第三章

3.1 节

3.1-1

a. $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$

b. $\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$

c. $\{2,3,5,7,11,13,17,19\}$

3.1-2

a. $\{x|ax+b=0 \wedge a\neq 0 \wedge a\in R \wedge b\in R\}$

b. $\{(x,y)|x^2+y^2=1 \wedge x\in R \wedge y\in R\}$

c. $\{x|(x=3n \vee x=7n) \wedge n\in Z^+\}$

3.1-3

$A=\{1\}$ $B=\{1,\{1\}\}$ $C=\{1,\{1,\{1\}\}\}$

3.1-4

证明：

a. 正确

因为$B\subseteq C$, 所以对于$\forall x\in B$，$x\in C$, 又$A\in B$, 所以$A\in C$。

b. 不正确

由 a 得，该命题不正确。

c. 不正确

设$A=\{1\}, B=\{1,\{1\}\}, C=\{\{1,\{1\}\}\}$,

$A\subseteq B, B\in C$, 而$A\notin C$, 所以该命题不正确。

d. 不正确

同 c。

e. 不正确

设$A=\{1\}, B=\{1,\{1\}\}, C=\{\{1\}\}$,

$A\in B, B\not\subset C$, 而$A\in C$， 所以该命题不正确。

f. 不正确

设$A=\{1\}, B=\{1,\{1\}\}, C=\{\{1\},\{1,\{1\}\}\}$,

$A\subseteq B, B\in C$, 而$A\in C$， 所以该命题不正确。

3.1-5

a. 不正确

b. 正确

c. 不正确

d. 正确

e. 正确

f. 不正确

3.1-6

a. $\rho(A)=\left\{\emptyset,\{\emptyset\},\{a\},\{\{b\}\},\{\emptyset,a\},\{\emptyset,\{b\}\},\{a,\{b\}\},\{\emptyset,a,\{b\}\}\right\}, |\rho(A)|=8$

b. $\rho(A)=\left\{\emptyset,\{\{a,\{b\}\}\}\right\}, |\rho(A)|=2$

c. $\rho(A) = \{\emptyset\}, |\rho(A)| = 1$

3.1-7

他自己给自己刮脸。悖论：假如他自己不给自己刮脸，那么他就要给他自己刮脸。但他说他仅给村子里不给自己刮脸的人刮脸。这与他给他自己刮脸相矛盾。

3.1-8

a. 如果$S \in S$，同时 S 应该是一个不以自身为元素的集合，即$S \notin S$，矛盾。

b. 如果$S \notin S$，那么 S 满足 S 中元素的形式定义$A \notin A$，这样就有$S \in S$，矛盾。

3.1-9

(a)(e)

3.1-10

$$\{\emptyset\}, \{C\}, \{C++\}, \{PASCAL\}, \{Ada\}, \{C, C++\}, \{C, PASCAL\}, \{C, Ada\}, \{C++, PASCAL\}, \{C++, Ada\},$$
$$\{PASCAL, Ada\}, \{C, C++, PASCAL\}, \{C, C++, Ada\}, \{C, PASCAL, Ada\}, \{C++, PASCAL, Ada\},$$
$$\{C, C++, PASCAL, Ada\}.$$

