15

初等映射

分式线性映射的重点是两种表达形式	
三点法	$\left(\dfrac{w-w_1}{w-w_2}\right)\Big/\left(\dfrac{w_3-w_1}{w_3-w_2}\right)=\left(\dfrac{z-z_1}{z-z_2}\right)\Big/\left(\dfrac{z_3-z_1}{z_3-z_2}\right)$
对称点法	上半平面 → 单位圆 $w=e^{i\varphi}\left(\dfrac{z-\lambda}{z-\bar{\lambda}}\right)$

初等函数都是解析函数，因此初等函数映射都是保角映射。

一、幂函数

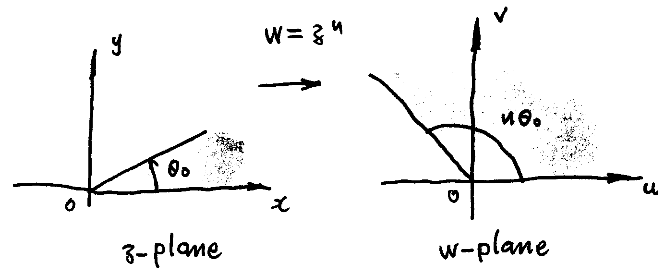
$w=z^n$ （$n\geq 2$，自然数）

此一函数在 z-plane 处处可导。

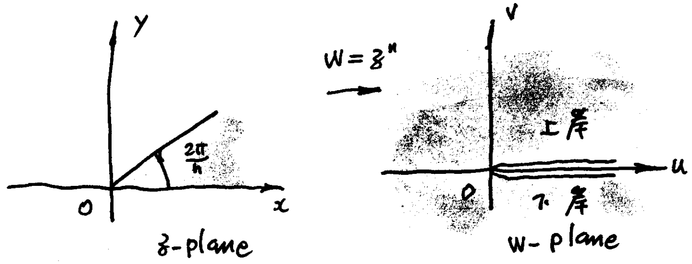
$$\frac{dw}{dz}=nz^{n-1}$$

于是除 $z=0$ 之外，映射处处保角。

Note：$z=0$ 没有保角形，其特点是以原点为顶的角形域映射为 w-plane 以原点为顶点的角形域，张角扩展成原来的 n 倍。



张角扩展成 n 倍

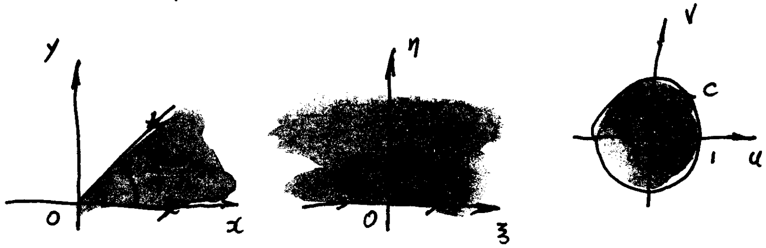


Note 由 $\frac{2\pi}{n}$ (z-plane) 映射到 2π (w-plane)

其中出现上岸, 下岸和裂缝.

【例-1】 把 $0<\mathrm{Arg}\, z<\frac{\pi}{4}$ 的角形域

映射为单位圆内, 即 $|w|<1$



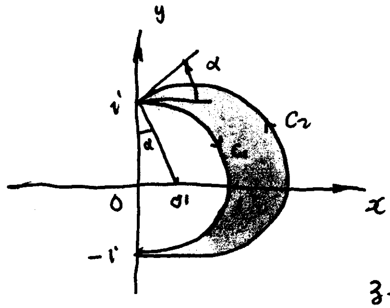
z-plane　　ζ-plane　　w-plane

$$\zeta = z^4 \longrightarrow w=\frac{\zeta-i}{\zeta+i}$$

最后给出 $w=\dfrac{z^4-i}{z^4+i}$

【例-2】 把图中由圆弧 C_1 和 C_2 所围成

的交角为 α 的月牙域映射成如下角形域



z-plane

$$\varphi_0 < \mathrm{Arg}\, w < \varphi_0+\alpha$$

的一个映射.

