马尔可夫链的概率分布

本节主要内容

➢切谱曼—柯尔莫哥洛夫方程

➢马尔可夫链的概率分布

●初始分布

●绝对分布

●有限维分布

Chapman-kolmogorov方程(C-K方程)

定理6.2.1 设X={$X_n, n \geq 0$}是状态空间S上的马氏链，则有

$$p_{ij}^{(k+m)}(n) = \sum_l p_{il}^{(k)}(n) p_{lj}^{(m)}(n+k), \quad n, m, k \geq 0, i, j \in S$$

或矩阵形式

$$\mathbf{P}^{(k+m)}(n) = \mathbf{P}^{(k)}(n)\mathbf{P}^{(m)}(n+k)$$

证明 $p_{ij}^{(k+m)}(n) = P\{X_{n+k+m} = j \mid X_n = i)$

$$= P\{(\bigcup_l X_{n+k} = l), X_{n+k+m} = j \mid X_n = i)$$

$$= P\{\bigcup_{l}(X_{n+k} = l, X_{n+k+m} = j) \big| X_n = i)$$

$$= \sum_{l} P(X_{n+k} = l, X_{n+k+m} = j) \big| X_n = i)$$

$$= \sum_{l} P(X_{n+k} = l \big| X_n = i) \cdot P(X_{n+k+m} = j \big| X_n = i, X_{n+k} = l)$$

$$= \sum_{l} P(X_{n+k} = l \big| X_n = i) \cdot P(X_{n+k+m} = j \big| X_{n+k} = l)$$

$$= \sum_{l} p_{il}^{(k)}(n) \cdot p_{lj}^{(m)}(n+k)$$

C-K方程的直观意义：

系统在n 时从状态i的出发,经过k+m步转移,于n+k+m时到达状态j,可以先在n时从状态i出发，经过k步转移于n+k时到达某种中间状态l,再在n+k时从中间状态l出发经过m步转移于n+k+m时到达最终状态j,而中间状态l要取遍整个状态空间S.

若取m=1,则由C-K方程的矩阵形式:

$$\mathbf{P}^{(k+m)}(n)=\mathbf{P}^{(k)}(n)\mathbf{P}^{(m)}(n+k)$$

得 $\mathbf{P}^{(k+1)}(n)=\mathbf{P}^{(k)}(n)\mathbf{P}^{(1)}(n+k)$

$$=\mathbf{P}^{(k-1)}(n)\cdot\mathbf{P}(n+k-1)\cdot\mathbf{P}(n+k)$$

$$=\cdots$$

$$=\mathbf{P}(n)\cdot\mathbf{P}(n+1)\cdots\mathbf{P}(n+k-1)\cdot\mathbf{P}(n+k)$$

$$(n,k\geq 0)$$

分量形式

$$p_{ij}^{(k+1)}(n) = \sum_{j_1}\sum_{j_2}\cdots\sum_{j_k} p_{ij_1}(n)\cdot p_{j_1 j_2}(n+1)\cdots p_{j_k j}(n+k)$$

$$(n, k \ge 0, i, j \in S)$$

特别的，X为齐次马氏链时，有

$$\mathbf{P}^{(k)} = \mathbf{P}^k, \qquad k \ge 0$$

结论：马尔可夫链的**k** 步转移概率由其一步转移概率所完全确定.

例6.2.1 设X={Xn，n≥0}是描述天气变化的齐次马氏链. 状态空间为S={0，1}，其中0与1分别表示有雨和无雨天气. X的一步转移概率矩阵为

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix}0.7 & 0.3\\ 0.6 & 0.4\end{bmatrix}$$

对任意的状态i，j∈S，计算三步转移概率 $p_{ij}^{(3)}$

并比较各个概率值？并思考如果转移步数增大，上述概率有什么规律？

解：利用C-K方程得

$$\mathbf{P}^3 = \mathbf{P}^2\mathbf{P}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.6 & 0.4 \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.6 & 0.4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.583 & 0.417 \\ 0.556 & 0.444 \end{bmatrix}$$

马尔可夫链的概率分布

- 初始分布

定义6.2.1 马氏链X={Xn，n≥0} 的状态空间为S

记 $q_j^{(0)} = P(X_0 = j),\qquad j \in S$

则称概率分布 $\{q_j^{(0)} : j \in S\}$ 为马氏链X的初始分布.

