{1}{K} \log \left( 1 + \frac{KP}{N_0} \right) \quad (16)$$

上述对称速率可通过正交策略得到（每用户分配自由度为  $1/K$ ）。

**Remark 1:** 采用功率控制的 CDMA 系统和速率为

$$\begin{aligned} C_{sum}^{CDMA,PC} &= K \log \left( 1 + \frac{Q}{(K-1)Q + N_0} \right) \\ &\stackrel{K \rightarrow \infty}{=} K \frac{Q}{(K-1)Q + N_0} \log_2 e \approx \log_2 e = 1.442 \text{ b/s/Hz} \end{aligned} \quad (17)$$

## 2、下行固定高斯信道

首先考虑两用户  $K=2$  情况。用户  $k$  的其输入输出信号模型为

$$y_k = h_k x + w_k, \quad k = 1, 2 \quad (18)$$

其中， $E[|x|^2] \leq P$ ， $w_k \sim \mathcal{CN}(0, N_0)$  表示加性高斯噪声。假设只服务一个用户，则对应的单用户界为

$$R_k < \log \left( 1 + \frac{P|h_k|^2}{N_0} \right), \quad k = 1, 2 \quad (19)$$

在对称情况即  $|h_1| = |h_2|$  时，假设用户 1 能够以速率  $R_1$  实现可靠传输，则用户 2 也能实现用户 1 数据的可靠译码（具有相同的 SINR 表达式）。进一步用户 2 执行 SIC，完全消除用户 1 的干扰，实现用户 2 速率  $R_2$  数据的可靠传输。显然，用户 2 同时实现了速率  $R_1 + R_2$  的可靠传输，因此有

$$R_1 + R_2 < \log \left( 1 + \frac{P|h_1|^2}{N_0} \right) \quad (20)$$

上式和 (19) 式共同确定了对称情况的容量区域。

显然, 采用自由度的正交分配能够获得上述容量区域。此外, 采用叠加编码+SIC 策略也能获得对称情况的容量区域。具体的, 假定发送信号由用户 1 和用户 2 的信号按照如下方式叠加构成

$$x = \sqrt{P_1}x_1 + \sqrt{P_2}x_2 \quad (21)$$

其中  $x_1$  和  $x_2$  分别为归一化的用户 1 和用户 2 数据,  $P_1$  和  $P_2$  分别为分配用户 1 和用户 2 的功率并且有  $P_1 + P_2 = P$ 。

假设用户 1 译码时将用户 2 的数据直接看作干扰, 则有用户 1 的可达速率为

$$R_1 < \log \left( 1 + \frac{P_1|h_1|^2}{P_2|h_1|^2 + N_0} \right) \quad (22)$$

用户执行 SIC 策略, 首先译用户 1 数据, 其可达 SINR 为

$$SINR_{1@2} < \frac{P_1|h_2|^2}{P_2|h_2|^2 + N_0} = \frac{P_1|h_1|^2}{P_2|h_1|^2 + N_0} \quad (23)$$

因此当  $R_1$  满足约束 (22) 时, 用户 2 也能准备译出用户 1 的数据。进一步干扰抵消后, 用户 2 可实现满足如下约束的速率  $R_2$

$$R_2 < \log \left( 1 + \frac{P_2|h_2|^2}{N_0} \right) \quad (24)$$

因此, 系统和速率为

$$R_1 + R_2 < \log \left( 1 + \frac{P_1|h_1|^2}{P_2|h_1|^2 + N_0} \right) + \log \left( 1 + \frac{P_2|h_2|^2}{N_0} \right) = \log \left( 1 + \frac{P|h_1|^2}{N_0} \right) \quad (25)$$

接下来考虑非对称情况即  $|h_1| \neq |h_2|$ , 不失一般性, 假设  $|h_1| < |h_2|$ 。首先考虑式 (21) 所示的叠加编码策略。此时, 根据 (22) - (24) 的译码策略, 其可达速率区域为

$$\begin{aligned} R_1 &< \log \left( 1 + \frac{P_1 |h_1|^2}{P_2 |h_1|^2 + N_0} \right) \\ R_2 &< \log \left( 1 + \frac{P_2 |h_2|^2}{N_0} \right) \end{aligned} \quad (26)$$