【解】 深入观察可知, C_1 的圆弧半径为 1,

C_2 圆弧的半径 $\frac{1}{\cos\alpha}$.

(1). 先把 C_1 和 C_2 的交点 i, $-i$ 分别映射

为 $\zeta=0$ 和 $\zeta=\infty$. 则 C_1 变成 x 轴

z-plane	ζ-plane
i	0
$-i$	∞
1	1

令 $\zeta = k\,\frac{z-i}{z+i}$

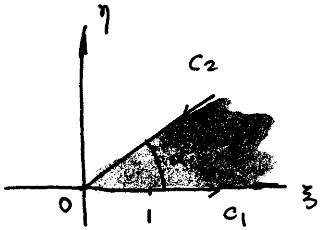
又以写出 $k\left(\frac{1-i}{1+i}\right)=1$

$$k=\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)^2}{2}=i$$

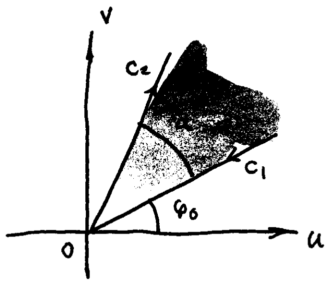
得到 $\zeta = i\left(\frac{z-i}{z+i}\right)$

再作旋转映射，又得

$$w = e^{i(\varphi_0+\frac{\pi}{2})}\left(\frac{z-i}{z+i}\right)$$



ζ-plane



w-plane

【例-3】把有裂缝 $Re(z)=a$，$0\leq Im(z)\leq h$ 的上半平面映射成上半平面

$$w=\sqrt{(z-a)^2+h^2}+a$$

另见下页图.

