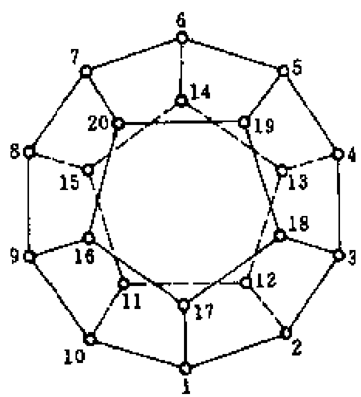
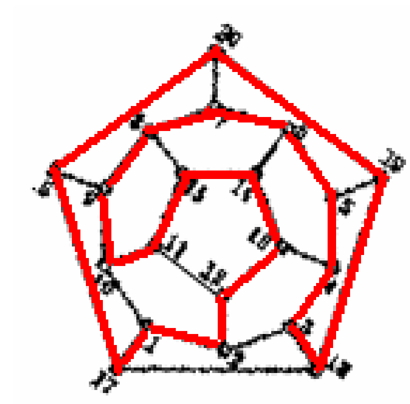
第四篇　图论

第6章　图论

§6.4.2 汉密尔顿图

1859年爱尔兰数学家威廉·汉密尔顿（Willian Hamilton）爵士在给他的朋友的一封信中，首先谈到一个称为“周游世界”的数学游戏。他将正十二面体的20个结点均标上重要城市的名称，希望能够沿着正十二面体的棱行走，找到一个遍历每个城市恰一次的周游。





如果我们将正十二面体的结点和边画在一个平面，如图所示，“周游世界”游戏相当于在图中找到一条经过每个结点一次且仅一次的回路，（a）所示。这个问题是有解的，见图（b）的粗线所示。

§6.4.2 汉密尔顿图

汉密尔顿路径

经过图 G=<V, E>中的每个结点一次且仅一次的路径。

汉密尔顿回路

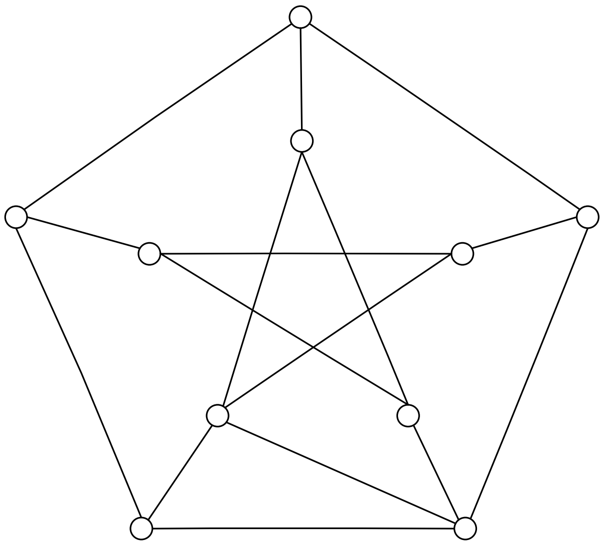
经过图 G=<V, E>中的每个结点一次且仅一次的回路。

汉密尔顿图

含哈密尔顿回路的图。

§6.4.2 汉密尔顿图

【例题】判断下图是否为哈密尔顿图，如果是，请写出一条哈密尔顿回路，否则证明其不是哈密尔顿图。



解答：该图是哈密尔顿图，哈密尔顿回路为：chfigjdeabc。

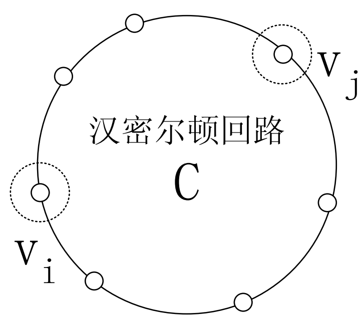
§6.4.2 汉密尔顿图

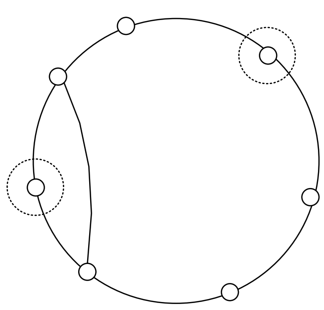
以下是哈密尔顿图的一个必要条件:

❋『定理』若图 G=<V, E>是哈密尔顿图，则对于结点集 V 的每个非空子集 S 均满足:

$$\omega(G\text{-}S) \leq |S|$$

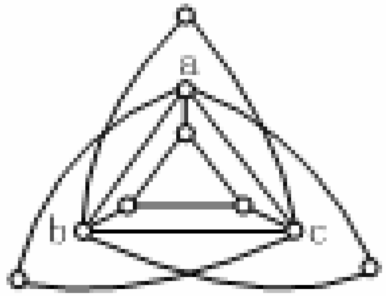
其中，|S|表示 S 中的结点数，ω(G-S)表示 G 删除 S 中所有结点后得到的连通分支个数。