接下来考虑正交策略。此时的可达速率区为

$$\begin{aligned} R_1 &= \alpha \log \left( 1 + \frac{P |h_1|^2}{\alpha N_0} \right) \\ R_2 &= (1 - \alpha) \log \left( 1 + \frac{P |h_2|^2}{(1 - \alpha) N_0} \right) \end{aligned} \quad (27)$$

图 5-3 给出了两种方案的可达速率区，从图中可以看出，叠加编码+强用户 SIC 的可达速率区包含且不限于正交策略的可达速率区。事实上，叠加编码+强用户 SIC 的可达速率区时下行固定高斯信道的容量区域。

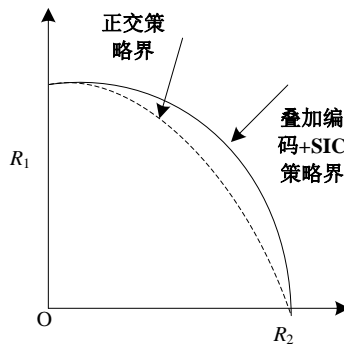


图 5-3. 两用户下行固定高斯信道容量区域和可达速率区。

推广到一般的  $K > 2$  的情况。在对称假设  $|h_1| = |h_2| = \dots = |h_K|$  下，其容量区域为

$$\sum_{k \in S} R_k \leq \log \left( 1 + \frac{P |h_1|^2}{N_0} \right), \text{ for all } S \subseteq \{1, 2, \dots, K\} \quad (28)$$

正交和叠加编码+SIC 策略均是容量区域可达结构。在非对称假设  $|h_1| < |h_2| < \dots < |h_K|$  下，其容量区域为

$$R_k \leq \log \left( 1 + \frac{P_k |h_k|^2}{\left( \sum_{j=k+1}^K P_j \right) |h_k|^2 + N_0} \right), \quad k = 1, 2, \dots, K \quad (29)$$

该容量区域可通过叠加编码+强用户 SIC 策略得到。

### 3、上行衰落信道

上行衰落信道 BS 接收信号表达式一般模型为

$$y_m = \sum_{k=1}^K h_{k,m} x_{k,m} + w_m \quad (30)$$

其中,  $x_{k,m}$  和  $h_{k,m}$  分别表示用户  $k$  在第  $m$  时隙的发送信号和到 BS 的信道增益, 同时发送信号满足功率约束  $E\left[|x_{k,m}|^2\right] \leq P, k=1,2,\dots,K, m=1,2,\dots,M$ ,  $y_m$  和  $w_m \sim \mathcal{CN}(0, N_0)$  分别表示第  $m$  时隙接收信号和加性高斯噪声。

#### 3.1、慢衰落信道

在慢衰落信道上有  $h_{k,m} = h_k, \forall m$ , 根据式 (14), 定义上行信道中断概率为

$$p_{out}^{up} = \Pr \left\{ \log \left( 1 + SNR \sum_{k \in \mathcal{S}} |h_k|^2 \right) < |\mathcal{S}| R, \text{ for some } \mathcal{S} \in \{1,2,\dots,K\} \right\} \quad (31)$$

其中  $SNR \triangleq P/N_0$ 。上式中  $\mathcal{S}$  总共有  $2^K-1$  中可能, 只要有一种 (for some) 情况下和速率小于目标速率则整个系统发生中断。

考虑对称情况  $|h_1| = |h_2| = \dots = |h_K| = |h|$ , 每用户占用自由度  $1/K$  的正交策略, 假设每用户中断概率为  $\varepsilon'$ , 则整个上行链路的中断概率为

$$\begin{aligned} p_{out}^{up} &= 1 - (1 - \varepsilon')^K \approx K \varepsilon' \\ &= K \Pr \left\{ \frac{1}{K} \log \left( 1 + \frac{P|h|^2}{1/K \times N_0} \right) < R \right\} \\ &= K \Pr \left\{ \log \left( 1 + K|h|^2 SNR \right) < KR \right\} = \varepsilon \\ &\Rightarrow \Pr \left\{ \log \left( 1 + K|h|^2 SNR \right) < KR \right\} = \varepsilon/K \end{aligned} \quad (32)$$