二. 指数函数，对数函数

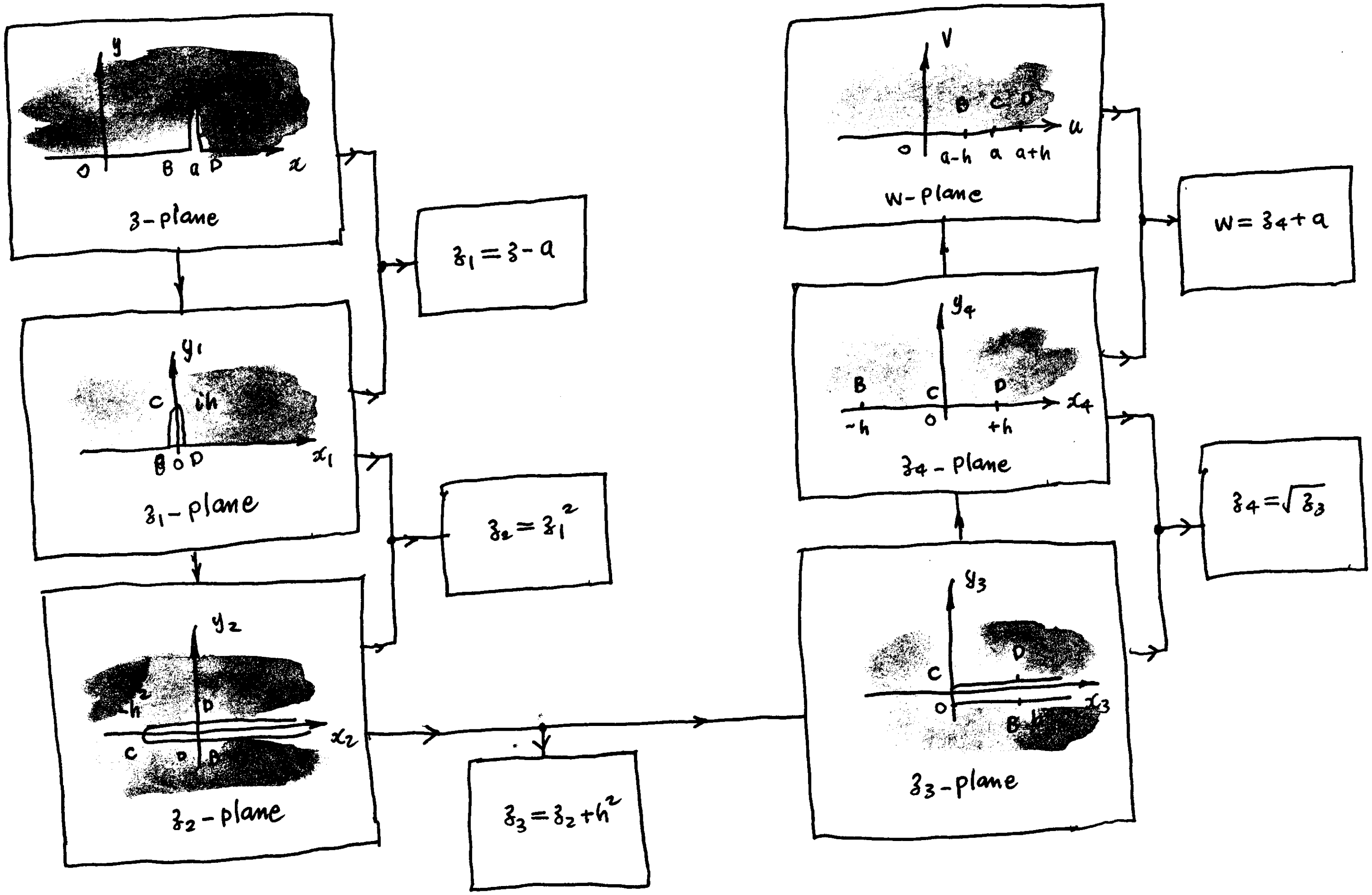
$$w=e^z\,,\qquad \frac{dw}{dz}=e^z\neq 0$$

即在全平面均解析. 设

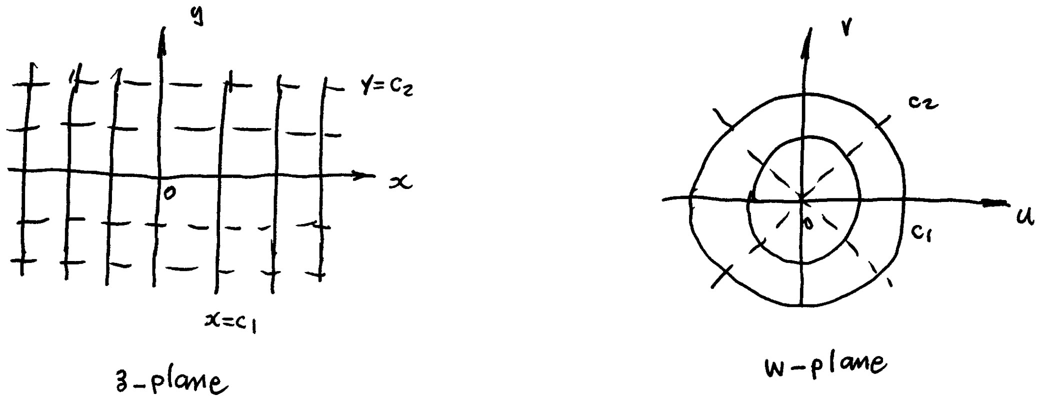
$$\begin{cases} w=\rho e^{i\varphi} \\ z=x+iy \end{cases}$$

很易得到 $\begin{cases} \rho=e^x \\ \varphi=y \end{cases}$

由此可知，$x=$ constant 被映射成 w 平面上圆周 $\rho=$ 常数，而 $y=$ constant 映射成射线 $\varphi=$ 常数.



