西安电子科技大学
软件学院

第一篇 数理逻辑

第1章 命题逻辑

§1.3.1 逻辑等价式

逻辑等价:

设 A 和 B 是两个含有相同命题变元 $P_1, P_2, \ldots, P_n$ 的命题公式，若对于 $P_1, P_2, \ldots, P_n$ 的每一种真值指派，A 和 B 的真值均相同，则称 A 和 B 是逻辑等价公式，记为 $A \Leftrightarrow B$。若 A 为重言式，记为 $A \Leftrightarrow T$。

例如： $P \land Q \Leftrightarrow Q \land P$　　$P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg P \lor Q$

与联结词“↔”不同，等价符“⇔”是一个关系符，它表示命题公式A与B在相同的赋值下总是等值的。

§1.3.1 逻辑等价式

『定理』设 A, B 为两个命题公式，$A \Leftrightarrow B$ 当且仅当 $A \leftrightarrow B$ 为重言式。

证明： (i) 充分条件

若$A \leftrightarrow B$为重言式，则A,B在相同的赋值下的真值均相同，所以 A和B是逻辑等价的公式，即$A \Leftrightarrow B$.

(ii) 必要条件

若$A \Leftrightarrow B$，则有A,B在相同的赋值下的真值均相同，所以 $A \leftrightarrow B$为重言式.

§1.3.1 逻辑等价式

【例题】证明命题公式 $P \rightarrow Q$ 与 $\neg P \vee Q$ 等价。

解答：首先给出$(P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\neg P \vee Q)$的真值表，如表 1.2-1 所示。

表 1.2-1

P	Q	$P \rightarrow Q$	$\neg P \vee Q$	$(P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\neg P \vee Q)$
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	1	1	1	1

可以看出$(P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\neg P \vee Q)$是重言式，因此有 $P \rightarrow Q$ 与 $\neg P \vee Q$ 等价。

§1.3.1 逻辑等价式

24 个基本的逻辑等价式

E_1	$\neg\neg P \Leftrightarrow P$	对合律
E_2	$P \vee P \Leftrightarrow P$	等幂律
E_3	$P \wedge P \Leftrightarrow P$	
E_4	$P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P$	交换律
E_5	$P \wedge Q \Leftrightarrow Q \wedge P$	
E_6	$(P \vee Q) \vee R \Leftrightarrow P \vee (Q \vee R)$	结合律
E_7	$(P \wedge Q) \wedge R \Leftrightarrow P \wedge (Q \wedge R)$	
E_8	$P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow P \wedge Q \vee P \wedge R$	分配律
E_9	$P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$	

§1.3.1 逻辑等价式

E_{10} $\neg(P\vee Q)\Leftrightarrow \neg P\wedge\neg Q$	德．摩根定律
E_{11} $\neg(P\wedge Q)\Leftrightarrow \neg P\vee \neg Q$	
E_{12} $P\vee (P\wedge Q)\Leftrightarrow P$	吸收律
E_{13} $P\wedge (P\vee Q)\Leftrightarrow P$	
E_{14} $(P\rightarrow Q)\Leftrightarrow\neg P\vee Q$	蕴含表达式
E_{15} $(P\leftrightarrow Q)\Leftrightarrow(P\rightarrow Q)\wedge(Q\rightarrow P)$	等值表达式
E_{16} $P\vee T\Leftrightarrow T$	零一律
E_{17} $P\wedge F\Leftrightarrow F$	
E_{18} $P\vee F\Leftrightarrow P$	同一律
E_{19} $P\wedge T\Leftrightarrow P$	
E_{20} $P\vee\neg P\Leftrightarrow T$	排中律
E_{21} $P\wedge\neg P\Leftrightarrow F$	矛盾律
E_{22} $(P\wedge Q\rightarrow R)\Leftrightarrow(P\rightarrow(Q\rightarrow R))$	输出律
E_{23} $((P\rightarrow Q)\wedge(P\rightarrow\neg Q))\Leftrightarrow\neg P$	归谬律
E_{24} $(P\rightarrow Q)\Leftrightarrow(\neg Q\rightarrow\neg P)$	逆反律

§1.3.1 逻辑等价式

替换规则

【定理】将命题式A中的某个子公式B用与B等价的另一个命题公式C置换，所得命题公式A′与A逻辑等价。

例如： $R \wedge (P \rightarrow Q) \Leftrightarrow R \wedge (\neg P \vee Q)$

应用替换规则、代入规则和基本的逻辑等价式，可以将一个公式变换为另一个与之等价的公式 。

§1.3.2 永真蕴含式

永真蕴含：

若 A→B 是一个重言式，则称"A 永真蕴含 B"，记为 A⇒B。

例如： $P \wedge Q \Rightarrow P$

永真蕴含符"⇒"也是一个关系符。
A⇒B当且仅当A为T时，B一定为T，
即"由A成立可以逻辑推出B也成立"