注意到

$$C_{\varepsilon'}(SNR) = \left\{ R \mid \Pr \left\{ \log \left( 1 + |h|^2 SNR \right) < R \right\} = \varepsilon' \right\} \quad (33)$$

因此, 正交上行链路的  $\varepsilon$  对称中断速率为

$$R_{\varepsilon/K}^{ort} = \frac{C_{\varepsilon/K}(K \times SNR)}{K} \quad (34)$$

上式是否是最佳的? 即正交策略在非对称上行链路是否是最佳的? 考虑低 SNR 情况,

式 (30) 可以近似表示为

$$\begin{aligned}
 p_{out}^{up} &= \Pr \left\{ \frac{1}{|\mathcal{S}|} \log \left( 1 + SNR \sum_{k \in \mathcal{S}} |h_k|^2 \right) < R, \text{ for some } \mathcal{S} \in \{1, 2, \dots, K\} \right\} \\
 &= \Pr \left\{ \frac{\log_2 e}{|\mathcal{S}|} SNR \sum_{k \in \mathcal{S}} |h_k|^2 < R, \text{ for some } \mathcal{S} \in \{1, 2, \dots, K\} \right\} \\
 &= \Pr \left\{ \frac{1}{|\mathcal{S}|} \sum_{k \in \mathcal{S}} |h_k|^2 < \frac{R \ln 2}{SNR}, \text{ for some } \mathcal{S} \in \{1, 2, \dots, K\} \right\}
 \end{aligned} \tag{35}$$

在  $h_k$  服从独立同分布  $\mathcal{CN}(0, 1)$  假设下, 上式中  $\frac{1}{|\mathcal{S}|} \sum_{k \in \mathcal{S}} |h_k|^2$  服从均值为 1, 方差为  $2/|\mathcal{S}|$  的

中心卡方分布。当  $|\mathcal{S}|$  较大时, 中心卡方分布趋近高斯分布。因此将  $\frac{1}{|\mathcal{S}|} \sum_{k \in \mathcal{S}} |h_k|^2$  近似为高斯

分布  $\mathcal{CN}(1, 2/|\mathcal{S}|)$ , 进一步有

$$\begin{aligned}
 &\Pr \left\{ \frac{\frac{1}{|\mathcal{S}|} \sum_{k \in \mathcal{S}} |h_k|^2 - 1}{\sqrt{2/|\mathcal{S}|}} < \frac{\frac{R}{SNR \log_2 e} - 1}{\sqrt{2/|\mathcal{S}|}} \right\} \\
 &1 - Q \left( \frac{\frac{R}{SNR \log_2 e} - 1}{\sqrt{2/|\mathcal{S}|}} \right) = Q \left( \frac{1 - \frac{R}{SNR \log_2 e}}{\sqrt{2/|\mathcal{S}|}} \right)
 \end{aligned} \tag{36}$$

上式中  $SNR \log_2 e$  是高斯信道上低 SNR 时的信道容量, 衰落信道上相应目标速率  $R$  一般小

于满足高斯信道信道容量, 即  $1 - \frac{R}{SNR \log_2 e} > 0$ 。因此当  $|\mathcal{S}|$  越大时式 (36) 值越小。这

使得式 (35) 中中断概率主要由  $|\mathcal{S}|=1$  的情况确定, 即 (35) 可进一步表示为

$$p_{out}^{up} \approx \Pr \left\{ |h_k|^2 < \frac{R \ln 2}{SNR}, \text{ for some } k = 1, 2, \dots, K \right\} \approx K \varepsilon' \tag{37}$$