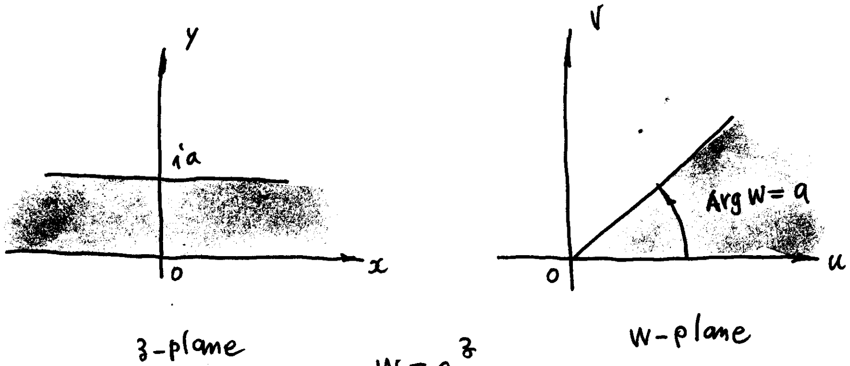
$W=\sqrt{(z-a)^2+h^2}+a$ 映射



$w=e^z$ 映射

特别是指数函数把水平条带 $0<\mathrm{Im}(z)<a$ $(a\le 2\pi)$

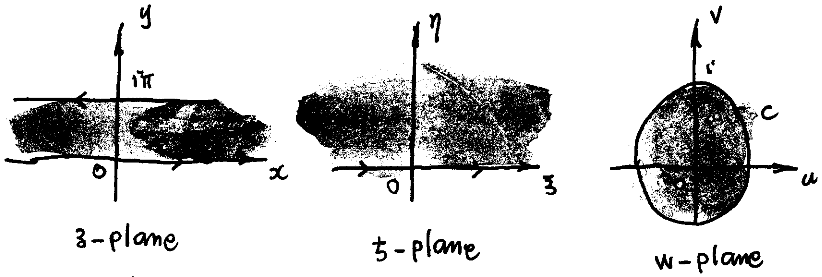
映射成 $0<\mathrm{Arg}\,w<a$ 的角形区域



$w=e^z$

$z=\ln w$

【例-4】把条带区域 $0<\mathrm{Im}(z)<\pi$ 映射成单位圆内 $|w|<1$ 的一个映射。

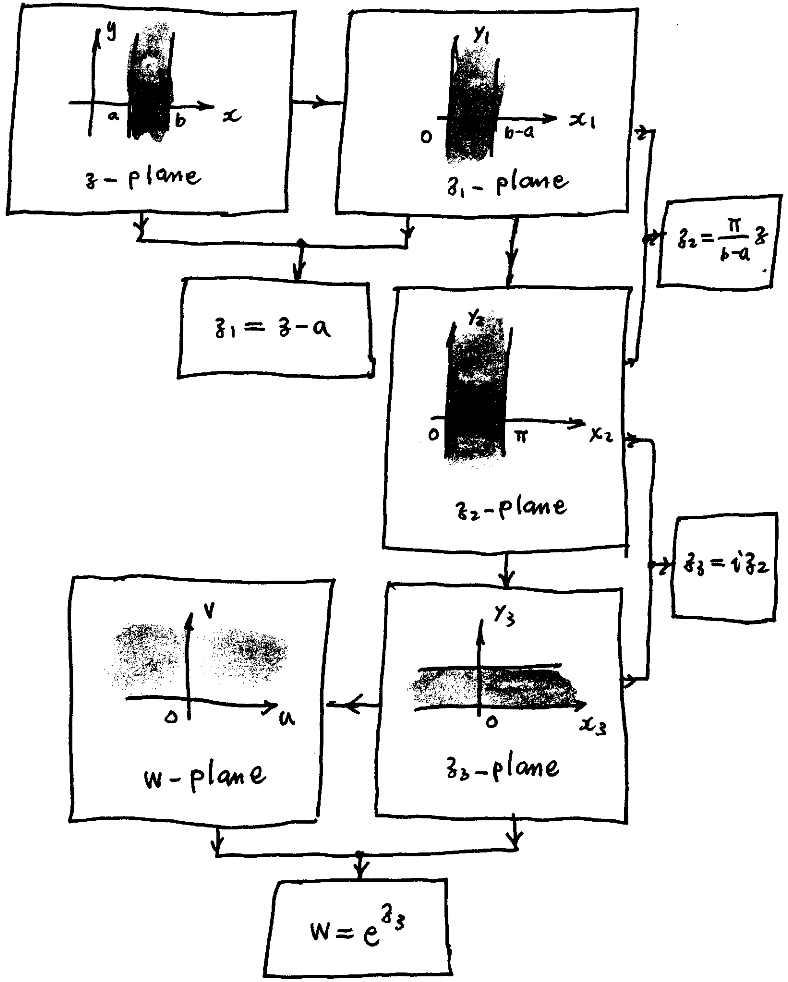


$$\zeta = e^{z} \longrightarrow w = \frac{\zeta - i}{\zeta + i}$$

最后得到