3.1-11

a. $\{a, b, c, d, e, f, g\}$

b. $\{1,2,4,5\}$

c. $\{x | x \neq 0(mod3), x \in N\}$

3.2 节

3.2-1

a. $\{0,1,2,3,6,7,8,9\}$

b. $\{2,3\}$

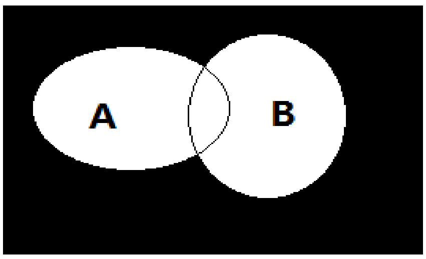
c. $\{0,1,3,4,5,7,9\}$

d. $\{2,6,8\}$

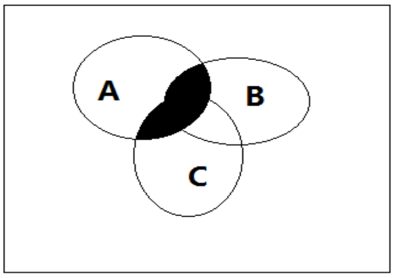
e. $\{2,3\}$

3.2-2

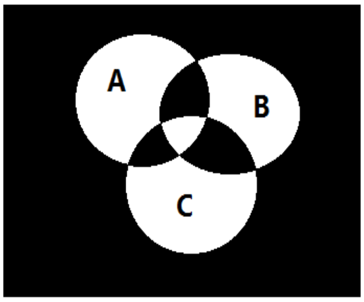
a.



b.



c.



3.2-3

a. $B \cap C - A$

b. $(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C) - (A \cap B \cap C)$

c. $\overline{A \cup B \cup C} \cup (A \cap B \cap C)$

3.2-4

a. 不正确

设$A = \{1,2\}, B = \{1,2\}, C = \{1\}$,

$A \cup B = A \cup C$,而 $B \neq C$。

b. 不正确

设$A = \{1\}, B = \{1,2\}, C = \{1,3\}$,

$A \cap B = A \cap C$,而$B \neq C$。

3.2-5

证明：

a. $A \subseteq B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \to x \in B) \Leftrightarrow (\forall x)(x \notin B \to x \notin A) \Leftrightarrow (\forall x)(x \in \bar{B} \to x \in \bar{A})$

$\Leftrightarrow \bar{B} \subseteq \bar{A}$

$A \subseteq B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \to x \in B)$ $\therefore A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\} = \{x | x \in B\} = B$

同理得，$A \cup B = B \Rightarrow A \subseteq B$ ，$\therefore A \cup B = B \Leftrightarrow A \subseteq B$

$A \subseteq B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \to x \in B)$ $\therefore A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\} = \{x | x \in A\} = A$

同理得，$A \cap B = A \Rightarrow A \subseteq B$，$\therefore A \cap B = A \Leftrightarrow A \subseteq B$

b. $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow (\forall x)((x \in A \to x \notin B) \wedge (x \in B \to x \notin A)) \Leftrightarrow (\forall x)((x \in A \to x \in \bar{B}) \wedge (x \in B \to x \in \bar{A})) \Leftrightarrow A \subseteq \bar{B} \wedge B \subseteq \bar{A}$

又 $A \subseteq \bar{B} \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \to x \in \bar{B}) \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \to x \notin B) \Leftrightarrow (\forall x)(x \in B \to x \notin A) \Leftrightarrow (\forall x)(x \in B \to x \in \bar{A}) \Leftrightarrow B \subseteq \bar{A}$

$$\therefore A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow A \subseteq \bar{B} \Leftrightarrow B \subseteq \bar{A}$$

c. $A \cup B = U \Leftrightarrow (\forall x)(x \notin A \to x \in B) \Leftrightarrow \bar{A} \subseteq B$，

同理得，$A \cup B = U \Leftrightarrow \bar{B} \subseteq A, \therefore A \cup B = U \Leftrightarrow \bar{A} \subseteq B \Leftrightarrow \bar{B} \subseteq A$。

d. $A = B \Rightarrow A \oplus B = \{x|(x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A)\} =$
$\{x|(x \in A \wedge x \notin A) \vee (x \in B \wedge x \notin B)\} = \emptyset$

$A \oplus B = \emptyset \Rightarrow \{x|(x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A)\} = \emptyset \Rightarrow \{x|(x \in A \wedge x \notin B)\} = \emptyset$ *且* $\{x|(x \in B \wedge x \notin A)\} = \emptyset \Rightarrow (\forall x)\big((x \in A \to x \in B) \wedge (x \in B \to x \in A)\big)$
$\Rightarrow A = B$

$$\therefore A = B \Leftrightarrow A \oplus B = \emptyset$$

3.2-6
证明：

a. $A = B$

设$A = B$，则$A \cap B = A = A \cup B$；

设$A \cap B = A \cup B$，则$A \subseteq A \cap B, B \subseteq A \cap B$, 所以$A \subseteq B, B \subseteq A$, 所以$A = B$。