因此, 低 SNR 下  $\varepsilon$  对称中断容量为

$$\begin{aligned}
 C_{\varepsilon/K} &= C_{\varepsilon/K}(SNR) \approx F^{-1} \left( 1 - \frac{\varepsilon}{K} \right) SNR \log_2 e \\
 &= F^{-1} \left( 1 - \frac{\varepsilon}{K} \right) \frac{K SNR \log_2 e}{K} = \frac{C_{\varepsilon/K}(K SNR)}{K} \\
 &= R_{\varepsilon/K}^{ort}
 \end{aligned} \tag{38}$$



可见，在对称情况下，正交策略在低 SNR 时是最佳的。

在高 SNR 时，上行链路对称容量  $C_{\varepsilon/K}$  与单用户中断容量  $C_\varepsilon$  的比值随着 SNR 的增加首先增加，然后下降，最后到达  $1/K$  左右。

作业 2: 证明在高 SNR 时,  $C_{\varepsilon/K}/C_\varepsilon \rightarrow 1/K$ 。

### 3.2、快衰落信道

快衰落信道的和容量为

$$\begin{aligned} C_{sum} &= E \left[ \log \left( 1 + SNR \sum_{k=1}^K |h_k|^2 \right) \right] \\ &\leq \log \left( 1 + SNR \sum_{k=1}^K E \left[ |h_k|^2 \right] \right) \\ &= \log(1 + K \times SNR) = C_{sum}^{AWGN} \end{aligned} \quad (39)$$

上式中假设  $E \left[ |h_k|^2 \right] = 1$ 。显然，当用户数  $K \rightarrow \infty$  时，和容量逼近高斯信道的和容量。

考虑两种实际的收发结构：非正交多址+SIC 和正交多址。在非正交多址+SIC 结构中，假设 BS 译码顺序为  $1, 2, \dots, K$ ，则译用户  $k$  数据时利用的干扰消除后的接收信号为

$$y_m = h_{k,m} x_{k,m} + \sum_{j=k+1}^K h_{j,m} x_{j,m} + w_m \quad (40)$$

对应的可达速率为

$$\begin{aligned} R_k &= E_{h_k} \left[ \log \left( 1 + \frac{P|h_k|^2}{P \sum_{j=k+1}^K |h_j|^2 + N_0} \right) \right] \\ &\stackrel{K \rightarrow \infty}{\approx} E_{h_k} \left[ \log \left( 1 + \frac{P|h_k|^2}{P(K-k) + N_0} \right) \right] \\ &\approx \log_2 e \times E \left[ \frac{P|h_k|^2}{P(K-k) + N_0} \right] \\ &= \log_2 e \times \frac{P}{P(K-k) + N_0} = R_k^{AWGN} \end{aligned} \quad (41)$$

上式进一步验证了当用户数  $K \rightarrow \infty$  时衰落信道上行链路和容量逼近高斯信道的和容量，同时也验证了非正交多址+SIC 的最佳性。

正交多址结构的和速率为

$$R_{sum}^{Ort} = \sum_{k=1}^K \frac{1}{K} E_{h_k} \left[ \log \left( 1 + \frac{KP|h_k|^2}{N_0} \right) \right] \quad (42)$$

注意到

$$\begin{aligned} C_{sum} &= E_{\{h_k, k=1, \dots, K\}} \left[ \log \left( 1 + \frac{P \sum_{k=1}^K |h_k|^2}{N_0} \right) \right] = E_{\{h_k, k=1, \dots, K\}} \left[ \log \left( 1 + \frac{KP \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K |h_k|^2}{N_0} \right) \right] \\ &\geq E_{\{h_k, k=1, \dots, K\}} \left[ \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \log \left( 1 + \frac{KP|h_k|^2}{N_0} \right) \right] = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K E_{\{h_k, k=1, \dots, K\}} \left[ \log \left( 1 + \frac{KP|h_k|^2}{N_0} \right) \right] \\ &= \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K E_{h_k} \left[ \log \left( 1 + \frac{KP|h_k|^2}{N_0} \right) \right] = R_{sum}^{Ort} \end{aligned} \quad (43)$$