称向量

$$\mathbf{q}^{(0)} = (q_1^{(0)}, q_2^{(0)}, \cdots q_j^{(0)}, \cdots)$$

为马尔可夫链的初始分布向量.

➢ 有限维分布

定理6.2.2 马尔可夫链X的有限维分布由其初始分布和一步转移概率所完全确定.

证明 对$\forall n \geq 1, \forall 0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_n, i_1, i_2, \cdots, i_n, i \in S$

$$P\{X_{t_1} = i_1, X_{t_2} = i_2, \cdots, X_{t_n} = i_n\}$$

$$= P\{\bigcup_i (X_0 = i), X_{t_1} = i_1, X_{t_2} = i_2, \cdots, X_{t_n} = i_n\}$$

$$= P\{\bigcup_i (X_0 = i, X_{t_1} = i_1, X_{t_2} = i_2, \cdots, X_{t_n} = i_n)\}$$

$$= \sum_i P(X_0 = i, X_{t_1} = i_1, X_{t_2} = i_2, \cdots, X_{t_n} = i_n)$$

$$= \sum_i P(X_0 = i) \cdot P(X_{t_1} = i_1 \mid X_0 = i) \cdot P(X_{t_2} = i_2 \mid X_0 = i, X_{t_1} = i_1)$$

$$\cdots \cdot P(X_{t_n} = i_n \mid X_0 = i, X_{t_1} = i_1, \cdots, X_{t_{n-1}} = i_{n-1})$$

$$= \sum_i P(X_0 = i) \cdot P(X_{t_1} = i_1 \mid X_0 = i) \cdot P(X_{t_2} = i_2 \mid X_{t_1} = i_1)$$

$$\cdots \cdot P(X_{t_n} = i_n \mid X_{t_{n-1}} = i_{n-1})$$

$$= \sum_i q_i^{(0)} \cdot p_{ii_1}^{t_1}(0) \cdot p_{i_1 i_2}^{t_2 - t_1}(t_1) \cdots p_{i_{n-1} i_n}^{t_n - t_{n-1}}(t_{n-1}).$$

又因为马尔可夫链的k步转移概率由一步转移概率所完全确定.

所以马尔可夫链的有限维分布由其初始分布和一步转移概率所完全确定.

➢ 绝对分布

定义6.2.2 马氏链X={Xn，n≥0} 的状态空间为S

记 $q_j^{(0)} = \mathrm{P}(X_n = j), \qquad j \in S, n \geq 0$

则称概率分布 $\{q_j^{(n)} : j \in S\}$ 为马氏链X的绝对分布.

称向量

$$\mathbf{q}^{(n)} = (q_1^{(n)}, q_2^{(n)}, \cdots q_j^{(n)}, \cdots)$$

为马氏链X的绝对分布向量.

定理6.2.3 马尔可夫链X的绝对分布由其初始分布和一步转移概率完全确定.