b. $A = B = \emptyset$

设$A = B = \emptyset$, 则$A - B = \emptyset = B$；
设$A - B = B$, 即$\{x|x \in A \wedge x \notin B\} = \{x|x \in B\}$
若$B \neq \emptyset, (\forall x)(x \in A \wedge x \notin B) = (\forall x)(x \in B)$显然不成立，所以$B \neq \emptyset$，
则 $A - B = \{x|x \in A \wedge x \in \bar{B}\} = \{x|x \in A \wedge x \in U\} = \{x|x \in A\} = B = \emptyset$，即$A = B = \emptyset$。

c. $A \subseteq \bar{B} \cup \bar{C}$

$$(A - B) \cup (A - C) = (A \cap \bar{B}) \cup (A \cap \bar{C}) = A \cap (\bar{B} \cup \bar{C})$$

所以$(A - B) \cup (A - C) = A \Leftrightarrow A \cap (\bar{B} \cup \bar{C}) = A \Leftrightarrow A \subseteq \bar{B} \cup \bar{C}$

d. $A \cap (\bar{B} \cup \bar{C}) = \emptyset$

由 c 得，$(A - B) \cup (A - C) = \emptyset \Leftrightarrow A \cap (\bar{B} \cup \bar{C}) = \emptyset$

e. $A \subseteq \bar{B} \cap \bar{C}$

$$(A - B) \cap (A - C) = (A \cap \bar{B}) \cap (A \cap \bar{C}) = A \cap \bar{B} \cap \bar{C}$$

所以$(A-B)\cap(A-C)=A \Leftrightarrow A\cap\bar{B}\cap\bar{C}=A \Leftrightarrow A\subseteq\bar{B}\cap\bar{C}$

f. $A\cap\bar{B}\cap\bar{C}=\emptyset$

由 *e* 得，$(A-B)\cap(A-C)=\emptyset \Leftrightarrow A\cap\bar{B}\cap\bar{C}=\emptyset$

3.2-7

证明：

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)=(A\cap B)\cup C$$

所以$A\cap C=C, C\subseteq A$

3.2-8

$$A=\emptyset$$

证明：

设$A\oplus B=B$

$$A\oplus B=B \Rightarrow (A\cup B)\cap(\overline{A\cap B})=B \Rightarrow \left((A\cup B)\cap(\overline{A\cap B})\right)\cup$$

$(A\cap B)=B\cup(A\cap B) \Rightarrow (A\cup B)\cup(A\cap B)=B\cup(A\cap B) \Rightarrow A\cup B=B \Rightarrow A\subseteq B$

由$A\subseteq B$，$(A\cup B)\cap(\overline{A\cap B})=B \Leftrightarrow B\cap\bar{A}=B \Leftrightarrow B\subseteq\bar{A} \Leftrightarrow A\subseteq\bar{B}$

由$A\subseteq B$，$A\subseteq\bar{B}$得，$A=\emptyset$。

设$A=\emptyset$,则$A\oplus B=(A\cup B)\cap(\overline{A\cap B})=B\cap U=B$

得证。

3.2-9

a. $\{x|x\neq -1 \text{ 且} x\neq 1, x\in R\}$

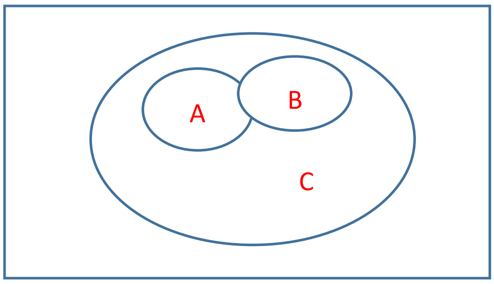
b. $\{x|x\neq 0 \text{ 且} x\neq 1 \text{ 且} x\neq -2, x\in R\}$

c. $\{x|x\neq 1, x\in R\}$

d. $\{x|x\neq -2 \text{ 且} x\neq -1 \text{ 且} x\neq 1 \text{ 且} x\neq 0, x\in R\}$

3.2-10

a.



