Lecture 2-2 空间分集技术

2021-3-5

除了在时间维度，利用快变信道提供的独立衰落机会实现分集，还可以利用多天线信道中不同收发天线之间信道的独立性实现分集。空间分集一般分为发送空间分集和接收空间分集。

1. 接收分集

考虑单发多收的 SIMO 系统，其输入输出信号模型为

$$y_n = \sqrt{\rho} h_n x + w_n,\ n = 1,\dots,N_r \qquad (1)$$

其中 N_r 为接收天线数目，h_n 表示第 n 根接收天线和发送天线之间的信道增益。这里，假设 $h_n, n = 1,\dots,N_r$ 独立同分布。显然，同时间重复传输策略，该结构能获得发送分集增益 N_r。

2. 发送分集

2.1 重复传输

考虑多发单收的 MISO 系统，重复传输策略同样可以获得发送分集增益。信息符号 x 在 N_t 个符号时隙重复传输，并且第 n 个时隙仅第 n 根天线发送符号 x。其输入输出关系式为

$$y_n = \sqrt{\rho} h_{n,n} x + w_n,\ n = 1,\dots,N_t \qquad (2)$$

其中 N_t 为发送天线数目，同时也是重复传输时隙数，$h_{n,t}$ 表示第 t 时隙第 n 根接收天线和发送天线之间的信道增益。同样的，当 $h_{n,n}, n = 1,\dots,N_t$ 之间相互独立时，就能获得分集增益 N_t。

Remark 1：当信道是慢变的，即 $h_{n,1} = h_{n,2} = \cdots = h_{n,N_t}$ 时，只要天线间信道 $h_{n,1}, n = 1,\dots,N_t$ 是独立的，那么也能获得分集增益 N_t。同样的，当天线间信道是完全相关的，即 $h_{1,t} = h_{2,t} = \cdots = h_{N_t,t}$，只要信道是快变的，即 $h_{1,t}, t = 1,\dots,N_t$ 是独立的，那么也能获得分集增益 N_t。

2.2 Alamouti 结构

同时间分集，存在发送分集结构，相比重复传输能在保证相同分集增益的情况下获得额外的编码增益。Alamouti 结构是一种经典的 2 发 1 收 MISO 分集结构。其发送信号矩阵为

$$\mathbf{X}=\begin{pmatrix} x_1 & -x_2^* \\ x_2 & x_1^* \end{pmatrix}$$

其中，行表示天线，列表示时间，即第一个信道时隙两根天线发送信号分别为 x_1 和 x_2；第二个时隙两根天线发送信号分别为 $-x_2^*$ 和 x_1^*。两时隙接收信号为

$$\left(y_1\ y_2\right)=\sqrt{\frac{\rho}{2}}\left(h_1\ h_2\right)\begin{pmatrix} x_1 & -x_2^* \\ x_2 & x_1^* \end{pmatrix}+\left(w_1\ w_2\right) \tag{3}$$

其中，$h_n, n=1,2$ 表示第 n 根发送天线到接收天线的信道增益，并且假定在两个时隙保持不变。

经过代数变换后有

$$\mathbf{y}=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2^* \end{pmatrix}=\sqrt{\frac{\rho}{2}}\begin{pmatrix} h_1 & h_2 \\ h_2^* & -h_1^* \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2^* \end{pmatrix}=\sqrt{\frac{\rho}{2}}\mathbf{Hx}+\mathbf{w} \tag{4}$$

显然，$\mathbf{H}$ 具有列正交特性。采用简单的 MF 处理，有

$$\begin{aligned}\mathbf{r}=\mathbf{H}^H\mathbf{y}&=\sqrt{\frac{\rho}{2}}\begin{pmatrix} \|\mathbf{h}\|^2 & 0 \\ 0 & \|\mathbf{h}\|^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}+\mathbf{H}^H\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2^* \end{pmatrix} \\ &=\sqrt{\frac{\rho}{2}}\|\mathbf{h}\|^2\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}+\mathbf{w}'\end{aligned} \tag{5}$$

其中 $\|\mathbf{h}\|^2=|h_1|^2+|h_2|^2, \mathbf{w}'=\mathbf{H}^H\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2^* \end{pmatrix}\sim\mathcal{CN}\left(0,\|\mathbf{h}\|^2\mathbf{I}\right)$。从式（5）可知其可达分集度为 2。

作业 1：考虑 N_t=2 的 MISO。假设信息速率为 1bpcu （bits per channel using），重复传输采用 QPSK 调制，Alamouti 采用 BPSK 调制。试分析 Alamouti 结构相对重复传输的编码增益。

3、空时码一般设计准则

考虑 N_t 发 1 收的 MISO，T 个信道时隙上的发送信号矩阵（空时码矩阵）记为 $\mathbf{X}\in\mathbb{C}^{N_t\times T}$。进一步假定信道 $\mathbf{h}$ 在 T 个时隙保持不变。其输入输出关系为

$$\mathbf{y}^T=\sqrt{\rho}\mathbf{h}^T\mathbf{X}+\mathbf{w}^T \quad \text{or} \quad \mathbf{y}=\sqrt{\rho}\mathbf{X}^T\mathbf{h}+\mathbf{w} \tag{6}$$

