

1.1-8 将下列语句符号化，并求出其真值

- (a)  $2 + 3 = 5$  当且仅当 19 是素数
- (b)  $2 + 3 \neq 5$  当且仅当 19 是素数
- (c) 只有 4 是偶数, 5 才是偶数
- (d) 除非  $2 + 2 = 6$ , 否则地球静止不动
- (e) 只有地球静止不动, 才有  $2 + 2 = 6$
- (f)  $\sqrt{3}$  和  $\sqrt{7}$  中有且仅有一个是无理数

解:

- (a) 设  $P: 2 + 3 = 5$ ;  $Q: 19$  是素数:  
 $P \leftrightarrow Q, T$
- (b) 设  $P: 2 + 3 \neq 5$ ;  $Q: 19$  是素数:  
 $P \leftrightarrow Q, F$
- (c) 设  $P: 4$  是偶数;  $Q: 5$  是偶数:  
 $Q \rightarrow P, T$
- (d) 设  $P: 2 + 2 = 6$ ;  $Q: 地球静止不动$ :  
 $\neg P \rightarrow Q, F$
- (e) 设  $P: 2 + 2 = 6$ ;  $Q: 地球静止不动$ :  
 $P \rightarrow Q, T$
- (f) 设  $P: \sqrt{3}$  是无理数;  $Q: \sqrt{7}$  是无理数:  
 $(P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q), F$

1.2-2 将下列句子翻译成命题公式

- (a) 我将风雨无阻去学校
- (b) 如果天不下雨且天不下雪, 那么我去学校
- (c) 我去学校当且仅当天下雨但不下雪
- (d) 如果我去学校, 那么天不下雪
- (e) 如果天下雨或下雪, 那么我不去学校

解: 设  $P$ : 天下雨;  $Q$ : 天下雪;  $R$ : 我去学校

- (a)  $R$
- (b)  $(\neg P \wedge \neg Q) \rightarrow R$
- (c)  $(P \wedge \neg Q) \leftrightarrow R$
- (d)  $R \rightarrow \neg Q$
- (e)  $(P \vee Q) \rightarrow \neg R$

1.3-2 证明下列等价公式

$$(a) Q \rightarrow (P \rightarrow R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \rightarrow R$$

$$(b) P \rightarrow (Q \rightarrow P) \Leftrightarrow \neg P \rightarrow (P \rightarrow \neg Q)$$

$$(c) (A \leftrightarrow B) \leftrightarrow C \Leftrightarrow A \leftrightarrow (B \leftrightarrow C)$$

证明:

(a)

$$\begin{aligned} Q \rightarrow (P \rightarrow R) &\Leftrightarrow \neg Q \vee (P \rightarrow R) \\ &\Leftrightarrow \neg Q \vee (\neg P \vee R) \\ &\Leftrightarrow (\neg Q \vee \neg P) \vee R \\ &\Leftrightarrow \neg(P \wedge Q) \vee R \\ &\Leftrightarrow (P \wedge Q) \rightarrow R \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} P \rightarrow (Q \rightarrow P) &\Leftrightarrow \neg P \vee (\neg Q \vee P) \\ &\Leftrightarrow T \vee \neg Q \\ &\Leftrightarrow T \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \neg P \rightarrow (P \rightarrow \neg Q) &\Leftrightarrow (\neg P \wedge P) \rightarrow \neg Q \\ &\Leftrightarrow F \rightarrow \neg Q \\ &\Leftrightarrow T \end{aligned}$$

(c) 真值表证明 (略)

1.3-4 对下列每个命题公式, 找出仅包含  $\neg$  和  $\vee$  的等价公式, 并尽可能简单

$$(a) P \wedge \neg Q \wedge \neg P$$

$$(b) \neg P \wedge (\neg P \vee (Q \vee \neg R)) \wedge Q$$

$$(c) \neg P \wedge (R \vee P) \wedge \neg Q$$

解:

(a)

$$\begin{aligned} P \wedge \neg Q \wedge \neg P &\Leftrightarrow P \wedge \neg P \wedge \neg Q \\ &\Leftrightarrow F \wedge \neg Q \\ &\Leftrightarrow F \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\neg P \wedge (\neg P \vee (Q \vee \neg R)) \wedge Q &\Leftrightarrow \neg P \wedge Q \\ &\Leftrightarrow \neg(P \vee \neg Q)\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}\neg P \wedge (R \vee P) \wedge \neg Q &\Leftrightarrow (\neg P \wedge R) \vee (\neg P \wedge P) \wedge \neg Q \\ &\Leftrightarrow \neg P \wedge R \wedge \neg Q \\ &\Leftrightarrow \neg(P \vee \neg R) \wedge \neg Q \\ &\Leftrightarrow \neg((P \vee \neg R) \vee Q)\end{aligned}$$