b. $A\cup B$

c. $A\subseteq C, B\subseteq C, \therefore (\forall x)(x\in A\rightarrow x\in C)$且$(\forall x)(x\in B\rightarrow x\in C)$，即$(\forall x)(x\in A\vee x\in B\rightarrow x\in C)$,即$A\cup B\subseteq C$。

3.3 节

3.3-1

设 A 表示会 C 语言的人的集合，B 表示会 Java 的人的集和，C 表示会 Perl 语言的人的集合

$|A\cup B\cup C|=50$ 且$|A\cup B\cup C|$

$$=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|$$

$$|A|=40,|B|=35,|C|=10,|A\cap B\cap C|=5$$

所以$|A\cap B|+|A\cap C|+|B\cap C|=-50+40+35+10+5=40$

会两门及以上的人数为：

$$|(A\cap B)\cup(A\cap C)\cup(B\cap C)|=|A\cap B|+|A\cap C|+|B\cap C|-2|A\cap B\cap C|$$
$$=40-2*5=30$$

只会两门的人数为：

$$|(A\cap B)\cup(A\cap C)\cup(B\cap C)|-|A\cap B\cap C|=30-5=25$$

3.3-2

设 A,B,C 分别表示能被 2、3、7 整除的整数的集合，则有

$$|A\cup B\cup C|=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|$$
$$=125+83+35-41-17-11+5=179$$

所以能被 2、3、7 至少一个数整除数的个数为 179。

3.3-3

设 A,B,C 分别表示定杂志甲乙丙的同学集合，则有

$a.$ $|A\cap B\cap C|=-(|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|)+|A\cup B\cup C|=-(25+26+26-11-9-8)+52=3$

$b.$ 订了两本及以上的人：

$|(A\cap B)\cup(A\cap C)\cup(B\cap C)|=|A\cap B|+|A\cap C|+|B\cap C|-2|A\cap B\cap C|=11+9+8-2*3=22$

只订一种杂志的学生人数：

$$|A\cup B\cup C|-|(A\cap B)\cup(A\cap C)\cup(B\cap C)|=52-22=30$$

3.3-4

设 A,B,C 分别表示会 C, java, C++的人的集合，则有

$$|A\cup B\cup C|=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|$$

其中，$|A|=14,|B|=12,|C|=6,|A\cap B|=6,|A\cap C|=5,|A\cap B\cap C|=2$

$$|A\cup B\cup C|=14+12+6-6-5-|B\cap C|+2=23-|B\cap C|$$

由或用 C++编程的共六人且他们均会另一种语言和 5 人既会用 C++又会用 C 编程，得$|B\cap C|=6-5+|A\cap B\cap C|=3$

$$|A\cup B\cup C|=23-3=20$$

三种都不会的人数为

$$25-|A\cup B\cup C|=25-20=5$$

3.3-5

设 A,B,C 分别表示选修 formal logic, operating systems, compiler construction principles 的学生的集合，则有

$$|A\cup B\cup C|=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|$$
$$=64+94+58-26-28-22+14=154$$

a. 所有课都没选的学生人数为

$260-|A\cup B\cup C|=106$

b. 选两门及以上的学生人数为：

$|(A\cap B)\cup(A\cap C)\cup(B\cap C)|=|A\cap B|+|A\cap C|+|B\cap C|-2|A\cap B\cap C|=26+28+22-2*14=48$

只选一门的学生人数为

$|A\cup B\cup C|-|(A\cap B)\cup(A\cap C)\cup(B\cap C)|=154-48=106$

3.4 节

3.4-1

a. 设 R 表示所有有限长度二进制数的集合，则其归纳证明如下：

(1)如果$a\in\{0,1\}$,那么$a\in R$。

(2)如果$a,b\in R$,那么$ab\in R$。

(3) R 仅包含能由有限次应用（1）（2）构成的元素。

b. 设 R 表示以 a 开头的有限长度的英文字母串组成的集合，D 为英文字母串集合，则其归纳证明如下：

(1)$a\in R$。

(2)若$x\in R,y\in D$,则$xy\in R$。

(3) R 仅包含能由有限次应用（1）（2）构成的元素。

C. 设 R 表示所有不能被 3 整除的正整数组成的集合，则其归纳证明如下：

(1)$1\in R,2\in R$。

(2)若$a\in R$,则$a+3\in R$。

(3) R 仅包含能由有限次应用（1）（2）构成的元素。

3.4-2

证明：当$\mathrm{n}=1$时，$\neg A_1\Leftrightarrow\neg A_1$

假设当$\mathrm{n}=\mathrm{k}$时，$\neg(A_1\vee A_2\vee\cdots\vee A_k)\Leftrightarrow(\neg A_1\wedge\neg A_2\wedge\cdots\wedge\neg A_k)$

