第四章 跳跃随机过程

直观讲：跳跃随机过程是指样本轨道存在跳跃点的随机过程。如计数过程、泊松过程、复合泊松过程、泊松点过程等.

本章重点学习：泊松过程、复合泊松过程

泊松过程 (第一讲)

泊松过程定义 称随机过程N={N_t,t≥0}是参数为 λ 的泊松过程，如果它满足以下三条件：

（1） $N_0 = 0$

(2) 对任意的$0 \le s < t$,增量N_t -N_t服从参数为

$\lambda(t-s)$的泊松分布，即

$$P(N_t - N_s = k) = \frac{(\lambda(t-s))^k e^{-\lambda(t-s)}}{k!}, k = 0,1,2,\cdots$$

(3)对任意的$n \ge 2$,及$0 \le t_0 < t_1 < \cdots < t_n < \cdots$,$n$个增量

$N_{t_n} - N_{t_{n-1}}, \cdots, N_{t_1} - N_{t_0}$是相互独立的随机变量.

其中(2)(3)合称为平稳独立增量性。

泊松过程的一维分布与数字特征

随机过程N={N_t,$t\geqslant 0$}是参数为 λ 的泊松过程，则

1) 对$\forall t \geq 0$, N_t服从参数为λt的泊松分布.

2) $m_N(t)=\lambda t,\qquad D_N(t)=\lambda t,\qquad t\geq 0$

$$R_N(s,t)=\lambda^2 st+\lambda\min(s,t),\qquad s,t\geq 0$$

1) 对$\forall t \geq 0$,

$$P(N_t = k) = \mathbf{P}(N_t - N_0 = k)$$

由定义

$$= \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}, k = 0, 1, 2, \cdots$$

2）由1）显然有 $m_N(t)=\lambda t, D_N(t)=\lambda t, t\geq 0.$

又对s≥0, t ≥0,不妨设s≤t,则有

$$
\begin{aligned}
R_N(s,t) &= \mathrm{E}[N_s N_t] \\
&= \mathrm{E}[(N_s-N_0)(N_t-N_s+N_s)] \\
&= \mathrm{E}[(N_s-N_0)(N_t-N_s)]+\mathrm{E}[N_s]^2 \\
&= \mathrm{E}[N_s]\mathrm{E}[N_t-N_s]+\mathrm{D}_N(s)+(m_N(s))^2 \\
&= \lambda s(\lambda t-\lambda s)+\lambda s+\lambda^2 s^2 \\
&= \lambda^2 st+\lambda s \\
&= \lambda^2 st+\lambda \min(s,t)
\end{aligned}
$$

是独立增量

对泊松过程的进一步理解

- 一般地，如果N_t表示直到时刻t为止发生的某随机事件总数, 则称实随机过程$\{N_t,t\geqslant 0\}$为计数过程.

- 计数过程的一些例子:

1.若N_t表示直到时刻t为止进入某商店的人数，则$\{N_t,t\geqslant 0\}$为计数过程.

2. 若N_t表示某球员在时刻t之前进球的个数，则$\{N_t,t\geqslant 0\}$为计数过程.

3. 若N_t表示时刻t之前诞生的总人数，则$\{N_t,t\geqslant 0\}$为计数过程.
4. 。。。。。。

从上述例子可以看到，计数过程满足：

① $\forall t, N_t \geq 0$

② N_t是非负整数

③ $\forall 0 \leq s < t, N_t \geq N_s$

④ $\forall 0 \leq s < t, N_t - N_s$ 表示时间间隔

t-*s* (或(s,t]) 内发生的随机事件数.

- 泊松过程是一类特殊的计数过程。

如果一个计数过程满足泊松过程定义中的三个条件，这个计数过程就是泊松过程。

试思考或直观判断：

前述的计数过程是否满足泊松过程的三个条件？

为进一步讨论计数过程与泊松过程的关系，

给出计数过程的严格定义和一些记号：

定义4.1.1 设$\{T_n, n=0,1,2,\cdots\}$是一列非负随机变量，满足$P(\lim_{n\to\infty} T_n=+\infty)=1$和$0=T_0<T_1<T_2<\cdots<T_n\cdots$.令

$$N_t^c=\max\{n:\ T_n\le t\},\ \ t\ge 0$$

则称随机过程$N^c=\{N_t^c:\ t\ge 0\}$是一个计数过程。

称随机序列 $T_1<T_2<\cdots<T_n\cdots$为计数过程的到达时间.

