第六章　离散时间马尔可夫链

- 马尔可夫过程是前苏联数学家A.A.Markov首先提出和研究的一类随机过程.
- 十九世纪后二十年 Markov主要致力于独立随机变量和古典极值理论的研究,并改进和完善了大数定律和中心极限定理.
- 二十世纪初　Markov的兴趣转移到相依随机变量序列的研究,并创立了以他命名的著名概率模型——马尔可夫链.

- 经过世界各国几代数学家的相继努力,马尔可夫过程已成为内容十分丰富,理论上相当完整,应用非常广泛的一门数学分支.
- 应用领域涉及计算机、通讯、自动控制、随机服务、可靠性、生物、经济、管理、气象、物理、化学等.

本章内容

- 马尔可夫链的定义
- 马尔可夫链的概率分布
- 齐次马尔可夫链的状态分类
- 转移概率的极限与平稳分布

离散时间马尔可夫链的定义

定义6.1.1 X=$\{X_n, n \geq 0\}$是定义在概率空间(Ω, F, P)上的随机过程，状态空间为可数集合S，如果对任意的$n \geq 0$,以及$i_0, i_1, \cdots, i_n$， $i_{n+1} \in S$,有

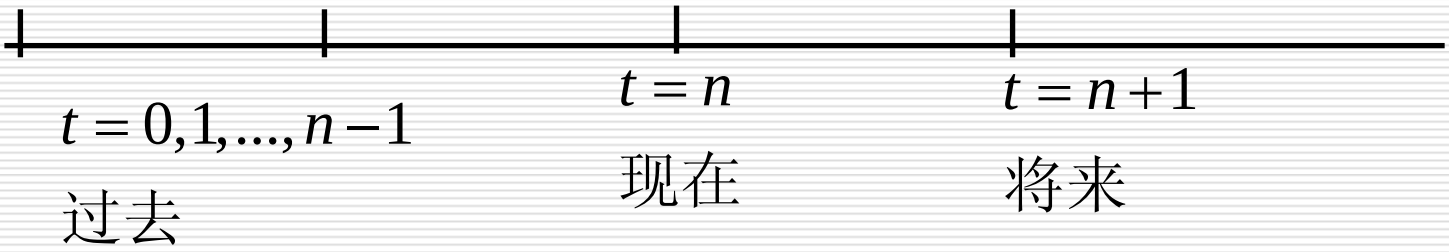
$$P(X_{n+1} = i_{n+1} \mid X_0 = i_0, X_1 = i_1, \cdots, X_n = i_n)$$
$$= P(X_{n+1} = i_{n+1} \mid X_n = i_n) \qquad (6.1)$$

则称随机过程X为离散时间马尔可夫链，简称马氏链.

(6.1)式所表达的性质，称为马氏性.

马氏性的直观解释

如果将时刻n看作现在，则时刻0，1，…，n-1就表示过去，而时刻n+1就表示将来，



(6.1)式表示的马氏性指：在已知过程现在状态的条件下，过程将来处于那个状态的概率不依赖于过程过去经历的状态. 也称之为无记忆性.

(6.1)式中的条件概率

$$P(X_{n+1}=i_{n+1}\,|\,X_n=i_n)$$

称为马氏链X在n时刻从状态i_n到i_{n+1}的一步转移概率，记为$p_{i_n i_{n+1}}(n)$.即

$$p_{i_n i_{n+1}}(n)=P(X_{n+1}=i_{n+1}\,|\,X_n=i_n)$$

一般地，有以下定义

定义6.1.2 设马氏链$X=\{X_n, n\geq 0\}$的状态空间为S，对任意的$n\geq 0, k\geq 1$以及任意的状态$i, j\in S$，用$p_{ij}^{(k)}(n)$表示以下条件概率，即

$$p_{ij}^{(k)}(n)=P(X_{n+k}=j \mid X_n=i),\quad i, j\in S, n\geq 0, k\geq 1$$

它表示马氏链X在n时从状态i出发经过k步转移，于n+k时到达状态j的概率，称为马氏链在n时刻的k步转移概率.

k=1时，$p_{ij}^{(1)}(n)$为n时的一步转移概率，记为 $p_{ij}(n)$

称以$p_{ij}^{(k)}(n)$为第i行第j列元素的矩阵为马氏链在n时刻的k步转移概率矩阵.记为

$$\mathbf{P}^{(k)}(n)=(p_{ij}^{(k)}(n))$$

k=1时 ， 马氏链的一步转移概率矩阵为

$$\mathbf{P}^{(1)}(n)=(p_{ij}^{(1)}(n))$$

常简记为

$$\mathbf{P}(n)=(p_{ij}(n))$$

特别约定，当k＝ 0 时，

$$p_{ij}^{(0)}=\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}\quad i,j\in S,n\geq 0$$

此时 $P^{(0)}(n)=\mathrm{I}$为单位矩阵.