当$\mathrm{n}=\mathrm{k}+1$时，

$\neg(A_1\vee A_2\vee\cdots\vee A_k\vee A_{k+1})\Leftrightarrow\neg(A_1\wedge A_2\wedge\cdots\wedge A_k)\wedge\neg A_{k+1}\Leftrightarrow(\neg A_1\wedge\neg A_2\wedge\cdots\wedge\neg A_k)\wedge\neg A_{k+1}\Leftrightarrow(\neg A_1\wedge\neg A_2\wedge\cdots\wedge\neg A_k\wedge\neg A_{k+1})$

即当 $n=k+1$ 时也成立。所以

$\neg(A_1\vee A_2\vee\cdots\vee A_n)\Leftrightarrow(\neg A_1\wedge\neg A_2\wedge\cdots\wedge\neg A_n)$

3.4-3

证明：当$n=1$时，$1*2=2=1*2*3/3$

假设当$n=k$时，$1*2+2*3+\cdots+k(k+1)=k(k+1)(k+2)/3$

当 $n=k+1$ 时 ， $1*2+2*3+\cdots+k(k+1)+(k+1)(k+2)=\frac{k(k+1)(k+2)}{3}+(k+1)(k+2)=\frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}$

即当$n=k+1$时也成立。所以

当 n 为正整数时有$1*2+2*3+\cdots+n(n+1)=n(n+1)(n+2)/3$。

3.4-4

证明：当$n=1$时，$2^n*2^n-1=2*2-1=3$，能被 3 整除

假设当$n = k$时，$2^n * 2^n - 1$能被 3 整除，即$2^k * 2^k - 1 = 3a$，$a \in N^+$

当 $n = k + 1$ 时，$2^{k+1} * 2^{k+1} - 1 = 4 * 2^k * 2^k - 1 = 4(3a + 1) - 1 = 12a + 3$，能被 3 整除

即当$n = k + 1$时也成立。所以

对所有正整数 n 均有$2^n * 2^n - 1$能被 3 整除。

3.4-5

证明：即要证明$n = 2p + 5q(n \geq 4,$其中p, q为自然数$)$。

(1) 4=2*2, 5=5*1, 6=2*3。

(2)假设$n < k$, 且$n - 2 \geq 4$时，有

$$n = 2p + 5q(p, q\text{为自然数})。$$

现证$n = k$时，上式亦成立。

由假设$k - 2 < k$, 且$k - 2 \geq 4$,

所以$(k - 2) = 2p + 5q$

所以$k = 2(p + 1) + 5q$

因此$n = k$时，也成立。证毕。

3.4-6

可以构成 5、6、10、11、12、15、16、17、18、

20 及以上。

证明：当$n < 20$时，显然易证

又 20=5*4，21=5*3+6，22=5*2+6*2，23=5+6*3，24=6*4, 25=5*5。

假设$n < k$, 且$\mathrm{n} - 5 \geq 20$时，有

$n = 5p + 6q(p, q$为自然数$)$。

现证$n = k$时，上式亦成立。

由假设$k - 5 < k$, 且$k - 5 \geq 20$，

所以$k - 5 = 5p + 6q$

所以$k = 5(p + 1) + 6q$

因此$n = k$时，也成立。证毕。

3.4-7

证明：当$i = 0$时，$c = 0$。

假设当$i = k$时成立，则$c = k * k$。

当$i = k + 1$时，$c = k * k + k + (k + 1) = (k + 1) * (k + 1)$

即当$n = k + 1$时也成立。证毕。

3.4-8

无效。

因为*(a)*和*(b)*都为成对证明，所以*(c)*应该改为证明 *p(n+1)*和 *p(n+2)*都为真。

3.4-9

当$n = 2$时前一匹马和自己的颜色一样，后一匹马和自己的颜色一样，无法推出这两匹马的颜色相同，因为将 *n* 规模分解成若干个 *n-1* 规模的问题时，如果分解方法并不是对所有的 *n* 都成立，那么数学归纳法将失效，即无法推出这 *k+1* 匹马