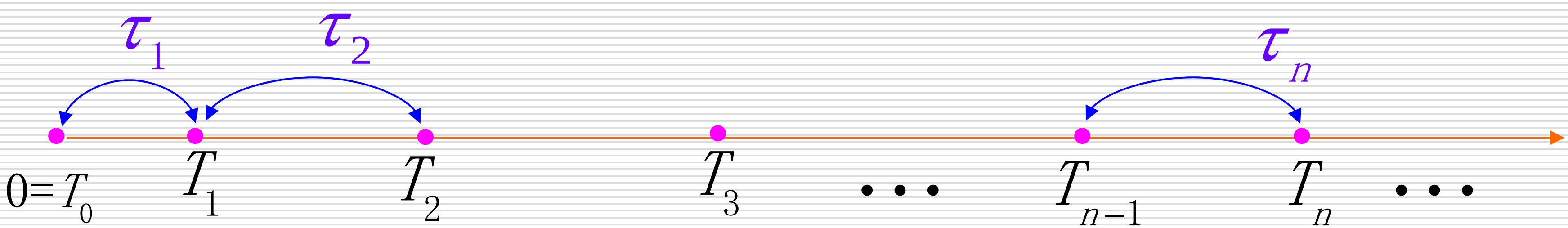
$$令\tau_n=T_n-T_{n-1},\ \ n=1,2\cdots$$

则称$\{\tau_n, n=1,2,\cdots\}$为计数过程的到达时间间隔序列.

计数过程中的两个时间序列显然有以下关系

$$T_n = \tau_1 + \tau_2 + \cdots + \tau_n = \sum_{k=1}^{n} \tau_k \qquad n = 1, 2, \cdots$$

$$\tau_n = T_n - T_{n-1}$$



易知计数过程的样本轨道是跳跃的、右连续的

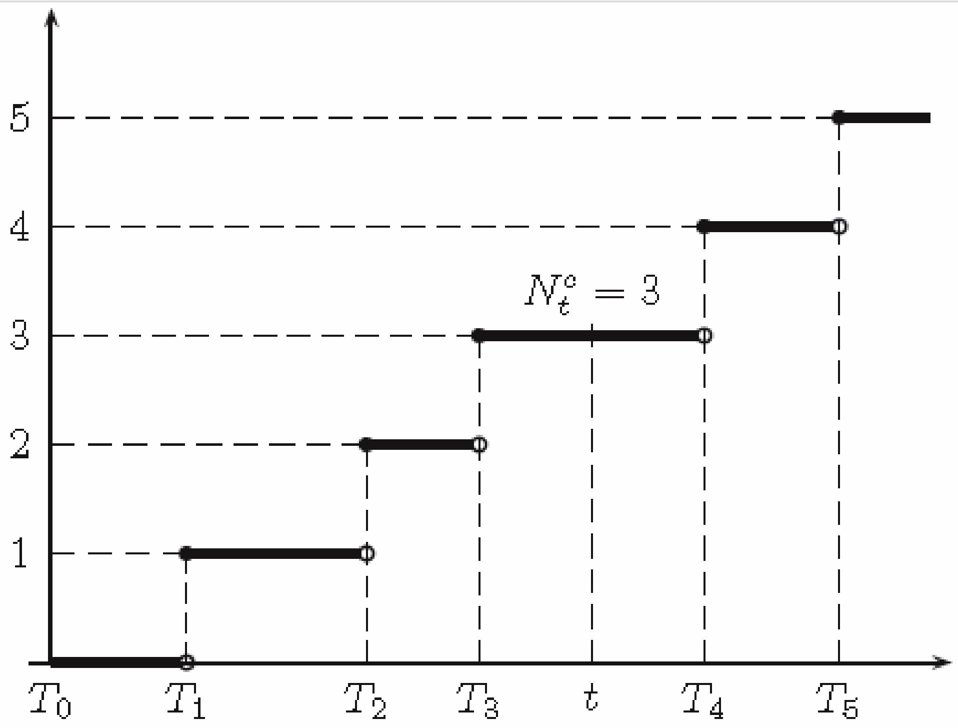


图 4.1 计数过程 N^c 的样本轨道

定理4.1.1 如果计数过程$N=\{N_t, \ t\geq 0\}$的到达时间间隔序列$\{\tau_n, n=1,2,\cdots\}$是独立的、且同服从参数为$\lambda>0$的指数分布，则该计数过程一定是参数为λ的泊松分布.

证明： 显然计数过程满足泊松过程定义中(1)，以下验证(2)(3)即可.

由$T_n = \sum_{k=1}^{n}\tau_k$知， T_n服从$\Gamma(n,\lambda)$，即参数为(n,λ)的伽玛分布.

密度函数为

$$f_{T_n}(x)=\begin{cases}\dfrac{\lambda^n}{(n-1)!}x^{n-1}e^{-\lambda x}, & x\geq 0\\ 0, & x<0\end{cases}$$

事实上，可以用数学归纳法给出证明。 如下

n=1时，显然。为此假设$T_{n-1}=\sum_{k=1}^{n-1}\tau_k$的密度函数为

$$f_{T_{n-1}}(x)=\begin{cases}\dfrac{\lambda^{n-1}}{(n-2)!}x^{n-2}e^{-\lambda x}, & x\geq 0\\ 0, & x<0\end{cases}$$