§1.3.2 永真蕴含式

【例题】证明：$\neg Q \wedge (P \rightarrow Q) \Rightarrow \neg P$

方法一：（真值表法）

P	Q	$\neg Q$	$P \rightarrow Q$	$\neg Q \wedge (P \rightarrow Q)$	$\neg Q \wedge (P \rightarrow Q) \rightarrow \neg P$
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1
1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	0	1

【例题】证明：$\neg Q\wedge(P\to Q)\Rightarrow\neg P$

方法二：（假定前件为真，推出后件也为真）

假定$\neg Q\wedge(P\to Q)$为T，则有$\neg Q$为T且$P\to Q$为T.

由$P\to Q$为T，可得$\neg Q\to\neg P$为T.

又$\neg Q$为T，可得$\neg P$为T.

故有$\neg Q\wedge(P\to Q)\Rightarrow\neg P$.

【例题】证明：$\neg Q \wedge (P \rightarrow Q) \Rightarrow \neg P$

方法三：（假定后件为假，推出前件也为假）**依据：** $P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg P \rightarrow \neg Q$

假定$\neg P$为F，则有P为T.

下面对Q的真值进行讨论：

（1）Q为T，可得$\neg Q$为F，则有$\neg Q \wedge (P \rightarrow Q)$为F;

（2）Q为F，$P \rightarrow Q$为F，则有$\neg Q \wedge (P \rightarrow Q)$为F;

所以当$\neg P$为F时，恒有$\neg Q \wedge (P \rightarrow Q)$为F。

故有$\neg Q \wedge (P \rightarrow Q) \Rightarrow \neg P$.

§1.3.2 永真蕴含式

9 个基本的永真蕴含式:

I_1	$P \Rightarrow P \vee Q$
I_2	$P \wedge Q \Rightarrow P$
I_3	$P \wedge (P \rightarrow Q) \Rightarrow Q$
I_4	$(P \rightarrow Q) \wedge \neg Q \Rightarrow \neg P$
I_5	$\neg P \wedge (P \vee Q) \Rightarrow Q$
I_6	$(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R) \Rightarrow (P \rightarrow R)$
I_7	$(P \rightarrow Q) \Rightarrow ((Q \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow R))$
I_8	$((P \rightarrow Q) \wedge (R \rightarrow S)) \Rightarrow (P \wedge R \rightarrow Q \wedge S)$
I_9	$((P \leftrightarrow Q) \wedge (Q \leftrightarrow R)) \Rightarrow (P \leftrightarrow R)$

§1.3.3 相关性质

✸『定理』设 A 和 B 为任意两个命题公式，$A \Leftrightarrow B$ 的充要条件是 $A \Rightarrow B$ 且 $B \Rightarrow A$。

证明:

$A \Leftrightarrow B$ 当且仅当 $A \leftrightarrow B$ 为重言式.

$A \leftrightarrow B$ 当且仅当 $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$ 为重言式

当且仅当 $A \rightarrow B$ 且 $B \rightarrow A$ 为重言式，即 $A \Rightarrow B$ 且 $B \Rightarrow A$

§1.3.3 相关性质

关于逻辑等价式和永真蕴含式有以下性质：

(a) 若 $A \Leftrightarrow B$，$B \Leftrightarrow C$，则 $A \Leftrightarrow C$；

(b) 若 $A \Rightarrow B$，$B \Rightarrow C$，则 $A \Rightarrow C$；

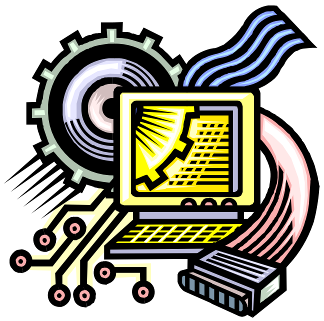
(c) 若 $A \Rightarrow B$，$A \Rightarrow C$，则 $A \Rightarrow B \wedge C$；

(d) 若 $A \Rightarrow B$，$C \Rightarrow B$，则 $A \vee C \Rightarrow B$。

» 内容总结和延伸

逻辑等价式	两个命题公式等价，当且仅当在同一赋值下的真值均相同，它们只是形式不同，内涵完全相同。
永真蕴含式	若A为真，则B必为真，就有A⇒B。
逻辑等价与永真蕴涵的关系	A⇔B，当且仅当A⇒B且B⇒A。

» 结束语



本节内容结束，谢谢大家！

作业（离散数学书）：$P_{18}(2,3,4,5,7,10)$