证明 $q_j^{(n)} = P(X_n = j)$

$$= P\left(\bigcup_i (X_0 = i), X_n = j\right)$$

$$= P\left(\bigcup_i (X_0 = i, X_n = j)\right)$$

$$= P(\bigcup_i (X_0 = i, X_n = j))$$

$$= \sum_i P(X_0 = i, X_n = j)$$

$$= \sum_i P(X_0 = i) \cdot P(X_n = j \mid X_0 = i)$$

$$= \sum_i q_i^{(0)} p_{ij}^{(n)}(0) \qquad n \geq 0, i, j \in S$$

对于齐次马尔可夫链，上述结论可表示为

$$\mathbf{q}^{(n)} = \mathbf{q}^{(0)}\mathbf{P}^{n}, \quad n \geq 0$$

例6.2.2 X=$\{X_n, n\geq 0\}$ 为齐次马氏链，状态空间为 S={0，1，2}.转移概率矩阵为

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

初始分布 $q_i^{(0)} = \frac{1}{3}, i = 0,1,2,$ 试求：$(1) P(X_0 = 0, X_2 = 2);$

$(2) P(X_2 = 2).$

解 (1) $P(X_0 = 0, X_2 = 2)$

$$= P(X_0 = 0) \cdot P(X_2 = 2 \mid X_0 = 0)$$

$$= \frac{1}{3} \cdot p_{02}^{(2)}$$

其中$p_{02}^{(2)}$为两步转移概率，是两步转移概率矩阵中第一行第三列元素.

而$P^{(2)} = P^2$

$$= \begin{bmatrix} \frac{5}{9} & \frac{3}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{3}{9} & \frac{7}{18} & \frac{5}{18} \\ \frac{1}{6} & \frac{5}{12} & \frac{5}{12} \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad p_{02}^{(2)} = \frac{1}{9}$$

因此 $P(X_0 = 0, X_2 = 1) = \frac{1}{3} \cdot p_{02}^{(2)} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{9} = \frac{1}{27}$

$$(2)\quad P(X_2=2)=\sum_i q_i^{(0)}\cdot p_{i2}^{(2)}$$

$$=\frac{1}{3}(p_{02}^{(2)}+p_{12}^{(2)}+p_{22}^{(2)})$$

$$=\frac{1}{3}(\frac{1}{9}+\frac{5}{18}+\frac{5}{12})$$

$$=\frac{29}{108}$$

例6.2.3 社会学家将家庭的个体收入分为低、中、高三个等级，分别表示为1、2、3。研究者发现，个体收入等级在很大程度上取决于其父代收入的等级， 令Xn，表示一个家庭第n代个体的收入等级，则该家庭相继后代收入等级的变化可用齐次马氏链X={Xn，n≥0}描述，状态空间为S={1，2，3}.且有一步转移概率矩阵

$$P=\begin{bmatrix} 0.65 & 0.28 & 0.07 \\ 0.15 & 0.67 & 0.18 \\ 0.12 & 0.36 & 0.52 \end{bmatrix}$$

如果个体当前收入等级为3，试分析经过三代后个体收入等级转变为2的可能性，进一步分析经过n代后个体收入等级的概率分布，并具体计算n=10时，个体收入等级的概率分布。

解 $P(X_3 = 2 | X_0 = 3) = p_{32}^{(3)}$

$$P^2 = \begin{bmatrix} 0.47 & 0.39 & 0.13 \\ 0.22 & 0.56 & 0.22 \\ 0.19 & 0.46 & 0.34 \end{bmatrix}$$

$$P^3 = P^2 P = \begin{bmatrix} 0.38 & 0.44 & 0.17 \\ 0.25 & 0.52 & 0.23 \\ 0.23 & 0.49 & 0.27 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow P(X_3 = 2 \mid X_0 = 3) = p_{32}^{(3)} = 0.49$$

n代后的等级的概率分布为分布

$$\mathbf{q}^{(n)} = (q_1^{(n)}, q_2^{(n)}, q_3^{(n)}) = (q_1^{(0)}, q_2^{(0)}, q_3^{(0)})\mathrm{P}^n$$

$n=10$时，代后的等级的概率分布为分布

$$\mathbf{q}^{(10)}=(q_1^{(10)},q_2^{(10)},q_3^{(10)})=(q_1^{(0)},q_2^{(0)},q_3^{(0)})\mathbf{P}^{10}$$

$$=(0.286,\quad 0.489,\quad 0.225)$$

练习 设 X={$X_n, n\geq 0$}是状态空间为{a,b,c}的齐次马氏链.

其一步转移概率矩阵为

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{3}{5} & \frac{2}{5} & 0 \end{bmatrix}$$

求

$$(1) P\{X_1 = b, X_2 = c, X_3 = a, X_4 = c, X_5 = a, X_6 = c, X_7 = b \mid X_0 = c\}$$

$$(2) P\{X_{n+2} = c \mid X_n = b\},$$