第二篇　集合论

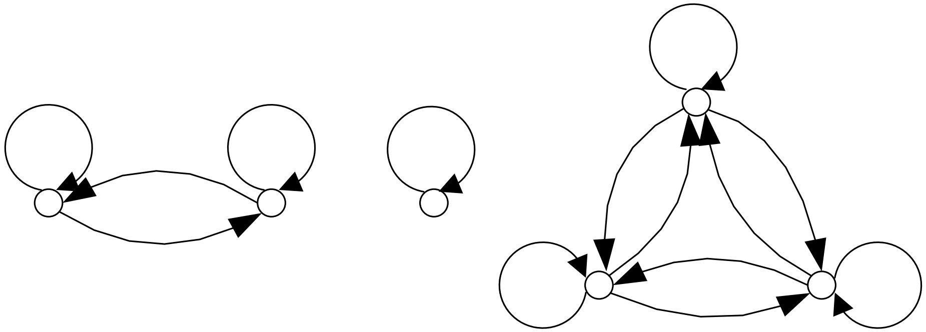
第3章　集合与关系

§3.5.1 等价关系

等价关系

设R是集合A上的一个二元关系，若R是自反、对称和传递的，则称R为等价关系。

例如：{1,2,3,4,5,8}上的模3同余关系



§3.5.1 等价关系

等价关系的关系图的特点：

自反性 ⟹ 所有结点上有自回路

对称与传递性 ⟹ 只要结点r到s可达则r到s有边相连

等价关系的关系图的每个连通子图都是有向完全图 。

§3.5.1 等价关系

【例题】A={a, b, c, d}，A上的二元关系R={<a, a>, <a, b>, <b, a>, <b, b>, <c, c>, <c, d>, <d, c>, <d, d>}，验证关系R是等价关系。

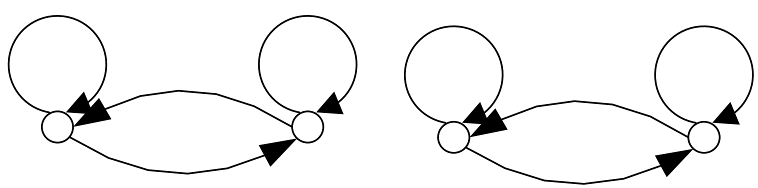
解答：

(i) 因为$I_A \subseteq R$，所以是自反的；

(ii) 因为R^{-1}={<a, a>, <b, a>, <a, b>, <b, b>, <c, c>, <d, c>, <c, d>, <d, d>}= R，所以R是对称的；

(iii) 因为$R \circ R$={<a, b>, <a, a>, <b, a>, <b, b>, <c, d>, <c, c>, <d, d>, <d, c>}$\subseteq$R，所以R是传递的。

综上所述，R是等价关系，其关系图如图所示。



§3.5.1 等价关系

【例题】设I为整数集，I上的模3相等关系R={<x, y>|x≡y(mod 3)}，证明R是等价关系。

证明：

(i) 对于任一a∈I，有a≡a (mod 3)，即<a, a>∈R，所以R是自反的；

(ii) 若<a, b>∈R，则有a≡b (mod 3)，即存在m∈I，使得a-b=3m，于是有b-a=-3m，因此b≡a (mod 3)，即<b, a>∈R，所以R是对称的。

(iii) 若<a, b>,<b, c>∈R，则有a≡b (mod 3)和b≡c (mod 3)，即存在m,n∈I，使得a-b=3m和b-c= 3n，将等式两边相加得a-c=3(m+n)