不难验证，转移概率矩阵是随机矩阵，即

$$p_{ij}^{(k)}(n)\geq 0,\qquad \sum_{j\in S}p_{ij}^{(k)}(n)=1,$$

$i,j\in S,n\geq 0,k\geq 0$

齐次马尔可夫链

如果马氏链X的一步转移概率$p_{ij}(n)$衡与起始时刻n无关，即有

$$p_{ij}(n)=p_{ij}(n+1)=p_{ij}(n+2)=\cdots \qquad i,j\in S$$

则称马氏链具有时齐性，也称X为齐次马氏链.

为方便，一般常将齐次马氏链的起始时刻取为零．即

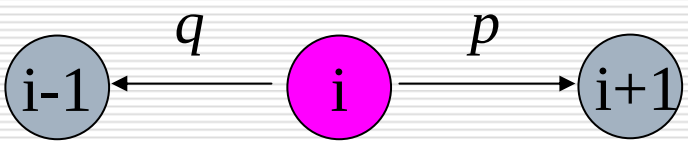
$$p_{ij}=P(X_1=j\,|\,X_0=i) \qquad i,j\in S$$

相应的一步转移概率矩阵分别记为 $P=(p_{ij})$

马尔可夫链举例

例6.1.1 (随机游动) 设一质点在直线上的整数格点上作随机游动，移动规则如下：

如果某时刻质点位于整数格点i处，



$$p, q \geq 0,\ p+q=1;$$

若以X_n表示质点在n时刻的位置，则X=$\{X_n, n \geq 0\}$为齐次马尔可夫链. 状态空间为$S=\{0, \pm 1, \pm 2, \cdots\}$.

一步转移概率为

$$p_{ij}=\begin{cases} p, & \text{i}=\pm1,\pm2,\cdots,\ \ j=i+1 \\ q, & \text{i}=\pm1,\pm2,\cdots,\ \ j=i-1 \\ 0, & |i-j|>1 \end{cases}$$

一步转移概率的直观表示—状态转移图

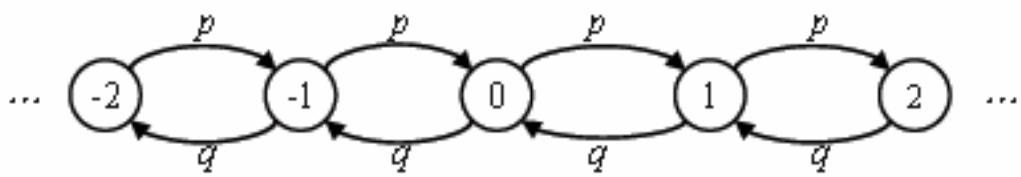
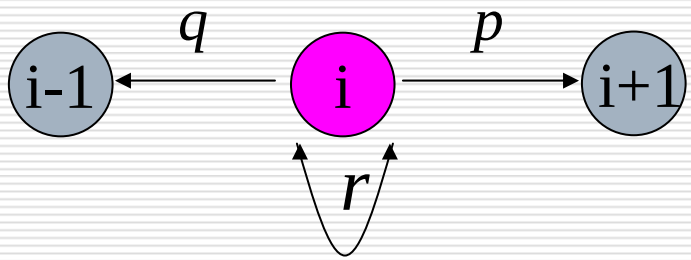


图 6.1 例 6.1.1 的状态转移图

例(补) (有限制随机游动) 设质点在直线上的{0，1，2，…，a}各点上作随机游动，移动规则如下：

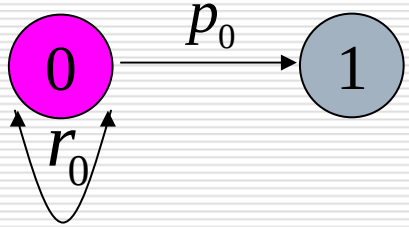
(1) 移动前$i \in \{1,2,\cdots,a-1\}$处

$$p,q,r \geq 0,\ p+q+r=1;$$



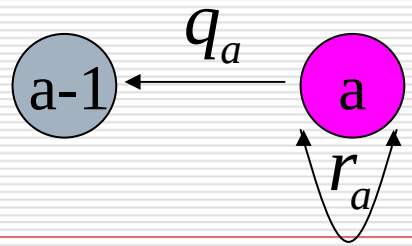
(2) 移动前$i=0$处

$$p_0,r_0 \geq 0,\ p_0+r_0=1$$



(3) 移动前$i=a$处

$$q_a,r_a \geq 0,\ q_a+r_a=1$$



若X_n表示质点在n时的位置，则X=$\{X_n, n \geq 0\}$是以$S=\{0,1,\cdots,a\}$为状态空间的齐次马氏链.

其一步转移概率矩阵为

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix} r_0 & p_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ q & r & p & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & r & p & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & q & r & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & q_a & r_a \end{bmatrix}$$

例6.1.2 群体增长 设某种生物群体的每个个体在其生存期内彼此独立的产生后代，假设每个个体都以概率p_k产生k个后代，且有

$$p_k \geq 0, \sum_k p_k = 1$$

用Xn表示第n代生物群体的总数，则$\{X_n, n \geq 0\}$是以$S = \{0,1,2,\cdots\}$为状态空间的齐次马尔可夫链.