$$w = \frac{e^{z} - i}{e^{z} + i}$$

【例-5】要求把条带域 $a<\mathrm{Re}(z)<b$ 映射成上半平面 $\mathrm{Im}(w)>0$ 的一个映射



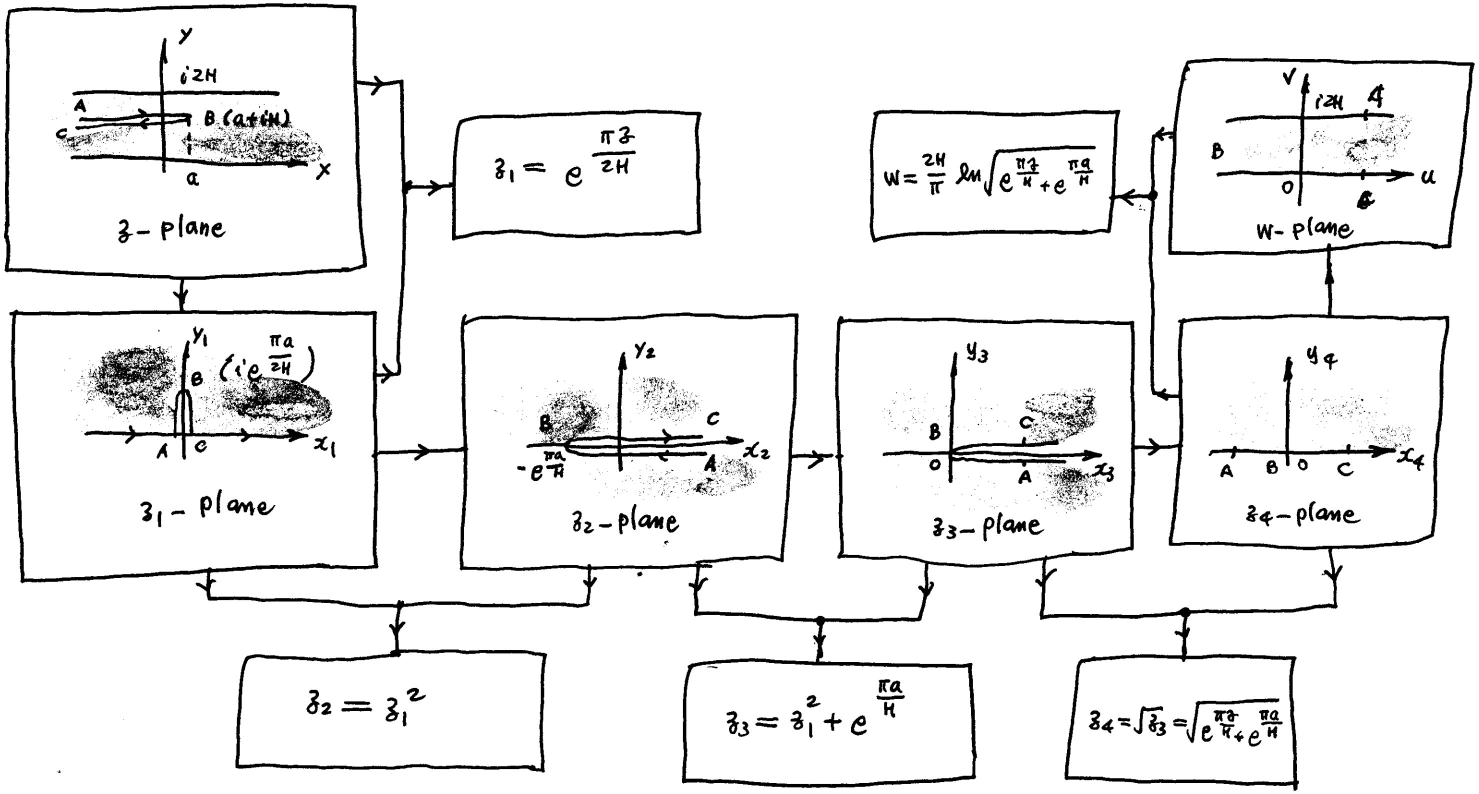
最后有

$$w = e^{i\frac{\pi(z-a)}{b-a}}$$

【例-6】 要求把有裂缝：$-\infty < \mathrm{Re}(z) \le a$，$\mathrm{Im}(z) = H$

的条带域 $0 < \mathrm{Im}(z) < 2H$，映射成（无裂缝的）$0 < \mathrm{Im}(w) < 2H$

条带域.



大家知道如果没有裂缝 ABC，则 $\operatorname{Im} z < 2H$ 条带

由 $z_1 = e^{\frac{\pi z}{2H}}$ 映射为上半平面.