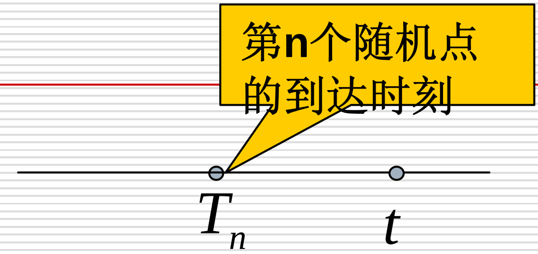
则利用$T_{n-1}=\sum_{k=1}^{n-1}\tau_k$和$\tau_n$的独立性，可得$T_n=\sum_{k=1}^{n-1}\tau_k+\tau_n$的密度函数为

$$f_{T_n}(x)=\int_0^{\infty}f_{\tau_n}(x-u)f_{T_{n-1}}(u)du$$

$$=\int_0^{\infty}\lambda e^{-\lambda(x-u)}\times\frac{\lambda^{n-1}}{(n-2)!}x^{n-2}e^{-\lambda x}du$$

$$=\frac{\lambda^n}{(n-1)!}x^{n-1}e^{-\lambda x},\qquad x\geq 0$$

又对$t \geq 0$，有



$$P(N_t = n) = P(T_n \leq t < T_{n+1})$$

$$(T_n \leq t) \Leftrightarrow (N_t \geq n)$$

$$= P(T_n \leq t) - P(T_{n+1} \leq t)$$

$$= \int_0^t \frac{\lambda^n}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-\lambda x} \mathrm{dx} - \int_0^t \frac{\lambda^{n+1}}{n!} x^n e^{-\lambda x} \mathrm{dx}$$

$$= \frac{[\lambda t]^n e^{-\lambda t}}{n!} \qquad (*)$$

由此得到，对$\forall t \geq 0, N_t$服从参数为λt的泊松分布.

现在对$0 \le s \le t$，令：

$$N_t^s = N_t - N_s,$$

则$N^s = \{N_t^s, t \ge s\}$是一个从时刻s开始的计数过程.

易知，该计数过程的到达时间间隔为

$$\begin{cases} \tau_1^s = \tau_{k+1} - (s - T_k) \\ \tau_n^s = \tau_{k+k} \end{cases}$$

利用指数分布的无记忆性知，τ_1^s仍然服从参数为λ的指数分布.

由此利用（*）式所给出的结果知，N_t^s服从参数为λ(t-s）的泊松分布.

另外，对$0 \le u < s < t$，可证

$$N_t - N_s, N_s - N_u \text{独立.}$$

以及增量的独立性.(留作练习)

定理4.2.1 泊松过程的到达时间间隔 $\{\tau_n, n=1,2,\cdots\}$ 相互独立同服从参数为 λ 指数分布.

证明: $t \ge 0$时，$F_{\tau_1}(t) = P\{\tau_1 \le t\} = P\{T_1 \le t\}$

$$= 1 - P\{T_1 > t\}$$

$$= 1 - P\{N_t = 0\}$$

$$= 1 - e^{-\lambda t}$$

对$0<t_1<t_2$，以及充分小的$\delta_i,(i=1,2)$,有

$$P\{t_1-\delta_1<T_1\le t_1+\delta_1,\ \ t_2-\delta_2<T_2\le t_2+\delta_2\}$$

$$=P\{N_{t_1-\delta_1}=0, N_{t_1+\delta_1}-N_{t_1-\delta_1}=1,\ \ N_{t_2-\delta_2}-N_{t_1+\delta_1}=0, N_{t_2+\delta_2}-N_{t_2-\delta_2}=1\}$$

利用独立增量

$$=\frac{[\lambda(t_1-\delta_1)]^0}{0!}e^{-\lambda(t_1-\delta_1)}\cdot\frac{(2\lambda\delta_1)}{1!}e^{-2\lambda\delta_1}\cdot\frac{[\lambda(t_2-\delta_2-t_1-\delta_1)]^0}{0!}e^{-\lambda(t_2-\delta_2-t_1-\delta_1)}\cdot\frac{(2\lambda\delta_2)}{1!}e^{-2\lambda\delta_2}$$

$$=4\lambda^2\delta_1\delta_2e^{-\lambda(t_2+\delta_2)}$$

可得(T_1, T_2)的联合密度为 $$f_{T_1,T_2}(t_1,t_2)=\begin{cases}\lambda^2e^{-\lambda t_2}, & t_1>t_2>0\\ 0, & 其它\end{cases}$$

注意到:$\begin{cases}\tau_1=T_1\\ \tau_2=T_2-T_1\end{cases}$,进一步可得$(\tau_1,\ \tau_2)$的联合密度为

$$f_{\tau_1,\tau_2}(t_1,t_2)=\begin{cases}\lambda^2 e^{-\lambda(t_1+t_2)}, & t_1,t_2>0\\ 0, & 其它\end{cases}$$

则得τ_1、τ_2的密度分别为

$$f_{\tau_1}(t_1)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda t_1}, & t_1>0\\ 0, & 其它\end{cases}\qquad f_{\tau_2}(t_2)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda t_2}, & t_2>0\\ 0, & 其它\end{cases}$$

因此有 $f_{\tau_1,\tau_2}(t_1,t_2)=f_{\tau_1}(t_1)\cdot f_{\tau_2}(t_2)$, 即$\tau_1$、$\tau_2$独立.