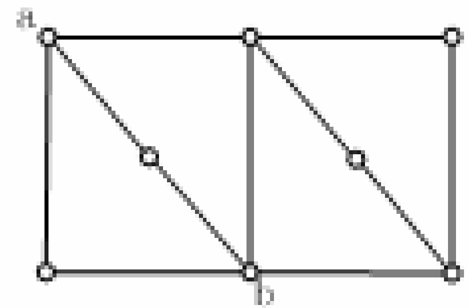


§6.4.2 汉密尔顿图

【例题】判断下列图（a）（b）所示的图是不是哈密尔顿图。

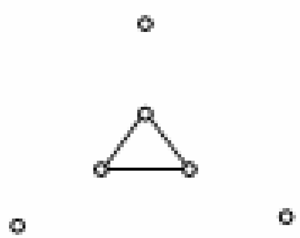


(a)

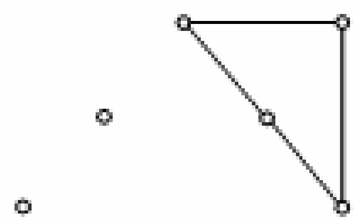


(b)

解答:



(a)



(b)

§6.4.2 汉密尔顿图

奥尔（Ore）1960 年建立了哈密尔顿图的以下充分条件：

✱『定理』设 G=<V, E>是含有 n（n≥3）个结点的简单无向图，如果 G 中的每一对结点的度数之和都大于等于 n-1，则 G 中存在哈密尔顿路径。

§6.4.2 汉密尔顿图

证明 （1）首先，**证明G是连通的**（反证法）。

假设G中存在两个或更多个互不连通的分支。设G中的结点vi和vj分别属于两个不同的连通分支G1和G2，其中G1和G2分别有n1和n2个结点。

显然，$n1<n$且$n2<n$，于是有$deg(vi) \leqslant n1-1$且$deg(vj) \leqslant n2-1$，则$deg(vi)+deg(vj) \leqslant n1+n2-2=n-2$。

这与已知题设矛盾，假设错误，G是连通的。

§6.4.2 汉密尔顿图

（2）其次，证明G中有汉密尔顿路。

在G中找到一条长度为$p-1(0<p<n)$的基本路径（通路），如图所示，则该基本路径中含p个结点，设这些结点为：v_1，v_2,…，v_p。

我们扩充这条基本路径：

（a）如果v_1或v_p还邻接于不在这条路径上的某个结点，则可立即延伸这条路以包含该结点，得p条边，p+1个结点的基本路径。

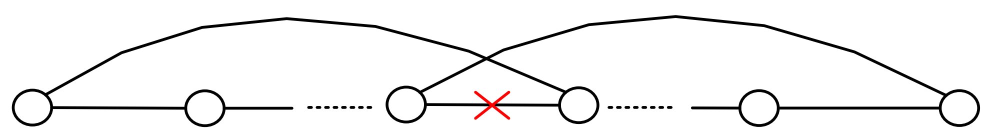
（b）如果v_1和v_p均只与该基本路径中的结点邻接，那么接下来我们证明"存在一条包含结点v_1，v_2,…，v_p的基本回路（圈）"。

§6.4.2 汉密尔顿图

(i) 如果v_1与v_p邻接，则得到一条包含结点v_1, v_2,⋯, v_p的基本回路。

(ii) 如果v_1与v_p不邻接。不妨设v_1邻接于v_{i1}, v_{i2}, ⋯, v_{ik}($2 \leqslant i_k \leqslant p-1$)这k个结点（$k \leqslant p-2$），则$v_p$至少与$v_{i1-1}$, v_{i2-1}, ⋯, v_{ik-1}中之一邻接。

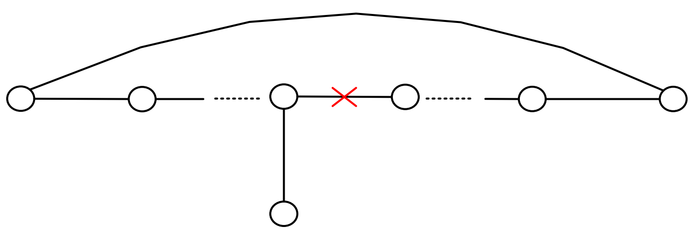
若不然，则v_p至多与p-k-1个结点（除v_{i1-1}, v_{i2-1}, ⋯, v_{ik-1}外还包含v_p自身）邻接。因而$\deg(v_1)+\deg(v_p) \leqslant p-k-1+k=p-1 \leqslant n-2$，这与已知题设矛盾。



设v1与vit 邻接且vp与vit-1邻接，如图所示可以得到基本回路(v1, v2,⋯, vit-1, vp, vp-1,⋯, vit, v1)。

§6.4.2 汉密尔顿图

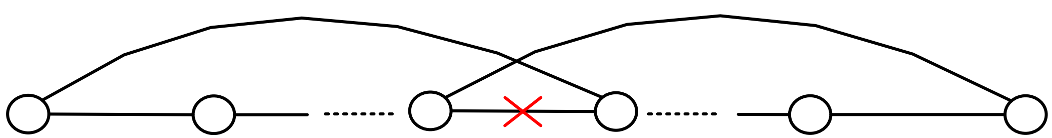
由于G是连通的，在该回路之外至少还有其它结点与回路中的结点邻接。我们可以用如图所示的方法将该结点引入到基本路径中来，从而得到一条长度为p的基本路径。