因此a≡c (mod 3)，即<a, c>∈R，所以R是传递的。

综上所述，R是等价关系。

§3.5.1 等价关系

【例题】设R为计算机系所有学生构成的集合上的“同住一个宿舍关系”，验证R是等价关系。

解答：

(i) 任意一个学生与自己同住一个宿舍，因此R是自反的；

(ii) 如果aRb，即a学生与b学生同住一个宿舍，则b学生与a学生也同住一个宿舍，因此有bRa，所以R是对称的；

(iii) 如果有aRb和bRc，即a学生与b学生同住一个宿舍，b 学生与c学生同住一个宿舍，自然a学生与c学生也同住一个宿舍，即有aRc成立，所以R是传递的。

因此R是等价关系，这个等价关系将计算机系的所有同学划分成若干个宿舍。

§3.5.2 等价类

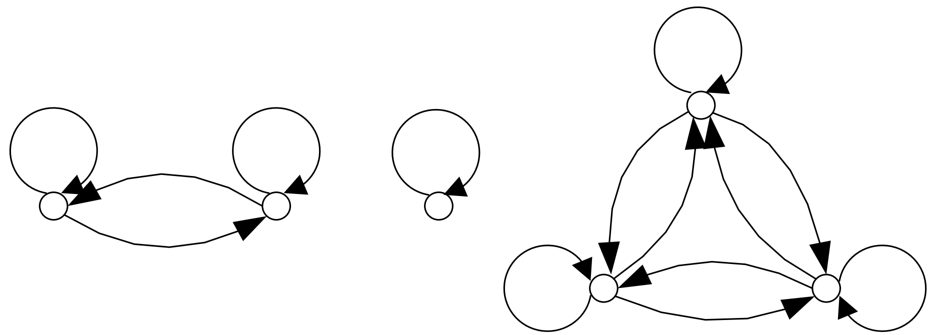
等价类

设R是非空集合A上的等价关系，对于任意$a \in A$，称集合$[a]_R=\{x \mid x \in A, xRa\}$为a关于R的等价类，a称为等价类$[a]_R$的代表元素。

等价类$[a]_R$是所有与a具有R关系的元素构成的集合。

§3.5.2 等价类

【例题】设A={1, 2, 3, 4, 5, 8}，R是A上的“模3同余”关系，求关于R的所有等价类。



解答：

A上关于R有三个等价类：

$[1]_R=\{1,4\}=[4]_R$；

$[2]_R=\{2, 5, 8\}=[5]_R= [8]_R$；

$[3]_R=\{3\}$。

1 4

§3.5.3 商集

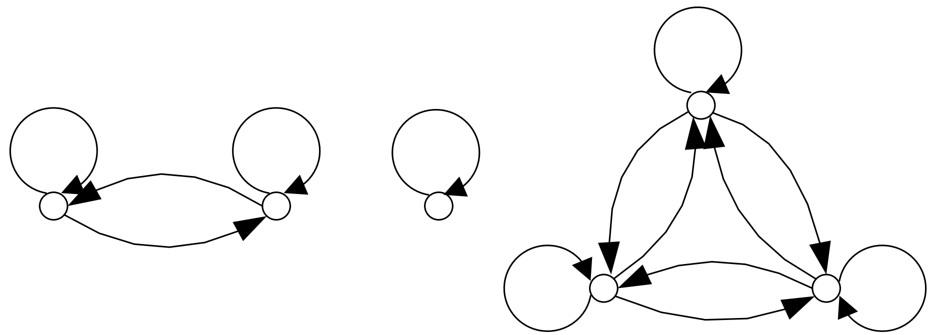
商集

设R是集合A上的等价关系，由R确定的所有等价类组成的集合，称为集合A上关于R的商集，记为A/R。

$$A/R=\{[x]_R \mid x \in A\}$$

§3.5.3 商集

【例题】设A={1, 2, 3, 4, 5, 8}，R是A上的“模3同余”关系，求商集A/R。



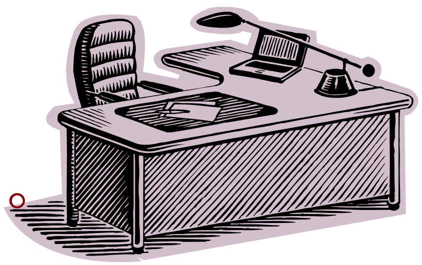
解答：

$$A/R=\{[1]_R, [2]_R, [3]_R\}=\{\{1,4\}, \{2,5,8\}, \{3\}\}$$

» 内容总结和延伸

等价关系

集合A上满足自反、对称、传递性的二元关系。



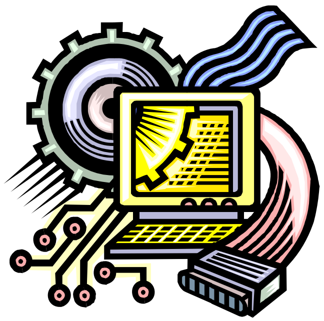
等价类

相互间有R关系的元素构成的集合。

商集

所有等价类构成的集合。

» 结束语



本节内容结束，谢谢大家！

作业（左孝凌书）：$P_{134}(1,2,4,5)$