如果记第n代的生物群体个数X_n=i，且这i个个体各自产生的后代数分别记为随机变量$\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_i$.同时$\xi_l (l = 1,2,\cdots,i)$有概率分布：

$$P(\xi_l = k) = p_k, \qquad k = 1,2,\cdots$$

则马氏链X的一步转移概率为

$$p_{ij} = P(X_{n+1} = j \,|\, X_n = i)$$

$$= P(\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_i = j) \qquad i, j \in S$$

例6.1.3 (天气变化) 如果明天是否有雨仅与今天的天气有关，而与过去的天气无关. 并设今天下雨、明天有雨的概率为a，今天无雨而明天有雨的概率为b，又假设有雨称为0状态天气，无雨称为1状态天气. X_n表示时刻n时的天气状态，则

$X=\{X_n, n\geq 0\}$是一以S={0,1}为状态空间的齐次马氏链.

其一步转移概率矩阵为

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix} a & 1-a \\ b & 1-b \end{bmatrix}$$

如果任意一天的天气与前两天的天气有关，即

昨天	今天	明天
晴（1）	晴（1）	α
晴（1）	阴（0）	β
阴（0）	晴（1）	γ
阴（0）	晴（1）	δ

如果X_n仍表示时刻n的天气状态，则 $\{X_n, n \geq 0\}$

是以下状态空间上的齐次马尔可夫链.

$S = \{(1,1),(1,0),(0,1),(1,1)\}$ 一步转移概率矩阵为

$$\mathbf{P}=\begin{pmatrix} \alpha & 1-\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & 1-\beta \\ \gamma & 1-\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta & 1-\delta \end{pmatrix}$$

例6.1.4 (网页浏览) 因特网中所有的网页用以下集合表示

$$S=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_N\}$$

另设网页 ω_i 上的超级链接数 l_i $(1\le l_i\le N)$

对应的网页集合为 $S_i\subseteq S$，用户进入网页 ω_i 后，分别以概率 $p,q(p+q=1)$ 按照两种方式选择进入一个新的网页 ω_j，一是从S中任选一个，另一个是从当前网页的超级链接中再任选一个.

若X_n表示用户n次选取后所在的网页，则$X=\{X_n, n=0,1,\cdots\}$状态空间S上的齐次马氏链。

一步转移概率为

$$p_{ij}=\begin{cases}\dfrac{q}{l}+\dfrac{p}{N}, & \omega_j \in S_i \\ \dfrac{p}{N}, & \omega_j \notin S_i\end{cases}$$

例6.1.5　设一个坛子中装有m个球，它们或是红色的，或是黑色的，从坛子中随机的摸出一球，并换入一个相反颜色的球.

设经过n次摸换,坛中黑球数为X_n,则

$X=\{X_n, n\geq 0\}$是以$S=\{0,1,\cdots,m\}$状态空间的齐次马氏链.

其一步转移概率矩阵为

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{m} & 0 & \frac{m-1}{m} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{m} & 0 & \frac{m-2}{m} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{m-1}{m} & 0 & \frac{1}{m} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

例6.1.6　设一个坛子中装有b个黑球和r个球，每次随机的从坛子中摸出一球再放回去，并加入c个同颜色的球.

设X_n表示第n次摸放后坛中的黑球数,则

$X=\{X_n, n\geq 0\}$状态空间为$S=\{b, b+c, b+2c, \cdots\}$的马氏链.

其一步转移概率为

$$p_{ij}(n) = P(X_{n+1} = j \,|\, X_n = i)$$

$$= \begin{cases} \dfrac{i}{b+r+nc}, & j = i+c \\ 1 - \dfrac{i}{b+r+nc}, & j = i \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

例6.1.7 设$\{\xi_n, n \geq 0\}$是相互独立同分布的随机变量序列

$$P(\xi_n = 1) = p, \quad P(\xi_n = -1) = 1 - p, \quad p > 0, n \geq 0$$

$$令 X_n = \xi_0 + \xi_1 + \cdots + \xi_n, \quad n \geq 0$$

验证$X=\{X_n, n \geq 0\}$是齐次马氏链.

证明 X的状态空间为$S=\{0, \mp 1, \pm 2, \cdots\}$

则对任意的$n \geq 0$,以及$i_0, i_1, \cdots, i_n, \ i_{n+1} \in S$,有

$$P(X_{n+1}=i_{n+1}\,|\,X_0=i_0,X_1=i_1,\cdots,X_n=i_n)$$

$$=\frac{P(X_0=i_0,X_1=i_1,\cdots,X_n=i_n,X_{n+1}=i_{n+1})}{P(X_0=i_0,X_1=i_1,\cdots,X_n=i_n)}$$

$$=\frac{P(\xi_0=i_0,\xi_1=i_1-i_0,\cdots,\xi_{n+1}=i_{n+1}-i_n)}{P(\xi_0=i_0,\xi_1=i_1-i_0,\cdots,\xi_n=i_n-i_{n-1})}$$

$$=P(\xi_{n+1}=i_{n+1}-i_n)$$

$$=P(X_{n+1}=i_{n+1}\,|\,X_n=i_n)$$

因此，X是齐次马氏链.