重复上述过程，直到得到一条包含图中所有n个结点的基本路径。

§6.4.2 汉密尔顿图

✱『推论』设G是具有n个结点的简单图，如果G中每一对结点的度数之和大于等于n，则G中存在一条哈密尔顿回路。

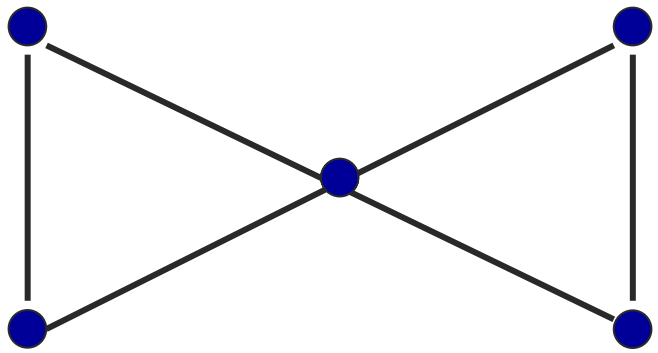


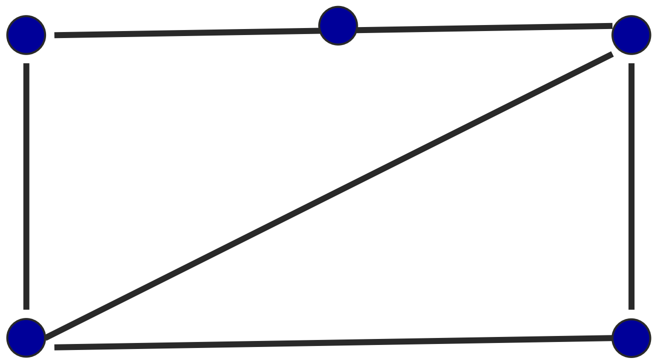
§6.4.2 汉密尔顿图

【习题】分别画出满足以下要求的含有5个结点的连通无向图G：

（a）G是欧拉图但非哈密尔顿图；

（b）G是哈密尔顿图但非欧拉图；



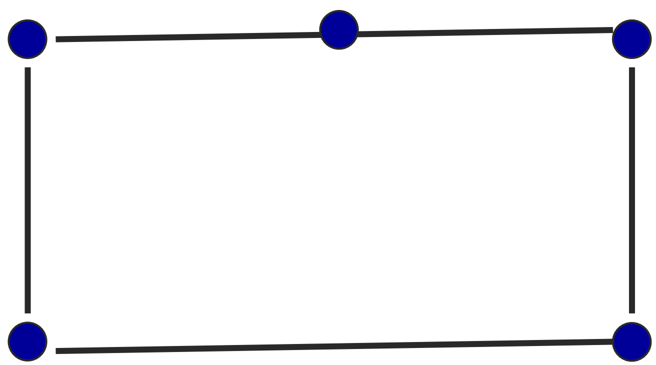


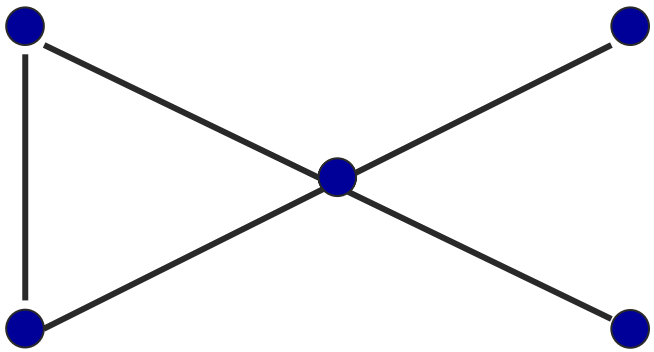
§6.4.2 汉密尔顿图

【习题】分别画出满足以下要求的含有5个结点的连通无向图G：

（c）G既是哈密尔顿图又是欧拉图；

（d）G既非哈密尔顿图又非欧拉图。

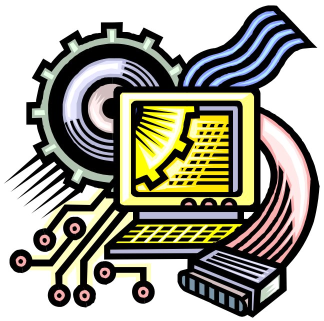




» 内容总结和延伸

汉密尔顿图	含汉密尔顿回路的图。
必要条件	删除图中任意k个结点所得连通分支个数小于等于k。
充分条件	图中任意两个结点的度数和大于等于n。

» 结束语



本次课结束，谢谢大家！

作业（左孝凌书）：P_{312}(6,7,8,9);