1.3-6 不构造真值表证明下列蕴含式

(a)  $P \wedge (P \rightarrow Q) \Rightarrow Q$

(b)  $P \rightarrow Q \rightarrow Q \Rightarrow P \vee Q$

(c)  $((P \vee \neg P) \rightarrow Q) \rightarrow ((P \vee \neg P) \rightarrow R) \Rightarrow Q \rightarrow R$

(d)  $(Q \rightarrow (P \wedge \neg P)) \rightarrow (R \rightarrow (P \wedge \neg P)) \Rightarrow R \rightarrow Q$

解:

(a)

$$\begin{aligned}P \wedge (P \rightarrow Q) \rightarrow Q &\Leftrightarrow P \wedge (\neg P \vee Q) \rightarrow Q \\ &\Leftrightarrow \neg(P \wedge (\neg P \vee Q)) \vee Q \\ &\Leftrightarrow \neg P \vee \neg(\neg P \vee Q) \vee Q \\ &\Leftrightarrow \neg P \vee Q \vee \neg(\neg P \vee Q) \\ &\Leftrightarrow T\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}P \rightarrow Q \rightarrow Q \rightarrow (P \vee Q) &\Leftrightarrow P \wedge \neg Q \vee Q \rightarrow (P \vee Q) \\ &\Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee Q) \rightarrow (P \vee Q) \\ &\Leftrightarrow (P \vee Q) \rightarrow (P \vee Q) \\ &\Leftrightarrow T\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}((P \vee \neg P) \rightarrow Q) \rightarrow ((P \vee \neg P) \rightarrow R) &\Leftrightarrow (T \rightarrow Q) \rightarrow (T \rightarrow R) \\ &\Rightarrow Q \rightarrow R\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}(Q \rightarrow (P \wedge \neg P)) \rightarrow (R \rightarrow (P \wedge \neg P)) &\Leftrightarrow (Q \rightarrow F) \rightarrow (R \rightarrow F) \\ &\Leftrightarrow (Q \wedge T) \vee (\neg R \vee F) \\ &\Rightarrow Q \vee \neg R \\ &\Rightarrow R \rightarrow Q\end{aligned}$$

1.4-6 已知  $\{\leftrightarrow, \neg\}$  不是全功能联结词集合, 证明  $\{\oplus, \neg\}$  也不是全功能联结词集合

证明: 反证法

假设  $\{\oplus, \neg\}$  是全功能联结词集合

则对于任意  $P \oplus Q \Leftrightarrow \neg(P \leftrightarrow Q)$ , 即凡是能用  $\{\oplus, \neg\}$  表示的命题公式都能用  $\{\leftrightarrow, \neg\}$  表示, 则  $\{\leftrightarrow, \neg\}$  也是全功能联结词集合, 这与题设矛盾。

故,  $\{\oplus, \neg\}$  不是全功能联结词集合。

1.7-4 证明下列各式。

(a)  $\neg P \vee Q, S \rightarrow \neg Q \Rightarrow P \rightarrow \neg S$

(b)  $S \rightarrow \neg Q, S \vee R, \neg R, P \leftrightarrow Q \Rightarrow \neg P$

(c)  $\neg(P \rightarrow Q) \rightarrow \neg(R \vee S), ((Q \rightarrow P) \vee \neg R), R \Rightarrow P \leftrightarrow Q$

证明:

(a) (1)  $P$  (P 附加前提)

(2)  $\neg P \vee Q$  (P 规则)

(3)  $Q$  (T(1)(2))

(4)  $S \rightarrow \neg Q$  (P 规则)

(5)  $\neg S$  (T(3)(4))

(6)  $P \rightarrow \neg S$  (CP 规则)

(b) (1)  $S \vee R, \neg R$  (P 规则)

(2)  $S$  (T(1))

(3)  $S \rightarrow \neg Q$  (P 规则)

(4)  $\neg Q$  (T(2)(3))

(5)  $P \leftrightarrow Q$  (P 规则)

(6)  $\neg P$  (T(4)(5))

(c) (1)  $R$  (P 规则)

(2)  $(Q \rightarrow P) \vee \neg R$  (P 规则)

(3)  $Q \rightarrow P$  (T(1)(2))

(4)  $R \vee S$  (T(1))

(5)  $\neg(P \rightarrow Q) \rightarrow \neg(R \vee S)$  (P 规则)

(6)  $P \rightarrow Q$  (T(4)(5))

(7)  $P \leftrightarrow Q$  (T(3)(6))