的颜色相同。

3.4-10

证明：当$n = 7$时，$3^n = 729, 7! = 5040$。

假设当$n = k$时，不等式成立，即$3^k < k!$。

当$n = k + 1$时，$3^{k+1} = 3 * 3^k < 3 * k!$
因为$k \geq 7$,所以$3^{k+1} < 3 * k! < (k + 1) * k! = (k + 1)!$
即当$n = k + 1$时也成立。所以
当$n > 6$时，$3^n < n!$。

3.4-11

n 块需要掰 *n-1* 次。

证明：当$n = 1$时，需要掰 0 次。

假设当$n = k$时，需要掰 *n-1* 次。

当$n = k + 1$时，由假设得，掰了 *n-1* 次后还剩下一个小矩形巧克力块，它由两个小正方形组成，所以只需再掰一次，即一共需要掰 *n* 次。

即当$n = k + 1$时也成立。得证。

3.5 节

3.5-1

$$A \times B = \{\langle 0,1\rangle, \langle 0,2\rangle, \langle 1,1\rangle, \langle 1,2\rangle\}$$
$$A \times \{1\} \times B = \{\langle 0,1,1\rangle, \langle 0,1,2\rangle, \langle 1,1,1,\rangle, \langle 1,1,2\rangle\}$$
$$A \times A \times B = \{\langle 0,0,1\rangle, \langle 0,0,2\rangle, \langle 0,1,1\rangle, \langle 0,1,2\rangle, \langle 1,0,1\rangle, \langle 1,0,2\rangle, \langle 1,1,1\rangle, \langle 1,1,2\rangle\}$$
$$A \times B \times B = \{\langle 0,1,1\rangle, \langle 0,1,2\rangle, \langle 0,2,1\rangle, \langle 0,2,2\rangle, \langle 1,1,1,\rangle, \langle 1,1,2\rangle, \langle 1,2,1\rangle, \langle 1,2,2\rangle\}$$

3.5-2

$$\rho(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$$
$$A \times \rho(A) = \{\langle a, \emptyset\rangle, \langle a, \{a\}\rangle, \langle a, \{b\}\rangle, \langle a, \{a, b\}\rangle, \langle b, \emptyset\rangle, \langle b, \{a\}\rangle, \langle b, \{b\}\rangle, \langle b, \{a, b\}\rangle\}$$

3.5-3

$A \times B$表示所有计算机院教授教授计算机系所开设课程的集合。

3.5-4

因为$A \subseteq B$, 所以$\{\langle a, c\rangle | a \in A, c \in C\} \subseteq \{\langle b, c\rangle | b \in B, c \in C\}$。

因为$C \subseteq D$, 所以$\{\langle b, c\rangle | b \in B, c \in C\} \subseteq \{\langle b, d\rangle | b \in B, d \in D\}$。

所以$\{\langle a, c\rangle | a \in A, c \in C\} \subseteq \{\langle b, d\rangle | b \in B, d \in D\}$,

即$A \times C \subseteq B \times D$。

3.5-5

设$A = \{sedan, coupe, van\}, B = \{gas, diesel\}$。

所有可能的汽车模型即为

$A \times B$

$= \{\langle sedan, gas\rangle, \langle sedan, diesel\rangle, \langle coupe, gas\rangle, \langle coupe, diesel\rangle, \langle van, gas\rangle, \langle van, siesel\rangle\}$。

3.5-6

假设 a,b 为平面坐标。

a. $A \times B$表示$-2 \leq x \leq 3$ 和 $1 \leq y \leq 5$所构成的平面图形。

b. $B \times A$表示$1 \leq x \leq 5$ 和 $-2 \leq y \leq 3$所构成的平面图形。