类似可以证 $\tau_1,\tau_2\cdots\tau_n,\cdots$独立且同服从参数为$\lambda$的指数分布.

例2.3.3 两个独立的泊松过程之和仍然是泊松过程.

例4.1.1　上随机过程的教室有两入口B和 C.

对时刻$t \ge 0$, 设从B口进入教室的学生人数为N_t^B,

从C口进入教室的学生人数为N_t^C,并假设随机过程

$N^B=\{N_t^B, t \ge 0\}$和$N^C=\{N_t^C, t \ge 0\}$分别参数为λ_B，λ_C

的泊松过程，且相互独立。

计算(1)在一个固定的3分钟内无学生进入A教室的概率

(2)学生到达A教室的时间间隔的均值

（3）已知一个学生进入了A教室，则该生从C口进入的概率为多大?

泊松过程 (第二讲)

泊松过程的等价定义

称随机过程N={N_t,t≥0}是参数为 λ 的泊松过程，如果它满足以下条件：

① $N_0 = 0$

② N是平稳的独立增量过程

③ $P\{N_{t+h} - N_t = 1\} = \lambda h + \circ(h)$

④ $P\{N_{t+h} - N_t \geq 2\} = \circ(h)$

泊松过程两个定义的等价性由下面的两个定理验证

定理4.2.2 参数为 λ 的泊松过程N={N_t,t≥0}一定满足以下性质（0-1律）：

$$1)\quad \mathrm{P}\{N_{t+h}-N_t=0\}=1-\lambda h+\circ(h)$$

$$2)\quad \mathrm{P}\{N_{t+h}-N_t=1\}=\lambda h+\circ(h)$$

其中1)、2)称为泊松过程的0-1律

证明: 用泊松过程的定义并结合 $e^{-\lambda h}$ 的泰勒展式易证上述结论成立.

0-1律的直观解释：在充分小的时间区间内，随机事件要么出现1次，要么不出现．其仿真图形如下：

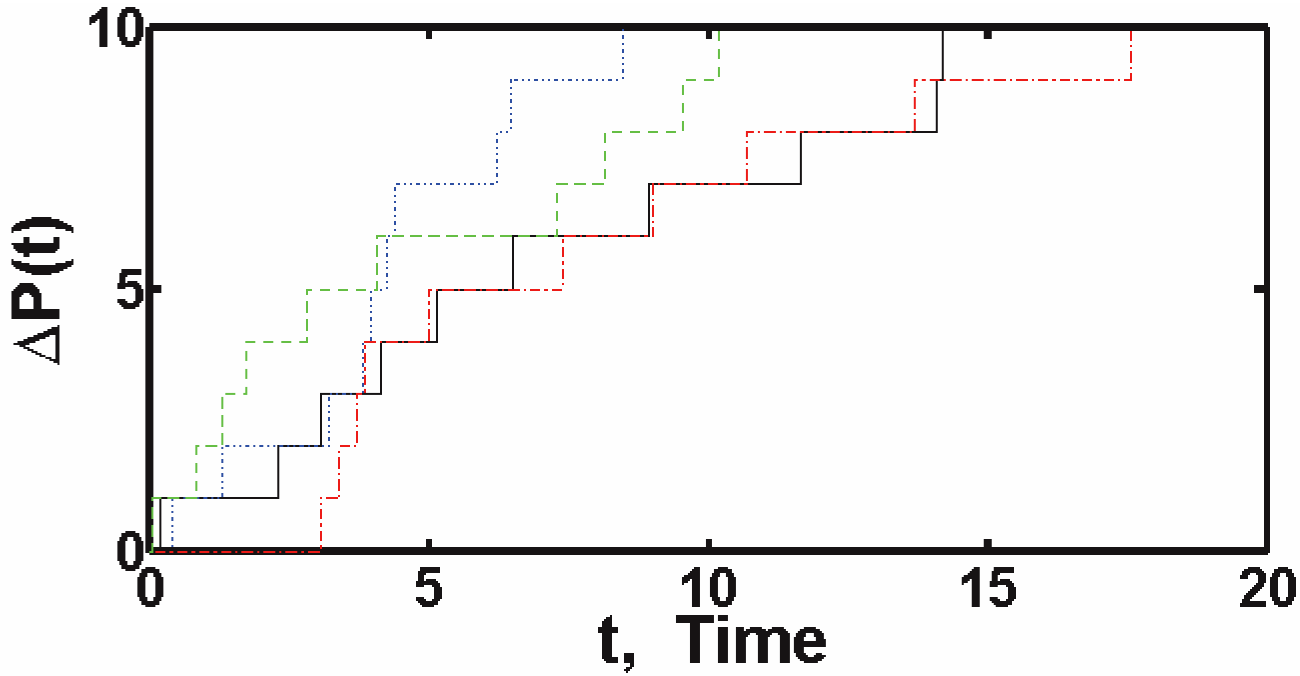


图 4.3 四条泊松过程跳 0-1 律的仿真

定理4.2.3 如果计数过程$N^c=\{N_t^c:\ t\geq 0\}$具有平稳独立增量性, 且满足0-1律， 即

$$1)\quad \mathrm{P}\{N_{t+h}-N_t=0\}=1-\lambda h+\circ(h)$$

$$2)\quad \mathrm{P}\{N_{t+h}-N_t=1\}=\lambda h+\circ(h)$$

则该计数过程一定是参数为λ的泊松过程.