裂缝是 $\operatorname{Im}(z) = H$. 对应幅角是 $\frac{\pi}{2}$. 即

$$\operatorname{Arg} z_1 = \operatorname{Arg} e^{\frac{\pi z}{2H}} = \frac{\pi}{2H} y.$$

最后给出

$$\boxed{w = \frac{H}{\pi} \ln\left(e^{\frac{\pi z}{H}} + e^{\frac{\pi a}{H}}\right)}$$

11 月 21 日

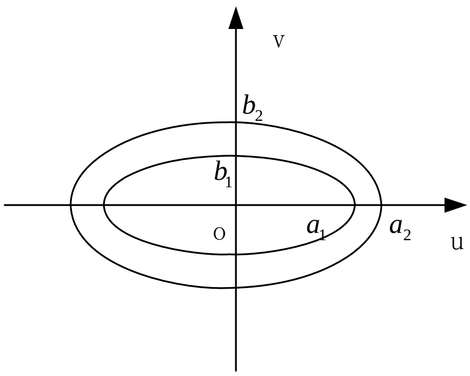
电容 C 与共焦椭圆的焦距 k 无关

儒可夫斯基变换

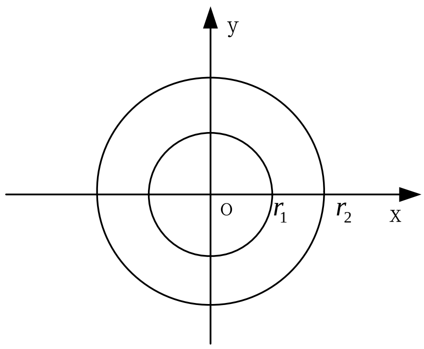
$$w = \frac{1}{2}(z + \frac{k^2}{z}) \qquad (k > 0)$$