因此正交多址并不是最佳的。

上述讨论中假定用户等功率发送信号，假设用户已知 CSI (CSIT) 时，可以通过在不同时隙分配功率提高系统和速率。考虑  $K$  个用户在  $L$  个时隙的信号传输，在用户间信道独立衰落假设下，这可以等效为  $L$  个并行子信道，每个子信道包含  $K$  个快变时隙。此时对应的和容量为

$$\begin{aligned} \max_{\{P_{k,l}\}} \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L \log \left( 1 + \frac{\sum_{k=1}^K P_{k,l} |h_{k,l}|^2}{N_0} \right) \\ \text{s.t. } \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L P_{k,l} = P, k = 1, \dots, K \end{aligned} \quad (44)$$

上式中的约束是每用户功率约束。

在每用户信道  $h_{1,l}, \dots, h_{K,l}$  服从独立同分布的对称情况下，式 (44) 中的每用户功率约束可以等价为总功率约束

$$\frac{1}{KL} \sum_{k=1}^K \sum_{l=1}^L P_{k,l} = P \quad (45)$$

此时 (44) 可以通过在  $k$  和  $l$  两个维度进行功率注水求解：首先对每个并行信道  $l$ ，只服务当前信道质量最好的用户即把功率都分配给信道质量最好的用户，然后当前最好用户分配的功率通过在不同子信道  $l$  间进行功率注水得到。具体的，首先定义

$$k_l^* = \arg \max_{k=1, \dots, K} |h_{k,l}| \quad (46)$$

然后按照下式分配功率

$$P_{k,l} = \begin{cases} \left( \frac{1}{u} - \frac{N_0}{|h_{k_l^*,l}|} \right)^+ & \text{if } k = k_l^* \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad (47)$$

上式中参数  $u$  的选择应使其满足和功率约束 (45)。此时和容量为

$$C_{sum} = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L \log \left( 1 + \frac{\sum_{k=1}^K P_{k,l} |h_{k,l}|^2}{N_0} \right) = E \left[ \log \left( 1 + \frac{P_{k^*} |h_{k^*}|^2}{N_0} \right) \right] \quad (48)$$

**Remark 3:** 式 (45) 在时间和用户两个维度进行功率分配, 这要求每个用户已知所有用户到 BS 的 CSI 或者存在一个中心控制单元。因此两维功率注水虽然能获得相比仅已知 CSIR 时 (39) 式更大的和速率, 但 CSI 的要求非常严格, 多数情况下并不能满足。

#### 4、下行衰落信道

下行链路用户  $k$  的接收信号可表示为

$$y_{k,m} = h_{k,m} x_m + w_m \quad (49)$$

其中 BS 在第  $m$  个时隙的发送信号  $x_m$  满足功率约束  $E[|x_m|] \leq P$ 。

考虑仅 CSIR 已知的快衰落信道, 在用户 CSI  $h_{k,m}, k=1, \dots, K$  独立同分布的对称情况下,

下行链路的容量区域为

$$\sum_{k=1}^K R_k \leq E \left[ \log \left( 1 + \frac{P |h_{k,l}|^2}{N_0} \right) \right] \quad (50)$$

这是因为用户信道具有相同的分布, 因此任一用户能够译出其他用户的信息 (具有相同的 SINR)。同高斯信道情况, 可以采用叠加或者正交方法获得该容量区域。

在非对称情况下, 一般要采用污纸编码获得其容量区域。

在 CSIT 情况下, 和上行情况类似, 可以采用功率注水策略获得下行链路的和容量: 每个时刻仅服务信道质量最好的用户, 功率在不同时刻的分配采用注水策略。此时的和容量为

$$C_{sum} = E \left[ \log \left( 1 + \frac{P^*(\mathbf{h}) \left( \max_{k=1, \dots, K} |h_k|^2 \right)}{N_0} \right) \right] \quad (51)$$