证明: 记 $q_k(t)=P(N_t=k), k=0,1,\cdots,$ 对充分小的$h>0,$ 可计算

$$q_0(t+h)=P(N_{t+h}=0)=P(N_{t+h}-N_t=0,N_t=0)$$

利用条件中的平稳增量性

$$=P(N_{t+h}-N_t=0)P(N_t=0)$$

独立增量性

$$=[1-\lambda h+\circ(h)]q_0(t)$$

$$=q_0(t)-[\lambda h-\circ(h)]q_0(t)$$

则得 $\dfrac{q_0(t+h)-q_0(t)}{h}=-\lambda q_0(t)+\dfrac{\circ(h)}{h}$， 令 $h\to 0$，两边取极限，得

$$q_0'(t)=-\lambda q_0(t)$$

解此方程，并注意到$q_0(0)$=1，得 $q_0(t)=e^{-\lambda t}$

进一步，对 $k=1,2,\cdots$ 计算

$$q_k(t+h)=P(N_{t+h}=k)$$

$$=P(N_t=k,N_{t+h}-N_t=0)+P(N_t=k-1,N_{t+h}-N_t=1)+\sum_{j=2}^{k}P(N_t=k-j,N_{t+h}-N_t=j)$$

$$=q_k(t)q_0(h)+q_{k-1}(t)q_1(h)+\sum_{j=2}^{k}q_{k-j}(t)q_j(h)$$

$$=q_k(t)[1-\lambda h+\circ(h)]+q_{k-1}(t)[\lambda h+\circ(h)]+\circ(h)$$

由上式得 $\dfrac{q_k(t+h)-q_k(t)}{h}=-\lambda q_k(t)+\lambda q_{k-1}(t)+\dfrac{\circ(h)}{h}$， 令 $h\to 0$，得

$$q_k'(t)+\lambda q_k(t)=\lambda q_{k-1}(t) \qquad (*)$$

对迭代方程(*)，k=1时，注意到$q_0(0)=1$，$q_0(t)=e^{-\lambda t}$，解得$q_1(t)=\lambda t e^{-\lambda t}$，

现假设对k−1时，成立有 $q_{k-1}(t)=\dfrac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!}e^{-\lambda t}$

则利用迭代方程(*)，可解得

$$q_k(t)=\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t},$$

$P(N_t=k)=\dfrac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}$， $k=0,1,\cdots$,即计数过程为泊松过程.

泊松过程基本练习题

1.到达某车站的顾客数是一泊松过程,平均每10分钟到达5位顾客,试计算在20分钟内至少有10位顾客到达车站的概率.

解：令N_t表示[0,t)内到达车站的顾客数，则$\{N_t,t\geq 0\}$ 是泊松过程，

参数为　$\lambda=5/10=0.5$

则20分钟内至少有10位顾客到达车站的概率

$$P(N_{20}\geq 10)=1-\sum_{k=0}^{9}\frac{(10)^k e^{-10}}{k!}=0.5402$$

2. 某机械装置在[0,t)内发生的震动次数N(t)是强度为5次/小时的泊松过程,且当第100次震动发生时,此机械装置发生故障.试计算（1）该装置寿命的概率密度函数;
（2）该装置的平均寿命;
（3）两次震动时间间隔的概率密度函数;
（4）相邻两次震动的平均时间间隔.

解:（1）由题意装置的寿命即为T_{100}

(2) 即为 $E[T_{100}]=100/5=20$

(3)两次震动时间间隔为参数为5的指数分布.

（4） $E[\tau_n]=\int_0^{\infty} t5e^{-5t}dt=0.2$

泊松过程中到达时间的条件分布

请思考问题:

设 $\{N_t,t\geqslant 0\}$ 是参数为 λ 的泊松过程，已知在[0，t)内仅有一个随机点到达，T_1是其到达时间, 则该随机点的到达时间T_1服从怎样的概率分布?

例4.2.1 设N={N_t,t≥0}是参数为 λ 的泊松过程.

验证：N_t=1的条件下，过程的第一个随机点到达时间T_1服从[0,t]上的均匀分布.即

$$P(T_1 \le s | N_t = 1) = \frac{s}{t}$$

证明：对 0<s<t时,有

$$P(T_1 \le s | N_t = 1) = \frac{P(T_1 \le s, N_t = 1)}{P(N_t = 1)}$$

$$= P\{N_s = 1, N_t - N_s = 0\} / P(N_t = 1)$$

$$= \lambda s e^{-\lambda s} \cdot e^{-\lambda(t-s)} / \lambda t e^{-\lambda t} = \frac{s}{t}$$

请思考更一般的问题：

设 $\{N_t, t \geqslant 0\}$ 是参数为 λ 的泊松过程，若已知在[0，t)内仅有n个随机点到达，则随机点的n个到达时刻

$T_1 < T_2 < \ldots < T_n$服从怎样的概率分布?

