第四篇　图论

第6章　图论

§6.1.1 图的定义

图

一个图是一个三元组<V(G), E(G), φ(G)>，其中V(G)是一个非空的结点（或顶点）集合，E(G)是边集合，φ(G)是从边集合到结点偶对集合上的函数。

§6.1.1 图的定义

无向边

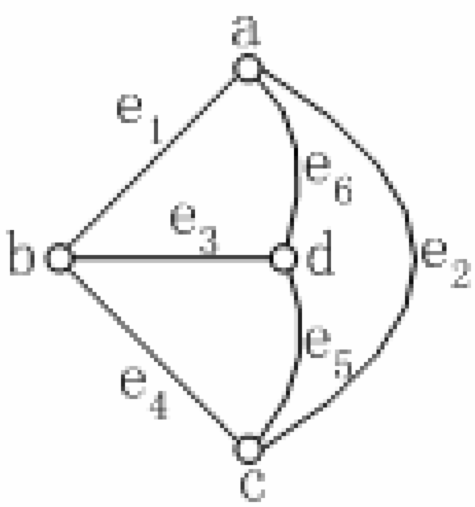
设边 e=[u, v]，若[u, v]是无序对(u, v)，则称 e 是无向边，e 关联的两个结点 u 和 v 称为 e 的端点。

有向边

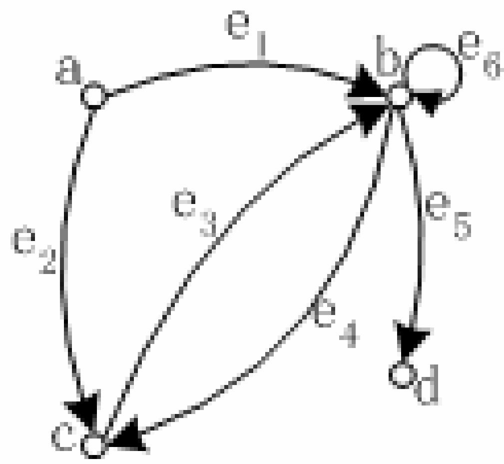
设边 e=[u, v]，若[u, v]是有序对<u, v>，则称 e 是有向边。其中结点 u 称为 e 的始点，结点 v 称为 e 的终点。

§6.1.1 图的定义

【例题】图 G_1 和 G_2 分别如图 9.1-1(a) (b)所示，给出其形式定义。



(a)



(b)

§6.1.1 图的定义

解答:

$V(G_1)=V(G_2)=\{a, b, c, d\}$

$E(G_1)=E(G_2)=\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$

$\varphi_{G_1}=\{<e_1, (a,b)>, <e_2, (a,c)>, <e_3, (b,d)>, <e_4, (b,c)>, <e_5,(c,d)>,$
$<e_6, (a,d)>\}$

$\varphi_{G_2}=\{<e_1, <a,b>>, <e_2, <a,c>>, <e_3, <c,b>>, <e_4,<b,c>>,$
$<e_5,<b,d>>, <e_6, <b,b>>\}$

§6.1.1 图的定义

邻接点

关联在同一条边上的两个结点相互邻接。

邻接边

关联于同一结点上的两条边相互邻接。

自回路

仅关联一个结点的边称为自回路或环。

孤立结点

不与任何结点邻接的结点称为孤立结点。

平行边

设边 $e_1=[u, v]$，若 $e_2=e_1$ 且 e_2 是与 e_1 不同的边，则称 e_1 与 e_2 是平行边。

§6.1.2 图的分类

按边是否有方向可分为：

（1）无向图：每条边都是无向边的图称为无向图。无向图的每条边关联的结点对是无序偶对。

（2）有向图：每条边都是有向边的图称为有向图。有向图的每条边关联的结点对是有序偶对，即 φ_G：$E(G) \to V(G) \times V(G)$。

（3）混合图：图中一些边是有向边，而另外一些边是无向边，称该图为混合图。

§6.1.2 图的分类

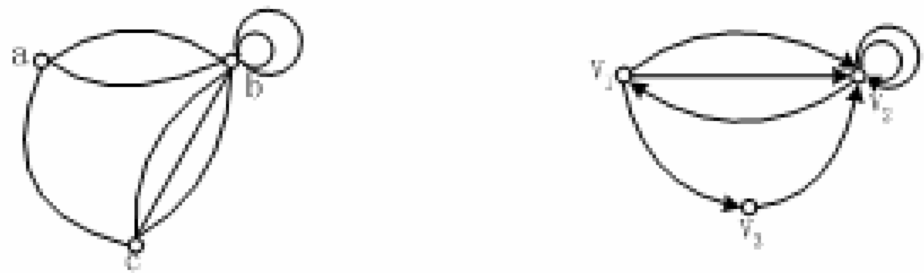
按边是否含平行边和自回路可分为:

