《矢量和复变函数》作业 5

2012.9.13

1. 设 S 为上半球面 $x^2+y^2+z^2=a^2(z\geqslant 0)$，求矢量场 $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$ 向上穿过 S 的通量 Φ.

[提示：注意 S 的法矢 $\boldsymbol{n}$ 与 $\boldsymbol{r}$ 同指向].

4. 求 div $\boldsymbol{A}$ 在给定点处的值：

(1) $\boldsymbol{A}=x^3\boldsymbol{i}+y^3\boldsymbol{j}+z^3\boldsymbol{k}$ 在点 $M(1,0,-1)$ 处；

(2) $\boldsymbol{A}=4x\boldsymbol{i}-2xy\boldsymbol{j}+z^2\boldsymbol{k}$ 在点 $M(1,1,3)$ 处；

(3) $\boldsymbol{A}=xyz\boldsymbol{r}(\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k})$ 在点 $M(1,3,2)$ 处.

6. 设 $\boldsymbol{a}$ 为常矢，$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$，$r=|\boldsymbol{r}|$，求

(1) $\mathrm{div}(r\boldsymbol{a})$；(2) $\mathrm{div}(r^2\boldsymbol{a})$；(3) $\mathrm{div}(r^n\boldsymbol{a})$（$n$ 为整数）.

7. 求使 $\mathrm{div}\, r^n\boldsymbol{r}=0$ 的整数 n（$\boldsymbol{r}$ 与 r 同上题）.

8. 设有无穷长导线与 Oz 轴一致，通以电流 $I\boldsymbol{k}$ 后，在导线周围便产生磁场，其在点 $M(x,y,z)$ 处的磁场强度为

$$\boldsymbol{H}=\frac{I}{2\pi r^2}(-y\boldsymbol{i}+x\boldsymbol{j}),$$

其中 $r=\sqrt{x^2+y^2}$，求 div $\boldsymbol{H}$.

9. 设 $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$，$r=|\boldsymbol{r}|$，求：

(1) 使 $\mathrm{div}[f(r)\boldsymbol{r}]=0$ 的 $f(r)$；

(2) 使 $\mathrm{div}[\mathbf{grad}\, f(r)]=0$ 的 $f(r)$.

10. 已知函数 u 沿封闭曲面 S 向外法线的方向导数为常数 C，Ω 为 S 所围的空间区域，A 为 S 的面积. 证明

$$\iiint_\Omega \mathrm{div}(\mathbf{grad}\, u)\,\mathrm{d}v = CA.$$