假定发送信号矩阵 $\mathbf{X}$ 取自大小为 M 的码本 $\mathcal{X}$。则根据联合界技术，有

$$P_e = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} P\left(e\middle|\mathbf{X}_m\right) \le \frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}\sum_{m'\neq m} P\left(\mathbf{X}_m \to \mathbf{X}_{m'}\right) \tag{7}$$

这里 $\mathbf{X}_m \in \mathcal{X}$。同时间分集预编码设计推导，条件 PEP 为

$$P\left(\mathbf{X}_m \to \mathbf{X}_{m'}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{\rho}{2}\left\|\left(\mathbf{X}_m - \mathbf{X}_{m'}\right)^T \mathbf{h}\right\|^2}\right) \tag{8}$$

对信道求平均得到 PEP

$$\begin{aligned}
P\left(\mathbf{X}_m \to \mathbf{X}_{m'}\right) &= E_{\mathbf{h}}\left[Q\left(\sqrt{\frac{\rho}{2}\left\|\left(\mathbf{X}_m - \mathbf{X}_{m'}\right)^T \mathbf{h}\right\|^2}\right)\right] \\
&= E_{\mathbf{h}}\left[Q\left(\sqrt{\frac{\rho}{2}\mathbf{h}^H\left(\mathbf{X}_m - \mathbf{X}_{m'}\right)^{T,H}\left(\mathbf{X}_m - \mathbf{X}_{m'}\right)^T \mathbf{h}}\right)\right] \\
&= E_{\mathbf{h}}\left[Q\left(\sqrt{\frac{\rho}{2}\mathbf{h}^H\mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^H\mathbf{h}}\right)\right] = E_{\tilde{\mathbf{h}}}\left[Q\left(\sqrt{\frac{\rho}{2}\tilde{\mathbf{h}}^H\mathbf{\Lambda}\tilde{\mathbf{h}}}\right)\right] \\
&\le E_{\tilde{\mathbf{h}}}\left[\exp\left(-\frac{\rho}{4}\sum_{l=1}^{L_{m,m'}}\left|\tilde{h}_l\right|^2\lambda_l^2\right)\right] \\
&= \prod_{l=1}^{L_{m,m'}}\frac{1}{1+\frac{\rho}{4}\lambda_l^2}
\end{aligned} \tag{9}$$

其中，$\tilde{\mathbf{h}} = \mathbf{U}^H\mathbf{h} \sim \mathcal{CN}\left(0,\mathbf{I}\right)$，$L_{m,m'} = rank\left(\mathbf{X}_m - \mathbf{X}_{m'}\right)$，$\mathbf{\Lambda} = diag\left\{\lambda_1,\ldots,\lambda_{L_{m,m'}}\right\}$。在高 SNR 时，近似为

$$P\left(\mathbf{X}_m \to \mathbf{X}_{m'}\right) \le \left(\frac{\rho}{4}\right)^{-L_{m,m'}}\left(\prod_{l=1}^{L_{m,m'}}\lambda_l^2\right)^{-1} \tag{10}$$

同时间分集预编码设计推导，当 $L_{m,m'} = L, \forall m \neq m'$，有

$$P_e \le \left(M-1\right)\left(\frac{\rho}{4}\right)^{-L}\left(\min_{m,m'}\delta_{m,m'}\right)^{-1} \tag{11}$$

其中 $\delta_{m,m'} \triangleq \prod_{l=1}^{L}\lambda_l^2 = \left|\left(\mathbf{X}_m - \mathbf{X}_{m'}\right)\left(\mathbf{X}_m - \mathbf{X}_{m'}\right)^H\right|$ 为码字差矩阵的 Gram 矩阵的行列式。

空时码本 $\mathcal{X}$ 的设计准则：为了获得满发送分集增益 $L=N_t$，要求 1）$T \ge N_t$；2）任意码字差矩阵必须满秩。同时为了获得更高的编码增益，要求码字差矩阵的 Gram 矩阵行列式的最小值最大化，称为行列式准则。

作业 2：推导 N_t 发 N_r 收 MIMO 信道上空时码的 PEP，并给出其设计准则。

作业 3: 在上述推导中，假定 $\mathbf{h} \sim \mathcal{CN}\left(0, \mathbf{I}\right)$。考虑一般的相关信道模型 $\mathbf{h} \sim \mathcal{CN}\left(0, \mathbf{C}_h\right)$，重新推导空时码的设计准则。

4、2 发 2 收 MIMO 不同结构比较分析

表 2-1 给出了 2 发 2 收 MIMO 系统不同收发机结构的分集增益和每符号时间的自由度。

表 2-1. 2 发 2 收 MIMO 系统不同收发机结构的分集增益和每符号时间自由度。

	分集增益	每符号时间自由度
重复传输	4	1/2
Alamouti 结构	4	1
V-BLAST （ML）	2	2
V-BLAST （nulling）	1	2
信道本身	4	2