（1）多重图：含有平行边的图称为多重图。

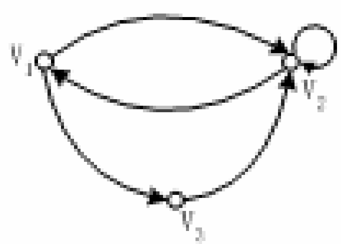
（2）线图：不含平行边的图称为线图。

（3）简单图：不含自回路的线图称为简单图。

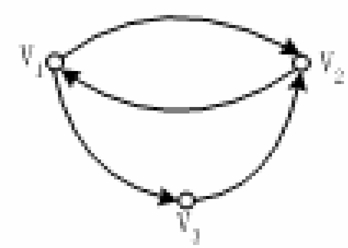
§6.1.2 图的分类



(a) 多重图



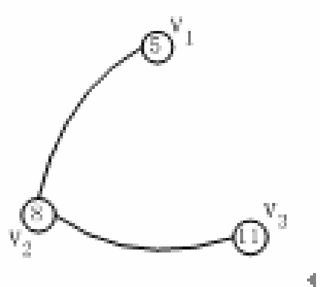
(b) 线图



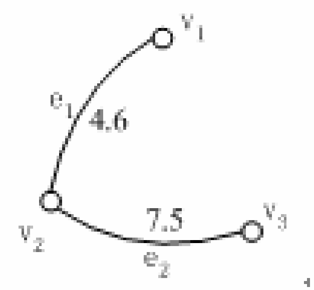
(c) 简单图

§6.1.2 图的分类

赋权图： 赋权图 G 是一个四重组 $\langle V, E, f, h \rangle$，其中 f 是定义在结点集 V 到实数集 R 上的函数，h 是定义在边集 E 到实数集 R 上的函数。



（a）结点赋权图



（b）边赋权图

§6.1.3 结点的度

结点的度数

在图 $G=\langle V,E\rangle$中，与结点 $v\in V$ 关联的边数，称为该结点的度数，记为 $\deg(v)$。

结点的入度

在有向图中，以某个结点 v 为终点的边数称为该结点的入度记为 $\deg^{-}(v)$。

结点的出度

在有向图中，以某个结点 v 为始点的边数称为该结点的出度记为 $\deg^{+}(v)$。

§6.1.3 结点的度

※『定理』(握手定理)每个图中，结点的度数和等于边数的两倍。

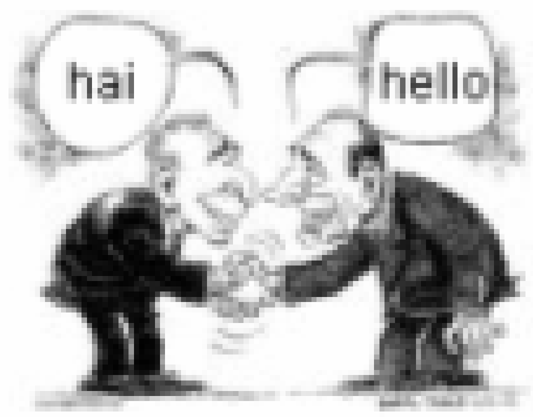
对于无向图有：$\sum_{v\in V}\deg(v)=2|E|$

对于有向图有：$\sum_{v\in V}(\deg^-(v)+\deg^+(v))=2|E|$

『推论』任何图中，奇数度的结点必为偶数个。

§6.1.3 结点的度

【例题】中秋晚会上大家握手言欢，试证明握过奇数次手的人数是偶数。



§6.1.3 结点的度

『定理』在任何有向图中，所有结点的入度之和等于所有结点的出度之和。

$$\sum_{v \in V} \deg^{-}(v) = \sum_{v \in V} \deg^{+}(v) = |E|$$

§6.1.3 结点的度

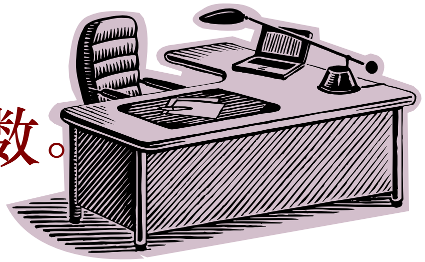
【例题】设有向简单图 D 的度数序列为 2，2，3，3，入度序列为 0，0，2，3，试求 D 的出度序列和该图的边数。

解答：设图 D 度数序列 2，2，3，3 所对应的结点分别为：v_1，v_2，v_3，v_4。由 $\deg(v)=\deg^+(v)+\deg^-(v)$ $(i=1,2,3,4)$，得

D 的出度序列为：2，2，1，0。

D 的边数 $m=(2+2+3+3)/2=5$。

» 内容总结和延伸



图的定义

三元组：结点集、边集和关联函数。

图的分类

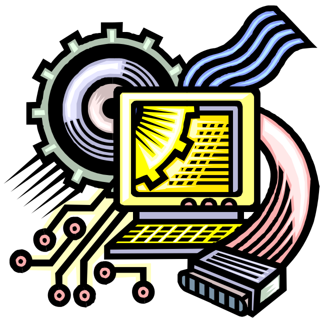
按边是否有方向：有向图、无向图和混合图。

按是否含多重边和自回路：多重图、线图和简单图。

有限图、无限图

结点的度

» 结束语



本节内容结束，谢谢大家！