例4.2.1(续)设 $\{N_t,t\geq 0\}$ 是参数为 λ 的泊松过程. 若已知在[0，t)内仅有n个随机点到达，则随机点的n个到达时刻$T_1<T_2<\ldots<T_n$有以下联合概率密度函数:

$$p(u_1,u_2,\cdots,u_n)=\begin{cases}\dfrac{n!}{t^n}, & 0<u_1<u_2<\cdots<u_n\leq t\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

证明: 对$0<u_1<u_2<\cdots<u_n\leq t$，取充分小的正数$h_1,h_2,\cdots,h_n$，使得$u_k<T_k\leq u_k+h_k$，且各小区间$(u_k,u_k+h_k](k=1,2,\cdots n)$互不相交，则有

$$P(u_k < T_k \le u_k + h_k,\quad k = 1, 2, \cdots n \mid N_t = n)$$

$$= \frac{P(u_k < T_k \le u_k + h_k,\quad k = 1, 2, \cdots n, N_t = n)}{P(N_t = n)}$$

$$= \frac{P(N_{h_1} = 1, N_{h_2} = 1, \cdots, N_{h_n} = 1, N_{t-h_1-h_2-\cdots-h_n} = 0)}{P(N_t = n)}$$

$$= \frac{\lambda h_1 e^{-\lambda h_1} \cdot \lambda h_2 e^{-\lambda h_2} \cdots \lambda h_n e^{-\lambda h_n} \cdot e^{-\lambda(t-h_1-\cdots-h_n)}}{(\lambda t)^n e^{-\lambda t} / n!}$$

$$= \frac{n!}{t^n} h_1 h_2 \cdots h_n$$

所以 $(T_1,T_2,\cdots,T_n)$ 的联合密度函数为

$$p(u_1,u_2,\cdots,u_n)=\begin{cases}\dfrac{n!}{t^n}, & 0\le u_1<u_2<\cdots<u_n\le t\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

泊松过程的进一步练习(补充)

例1 设$\{N_t^1, t\geq 0)\}$和$\{N_t^2, t\geq 0)\}$分别是参数为 λ_1和 λ_2.

且相互独立的泊松过程，$S_k^{(1)}$ 表示过程$\{N_t^1, t\geq 0)\}$

第 k 次事件出现的时间， $S_k^{(2)}$ 表示过程$\{N_t^2, t\geq 0)\}$

第 k 次事件出现的时间.

试计算：

(1) 过程$\{N_t^1, t\geq 0)\}$中第一次事件的出现先于过程

$\{N_t^2, t\geq 0)\}$第一次事件出现的概率，即$P(S_1^{(1)} < S_1^{(2)})$

(2) $P(S_k^{(1)} < S_1^{(2)})$

解题思路:

考虑两个随机变量的联合密度函数,再计算有关的概率

$$P(S_1^{(1)} < S_1^{(2)}) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$$

$$P(S_k^{(1)} < S_1^{(2)}) = \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}\right)^k$$

例2 某中子计数器对到达计数器的粒子只是每隔一个记录一次，假设粒子是按照比率每分钟4个的泊松过程到达，令T是两个相继被记录粒子之间的时间间隔（单位：分钟）

试求：1）T的概率密度；

2）$P(T \geq 1)$

解题思路:

由过程的平稳独立增量性.

可知相继被记录的时间间隔是独立同分布的.

$$1)\ f_T(t)=\begin{cases}16te^{-4t}, t\geq 0\\ 0, \quad t<0\end{cases}; \qquad 2) = 5e^{-4}$$

例3 设两个相互独立的、强度分别为λ_1和λ_2的Poisson过程$\{N_t^1, t \geq 0)\}$ 和 $\{N_t^2, t \geq 0)\}$.试证: 在过程$\{N_t^1, t \geq 0)\}$中的两个相邻事件间，过程$\{N_t^2, t \geq 0)\}$出现k个事件的概率为

$$p = (\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2})(\frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2})^k, k = 0,1,2$$

证明思路:

考虑概率 $P(N_T^2=k)$,

其中T为过程N_t^1的相邻事件间隔.

再应用全概率公式。

泊松过程 (第三讲)

几何泊松过程

设 $\{N_t,t\geq 0\}$ 是参数为 λ 的泊松过程,常数 $\sigma>-1$ ，定义

$$N_t^{ge}=e^{N_t\ln(\sigma+1)-\lambda\sigma t}$$

$$=(\sigma+1)^{N_t}e^{-\lambda\sigma t},\quad t\geq 0$$

称 $N^{ge}=\{N_t^{ge},t\geq 0\}$ 为几何泊松过程.