## 5、多用户分集

### 5.1、多用户分集的概念

正如单用快衰落信道由于采用时间上的功率分配/注水在低 SNR 区活动相比高斯信道更高的容量，多用户快衰落上下行链路在用户和时间上采用功率分配能够获得比相应的高斯信道情况更大的和容量。以上行链路为例，其和容量（48）式中，

$$|h_{k^*}| = \max_{k=1, \dots, K} |h_k| \quad (52)$$

当用户独立衰落时，

$$\Pr(|h_{k^*}| > 1) \rightarrow 1 \quad (53)$$

因此，

$$C_{sum} = E \left[ \log \left( 1 + \frac{P_{k^*} |h_{k^*}|^2}{N_0} \right) \right] > \log \left( 1 + \frac{KP}{N_0} \right) = C_{sum}^{AWGN} \quad (54)$$

上式中每个时隙  $K$  个用户的总功率  $KP$  都分配给当前最好的用户  $k^*$ ，即  $P_{k^*} = KP$ 。从上式，在所有的 SNR 范围，当已知 CSIT 时，多用户快衰落信道的和容量均大于多用户高斯信道和容量，该现象称为**多用户分集**。在高 SNR，由于注水等价于不同时隙等功率分配，因此多用户分集主要来自功率在用户间的分配，在低 SNR，功率在用户间和信道时隙的分配均能提高和速率。因此，一般的，低 SNR 区相比高 SNR 区多用户分集的效果更明显，即相对增量  $(C_{sum} - C_{sum}^{AWGN}) / C_{sum}^{AWGN}$  更大。

**Remark 4:** 从式（52）和（54）可以看出，多用户分集依赖  $|h_k|$  的分布。当  $|h_k|$  呈现重尾分布时，当前最好的用户  $k^*$  越能获得更好的信道质量，因此获得更高的多用户分集增益。

**Remark 5:** 多用户分集与经典分集的同异：1) 目标不同，经典分集是为了提高通信可靠性，多用户分集是为了提高通信容量；2) 设计理念不同，经典分集是为了克服衰落的影响，多用户分集是利用信道波动；3) 应用场景不同，经典分集主要应用在单用户点对点通信，多用户分集是应用在多用户系统体现了系统观点。

上述多用户分集没有考虑用户公平性、时延、信道误差影响等方面。此外，当信道波动

较慢时如何获得多用户分集也是一个要考虑的问题。

### 5.2、比例公平调度策略

在比例公平调度策略中，在时隙  $m$ ，用户  $k$  在最近的  $t_c$  时间  $t \in [m - t_c, m - 1]$  内的平均吞吐量记为  $T_k[m]$ ，当前时刻的请求服务速率为  $R_k[m]$ （正比于信道质量  $|h_k[m]|$ ）。则当前时隙服务的用户为

$$k^* = \arg \max_{k=1, \dots, K} \frac{R_k[m]}{T_k[m]} \quad (55)$$

进一步，吞吐量的更新公式为

$$T_k[m+1] = \begin{cases} \frac{(t_c - 1)T_k[m] + R_k[m]}{t_c}, & k = k^* \\ \left(1 - \frac{1}{t_c}\right)T_k[m], & k \neq k^* \end{cases} \quad (56)$$

从式 (55) 可以看出，只有该用户选择度量同时考虑了当前信道质量和已获得的服务吞吐量，在之前获得较少服务（吞吐量较低）且当前质量较好的时隙才能获得服务，因此能较好保证各用户服务的公平性。另一方面考虑信道快变场景，该策略等价于每用户当处于自己信道质量最好的时候获得服务。换句话说，当用户数  $K$  充分大时，在任何时隙总能找到一个用户在当前实现处于自身信道的峰值（在  $t_c$  时隙内），此时该用户获得服务。间隔  $t_c$  表示当前用户为了达到自身信道最好时所需的等待时间，因此是该系统时延性能的重要指标。

作业 3（选做）：当  $t_c$  趋于无穷大时，证明 (55) 式对应的比例公平调度策略能够最大化

$$\sum_{k=1}^K \log T_k \quad (57)$$

### 5.3、机会波束赋形

多用户分集增益的获得有赖于信道的波动，当信道波动较慢时可以通过机会波束赋形（解调天线）获得波动较快的等效信道，进而获得多用户分集。

考虑 BS 配置  $N_t$  根天线，每用户配置单根天线的下行链路。BS 第  $l$  根天线到用户  $k$  在时隙  $m$  的信道记为  $h_{lk}[m]$ 。在第  $l$  根天线上引入预编码权重  $\sqrt{\alpha_l[m]}e^{j\theta_l[m]}$ ，同时满足功率