首先，2 发 2 收 MIMO 重复传输的信号模型为

$$\begin{pmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{y}_2 \end{pmatrix} = \sqrt{\rho} \begin{pmatrix} \mathbf{h}_{1,1} \\ \mathbf{h}_{2,2} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} \mathbf{w}_1 \\ \mathbf{w}_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^4 \tag{12}$$

第 n，n=1,2，个时隙的接收信号 $\mathbf{y}_n$ 是二维向量，信道 $\mathbf{h}_{n,n}$ 表示第 n 时隙第 n 根发送天线到两根接收天线的信道增益矢量。假设 $\mathbf{h}_{n,n}$ 中两个元素独立，并且信道是快变的即 $\mathbf{h}_{1,1}$ 与 $\mathbf{h}_{2,2}$ 也独立，则相同符号 x 出现在 4 个接收符号中，并且每个接收符号都包含 x 的独立衰落实现，因此接收端采用 MF 可获得的分集度为 4。此外，考虑两个时刻的无噪接收信号 $\sqrt{\rho}\begin{pmatrix} \mathbf{h}_{1,1} \\ \mathbf{h}_{2,2} \end{pmatrix} x$，其仅包含一个自由变量。因此，两个符号时刻利用了 1 个自由度，平均每个符号时刻的自由度为 1/2。

其次，考察 2 发 2 收 Alamouti 结构，其信号模型为

$$\begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix} = \sqrt{\rho} \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & -x_2^* \\ x_2 & x_1^* \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{pmatrix} \tag{13}$$

经过代数变换后为

$$\begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{12}^* \\ y_{21} \\ y_{22}^* \end{pmatrix} = \sqrt{\rho} \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{12}^* & -h_{11}^* \\ h_{21} & h_{22} \\ h_{22}^* & -h_{21}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_{11} \\ w_{12}^* \\ w_{21} \\ w_{22}^* \end{pmatrix} = \sqrt{\rho}\mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{w} \tag{14}$$

显然，等效信道 **H** 具有列正交特性。采用简单的 MF 处理，有与式（5）相同的表达式，

$$\mathbf{r} = \mathbf{H}^H \mathbf{y} = \sqrt{\rho}\|\mathbf{h}\|^2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \mathbf{w}' \tag{15}$$

其中$\|\mathbf{h}\|^2 = |h_{11}|^2 + |h_{12}|^2 + |h_{21}|^2 + |h_{22}|^2$。显然其可达分集度为 4。进一步从式（15），其两个时隙无噪噪声信号是 4 维空间的 2 维子空间，因此自由度为 2。平均每符号时间自由度为 1。

在 VBLAST 结构中，每时隙每根天线发送独立符号。因此信号模型为

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \sqrt{\rho} \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \tag{16}$$

从上式，无噪接收信号的自由度为 2。

采用 ML 检测，由作业 2，其 PEP 为

$$P\left(\mathbf{x}_m \to \mathbf{x}_{m'}\right) \le \left(\prod_{l=1}^{2} \frac{1}{1 + \frac{\rho}{4}\lambda_l^2} \right)^2 \approx \frac{16}{\rho^2 \|\mathbf{x}_m - \mathbf{x}_{m'}\|^4} \tag{17}$$

因此，其可达分集度为 2。

采用 Nulling 检测，首先（16）重写为

$$\mathbf{y} = \sqrt{\rho}\left(\mathbf{h}_1 x_1 + \mathbf{h}_2 x_2\right) + \mathbf{w} \tag{18}$$

其中$\mathbf{h}_1 = \left[h_{11}, h_{21}\right]^T, \mathbf{h}_2 = \left[h_{12}, h_{22}\right]^T$考虑信号 x_1 的检测，在等式两边乘以向量

$$\mathbf{v}_1^T = \frac{1}{\|\mathbf{h}_2\|}\left[h_{22}, -h_{12}\right]$$

有

$$\tilde{\mathbf{y}}_1 = \sqrt{\rho}\left(\mathbf{v}_1^T\mathbf{h}_1 x_1 + \mathbf{v}_1^T\mathbf{h}_2 x_2\right) + \mathbf{v}_1^T\mathbf{w} = \sqrt{\rho}\mathbf{v}_1^T\mathbf{h}_1 x_1 + \mathbf{w}'_1 \tag{19}$$

注意到上式是一个等价的 SISO 衰落信道，且 $\mathbf{v}_1^T\mathbf{h}_1 \sim \mathcal{CN}\left(0,1\right)$，因此 x_1 的分集度为 1。同样的 x_2 的分集度也为 1。

最后，考察信道本身的自由度和每符号时刻的可利用自由度。由式（16），当四个独立信道衰落能提供的最大分集度为 4，无噪接收信号的自由度为 2。