例4.2.3 设$N^{ge}=\{N_t^{ge},t\ge 0\}$为几何泊松过程，对任意的 $0\le s<t$，验证

$$E\left[\frac{N_t^{ge}}{N_s^{ge}}\right]=1$$

证明：
$$E\left[\frac{N_t^{ge}}{N_s^{ge}}\right]=E\left[e^{(N_t-N_s)\ln(\sigma+1)-\lambda\sigma(t-s)}\right]$$
$$=e^{-\lambda\sigma(t-s)}E\left[e^{N_{t-s}\ln(\sigma+1)}\right]$$
$$=e^{-\lambda\sigma(t-s)}E\left[(\sigma+1)^{N_{t-s}}\right]$$
$$=e^{-\lambda\sigma(t-s)}\sum_{n=0}^{\infty}(\sigma+1)^n\frac{[\lambda(t-s)]^n}{n!}e^{-\lambda(t-s)}$$
$$=e^{-\lambda(\sigma+1)(t-s)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{[\lambda(\sigma+1)(t-s)]^n}{n!}=e^{-\lambda(\sigma+1)(t-s)}\times e^{\lambda(\sigma+1)(t-s)}=1$$

非齐次泊松过程

定义4.2.1 设N= $\{N_t, t \geqslant 0\}$ 是独立增量过程，

$\lambda(t)$是$[0,+\infty) \to [0,+\infty)$的函数，如果

$$P(N_t - N_s = k) = \frac{[m(t)-m(s)]^k}{k!} e^{-[m(t)-m(s)]}, k = 0,1,2,\cdots, 0 \le s < t$$

则称N是强度函数为$\lambda(t)$的非齐次泊松过程.

其中函数$m(t) := \int_0^t \lambda(u)du$称为非齐次泊松过程的均值函数.

函数$m(t)=\int_0^t \lambda(u)du$称为非齐次泊松过程的均值函数.

事实上，由非齐次泊松过程的定义知道，对于任意的t≥0,

$$E[N_t]=\sum_{k=0}^{\infty} k P(N_t=k)$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty} k \frac{[m(t)]^k}{k!} e^{-[m(t)]}$$

$$=m(t)e^{-[m(t)]}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{[m(t)]^{k-1}}{(k-1)!}$$

$$=m(t)$$

非齐次泊松过程的等价性定义

如果计数过程N={N_t,$t\geqslant 0$}是独立增量过程，且满足：

1）$P\{N_{t+h}-N_t=0\}=1-\lambda(t)h+\circ(h)$

2）$P\{N_{t+h}-N_t=1\}=\lambda(t)h+\circ(h)$

则称N是强度函数为$\lambda(t)$的非齐次泊松过程.

当 $\lambda(t)=\lambda$ 时，非齐次泊松过程，就是齐次泊松过程.

注意1：非齐次泊松过程中，不再强调平稳增量性，即
事件在不同的时间发生的可能性可以不同.

因此，非齐次泊松过程因此可以成为一些实际现象得合理模型.

例（补） 小飞经营的食品店从上午8点到11点顾客有一个稳定增长的平均到达率，即在8点及后每小时5个顾客开始，11点到达最大值每小时20. 从上午11点到下午1点平均到达率基本稳定在每小时20.从下午1点到5点稳定下降，直至5点关门时为每小时12.

假设在不相交时段的顾客数是独立的.

试完成：1) 为上述问题选择一个合适的概率模型；

2) 计算在周五上午8:30-9:30将没有顾客的概率；

3) 上题时间段中的平均到达人数是多少?

注意2：非齐次泊松过程与齐次泊松过程可以相互变换得到.

以下两个例题予以说明:

例4.2.5 设非齐次泊松过程$N=\{N_t,t\geq 0\}$的均值函数$m(t)$满足$m(\infty):=\lim_{t\to\infty}m(t)=\infty$,定义函数$m(t)$的反函数为

$$\theta(t)=\min\{s\geq 0:m(s)\geq t\},\quad t\geq 0$$

验证： 过程$\mathrm{M}=\{N_{\theta(t)},t\geq 0\}$是参数为1的齐次泊松过程.

证明：注意到：函数$\theta(t)$是单调不减，右连续的，且$m(\theta(t))=t$

所以过程$\mathrm{M}=\{N_{\theta(t)},t\geq 0\}$具有独立增量性.

$$\text{又}P(N_{\theta(t)}-N_{\theta(s)}=k)=\frac{[m(\theta(t))-m(\theta(s))]^k}{k!}e^{-[m(t)-m(s)]}$$

$$=\frac{(t-s)^k}{k!}e^{-(t-s)},k=0,1,2,\cdots,0\leq s<t$$

所以过程$\mathrm{M}=\{N_{\theta(t)},t\geq 0\}$还具有平稳增量性，

且增量服从参数为1的泊松分布.

例(补) 设$N=\{N_t,t\geq 0\}$是参数为1的齐次泊松过程，若给定函数$\lambda(t)>0,t\geq 0.$令

$$m(t)=\int_0^t \lambda(u)du,$$

则过程$\{N_{m(t)},t\geq 0\}$是强度函数为$\lambda(t)$的非时齐泊松过程.

复合泊松过程

定义2.2.1 设N= $\{N_t, t\geq 0\}$ 是参数为 λ 的泊松过程, $\{Y_k, k=1,2,\ldots\}$是一列独立同分布的随机变量, 且与N独立.

$$\text{令} X_t = \sum_{k=1}^{N_t} Y_k, t \geq 0$$

称 X=$\{X_t, t\geq 0\}$为复合泊松过程.