约束  $\sum_{l=1}^{N_t} \alpha_l[m] = 1$ 。此时，用户  $k$  的接收信号为

$$\begin{aligned}
 y_k[m] &= \left( \sum_{l=1}^{N_t} \sqrt{\alpha_l[m]} e^{j\theta_l[m]} h_{lk}[m] \right) x[m] + w_k[m] \\
 &= (\mathbf{h}_k[m])^T \mathbf{q}[m] x[m] + w_k[m]
 \end{aligned} \tag{58}$$

其中  $\mathbf{q}[m] = [\sqrt{\alpha_1[m]} e^{j\theta_1[m]}, \dots, \sqrt{\alpha_{N_t}[m]} e^{j\theta_{N_t}[m]}]^T$ ,  $\mathbf{h}_k[m] = [h_{1k}[m], \dots, h_{N_t k}[m]]^T$ 。

从式 (58), 等效信道增益为  $(\mathbf{h}_k[m])^T \mathbf{q}[m]$ 。通过在时隙  $m$  灵活调整参数  $\{\alpha_l[m], \theta_l[m]\}$ , 不论物理信道  $h_{lk}[m]$  的波动程度如何, 总能获得良好的等效信道波动, 进而获得多用户分集增益。

在实际实现时, 用户  $k$  只需要将等效信道质量  $|(\mathbf{h}_k[m])^T \mathbf{q}[m]|$  或对应的 SNR 反馈给 BS, BS 再根据反馈信息执行服务用户选择。

考虑慢衰落信道  $\mathbf{h}_k[m] = \mathbf{h}_k, \forall k$ 。当用户数  $K$  充分大时, 对任意的参数  $\{\alpha_l[m], \theta_l[m]\}$ , 总能找到一个用户  $k^*$  满足

$$\mathbf{q}[m] = \frac{(\mathbf{h}_{k^*})^*}{\|\mathbf{h}_{k^*}\|} \tag{59}$$

这时用户  $k^*$  达到了自身最好的信道质量  $\|\mathbf{h}_k\|^2$  即最大的 SNR, 反馈给 BS 后, BS 服务该用户。因此称为**机会波束赋形**, 同时获得了分集和功率增益。

表 5-1 比较了三种传输端多天线技术。在快衰落信道采用空时码技术提高了点对点链路的分集度, 同时也降低了信道的波动因此降低了多用户分集增益。采用空时编码每天线等功率分配, 有用信号功率大于某一大值  $\gamma$  的概率为

$$p_{st} = \Pr\left(\frac{P\|\mathbf{h}_k\|^2}{N_t} > \gamma\right) = \Pr\left(\|\mathbf{h}_k\|^2 > \frac{N_t\gamma}{P}\right) \tag{60}$$

当不采用空时码时, 考虑只选择最好信道质量的天线传输信息的机会策略, 对应的概率为

$$\begin{aligned}
 p_{opp} &= \Pr\left(\max\{|h_{k,1}|^2, \dots, |h_{k,N_t}|^2\} \times P > \gamma\right) \\
 &= \Pr\left(\max\{|h_{k,1}|^2, \dots, |h_{k,N_t}|^2\} > \frac{\gamma}{P}\right)
 \end{aligned} \tag{61}$$

显然当  $h_{k,l}, l=1, \dots, N_t$  独立时有  $p_{opp} > p_{st}$ , 因此空时码降低了多用户分集增益。同样的,

在快衰落信道传输波束赋形虽然能够获得功率增益但也降低了多用户分集增益。

表 5-1. 三种传输端多天线技术比较

	机会波束赋形	空时编码	传输波束赋形
要求的信道知识	等效信道 SNR	CSIR	CSIT&CSIR
对慢衰落信道的影响	分集和功率增益	分集增益	分集和功率增益
对快衰落信道的影响	无影响	降低多用户分集增益	降低多用户分集增益 提高功率增益