十分神奇，航空飞机的升力由此变换首先获得证明，它是由它的发展而给出大功劳的。对于椭圆同轴线电容 C，又给出神妙的解法。

由图看出， $z = re^{i\theta}$



w-plane　共焦椭圆同轴线



z-plane　圆同轴线

于是有

$$w=u+iv=\frac{1}{2}\left(r+\frac{k^2}{r}\right)\cos\theta+i\frac{1}{2}\left(r-\frac{k^2}{r}\right)\sin\theta$$

也即

$$\begin{cases}u=\dfrac{1}{2}\left(r+\dfrac{k^2}{r}\right)\cos\theta=a\cos\theta\\ v=\dfrac{1}{2}\left(r-\dfrac{k^2}{r}\right)\sin\theta=b\sin\theta\end{cases}$$

这里分别用 a 和 b 表示椭圆的长半径轴和短半径轴，容易写出椭圆方程

$$\frac{u^2}{a^2}+\frac{v^2}{b^2}=1$$

且

$$\begin{cases}a=\dfrac{1}{2}\left(r+\dfrac{k^2}{r}\right)\\ b=\dfrac{1}{2}\left(r-\dfrac{k^2}{r}\right)\end{cases}$$

这样即导出

$$\begin{cases}r=a+b\\ k^2=a^2-b^2\end{cases}$$

也就是说，儒可夫斯基参数 k 即椭圆焦距。

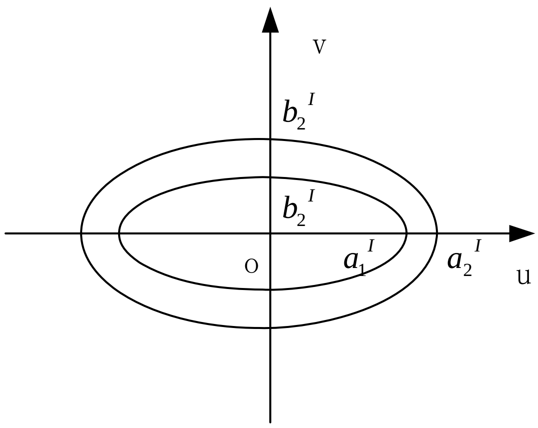
根据圆同轴线电容 C

$$C=\frac{2\pi\varepsilon}{\ln\left(\dfrac{r_2}{r_1}\right)}$$

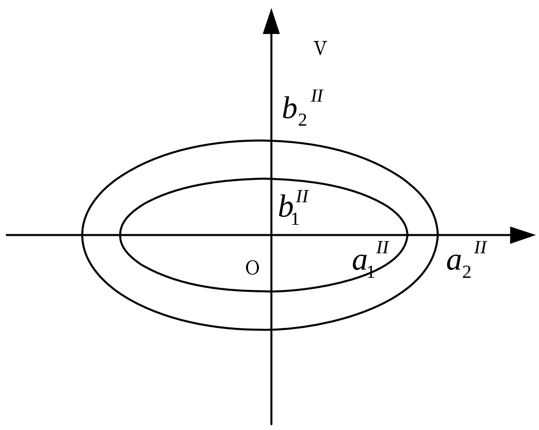
和保角变换前后电容 C 的不变性，最后得到

$$C=\frac{2\pi\varepsilon}{\ln\left(\dfrac{a_2+b_2}{a_1+b_1}\right)}$$

特别应该指出：若存在两种共焦的焦距k_I和k_{II}



焦距 k_I 椭圆同轴线



焦距 k_{II} 椭圆同轴线

由此的电容也相等，为

$$C=\frac{2\pi\varepsilon}{\ln\left(\dfrac{a_2^I+b_2^I}{a_1^I+b_1^I}\right)}=\frac{2\pi\varepsilon}{\ln\left(\dfrac{a_2^{II}+b_2^{II}}{a_1^{II}+b_1^{II}}\right)}$$