若将N_t表示[0,t)内的随机点数, Y_k表示第k个随机点所携带的某种(能)量,则总量为

$$X_t=\sum_{k=1}^{N_t}Y_k$$

即 $X=\{X_t,t\geqslant 0\}$为复合泊松过程.

复合泊松过程也可以由随机游动和泊松过程的表示.

复合泊松过程满足平稳的独立增量性.
(证明留作练习)

例4.3.1 设随机变量$Y_n(n=1,2,\ldots)$存在数学期望$\mu=\mathrm{E}Y_n$和方差$\sigma^2=DY_n$，

试计算复合泊松过程的均值函数、方差函数和相关函数.

解

$$m_X(t)=\mathrm{E}[X_t]=\mathrm{E}[\sum_{n=1}^{N_t}Y_n]$$

$$=\mathrm{E}[\mathrm{E}(\sum_{n=1}^{N_t}Y_n\,|\,N_t)]$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\mathrm{E}[\sum_{n=1}^{N_t}Y_n\,|\,N_t=m]P(N_t=m)$$

Y_n与N_t独立

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \mathrm{E}[\sum_{n=1}^{m} Y_n] P(N_t = m)$$

Y$_n$独立同分布

$$= \sum_{m=0}^{\infty} m\mu P(N_t = m) = \mu\lambda t.$$

类似计算 $D_X(t) = \lambda t \mathrm{E}[Y_n^2] = \lambda t \sigma^2$

利用平稳独立增量性，有

$\mathrm{R}_X(s,t) = \mathrm{E}[X_s X_t]$ 不妨设$0 \le s < t$

$$= \mathrm{E}[X_s(X_t - X_s + X_s)]$$

$$= m_X(s) m_X(t-s) + \Phi_X(\min(s,t)). \quad s,t \ge 0$$

例1　设移民到某地区定居的户数是一Poisson过程，平均每周有2户定居，即 λ =2.

如果每户的人口数是随机变量,一户4人的概率为1/6，一户3人的概率为1/3，一户2人的概率为1/3，一户1人的概率为1/6，且每户的人口数是相互独立的，求在五周内移民到该地区的人口数的数学期望和方差.

$$\mathrm{E}[Y_n]=\frac{5}{2},\quad \mathrm{E}[Y_n^2]=\frac{43}{6}$$

$$\mathrm{E}[X_5]=25,\quad \mathrm{D}[X_5]=\frac{215}{3}$$

例4.3.3 设随机变量列$\{\xi_k,k=1,2,\cdots\}$独立同服从0-1分布，

且 $P(\xi_k=1)=p>0,\ \ P(\xi_k=0)=1-p,$

参数为λ的泊松分布N与上述0-1随机序列独立. 现对$t\geq 0,$

定义 $M_t=S_{N_t}\quad L_t=N_t-M_t$

其中，$S_n=\sum_{k=1}^{n}\xi_k$.验证：过程$L=\{L_t,t\geq 0\}$和$M=\{M_t,t\geq 0\}$

是两个独立的分别服从参数为λp和$\lambda(1-p)$的泊松过程.

证明： 对任意的$0\leq s<t$, 记随机事件

$$A=\{M_t-M_s=m\quad L_t-L_s=k\}\ \text{(事件还等于)}$$

$$=\{N_t-N_s=m+k\quad S_{N_t}-S_{N_s}=m\}$$

注意到随机变量族$\{M_u, L_u : u \le s\}$由$\{N_u$： $u \le s, \xi_1, \cdots, \xi_{N_s}\}$决定，因此， A与$\{M_u, L_u : u \le s\}$独立.

$$P(A)=\sum_{n=0}^{\infty} P(A, N_s = n)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P(N_s = n, N_t - N_s = m+k \quad S_{N_t} - S_{N_s} = m)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P(N_s = n, N_t - N_s = m+k \quad S_{m+n+k} - S_n = m)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P(N_s = n, N_t - N_s = m+k\,) P(S_{m+n+k} - S_n = m)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P(N_s = n, N_t - N_s = m+k\,) P(S_{m+k} = m)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{P}(\mathrm{N}_s=n,\mathrm{N}_t-\mathrm{N}_s=m+k)\,\mathrm{P}(S_{m+k}=m)$$

$$=\mathrm{P}(\mathrm{N}_{t-s}=m+k)\,\mathrm{P}(S_{m+k}=m)$$

$$=\frac{\lambda^{m+k}(t-s)^{m+k}}{(m+k)!}e^{-\lambda(t-s)}\frac{(m+k)!}{m!k!}p^m(1-p)^k$$

$$=\frac{\lambda^m p^m(t-s)^m}{m!}e^{-\lambda p(t-s)}\times\frac{\lambda^k(1-p)^k}{k!}e^{-\lambda(1-p)(t-s)}.$$

作业：2，3，4(n=2时)，

5(a,b)，6，8，9