13

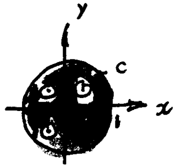
留数应用（II）

第1类 实积分 $\int_0^{2\pi} R(\cos\theta,\sin\theta)\,d\theta$

条件
- $R(\cos\theta,\sin\theta)$ 是 $\cos\theta,\sin\theta$ 有理函数;
- $\theta\in[0,2\pi]$

转化
- $z=e^{i\theta}$, $dz=iz\,d\theta$

$$\oint_{|z|} R\left(\frac{z^2+1}{2z},\frac{z^2-1}{2iz}\right)\frac{dz}{iz}=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[f(z),z_k]$$

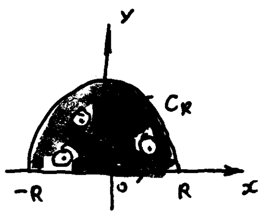


第2类 实积分 $\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\,dx$

条件
- $R(x)$是x的有理多项式 $m-n\geq 2$
- $x\in(-\infty,\infty)$
- 实轴上无极点

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\,dx=\oint_{\mathrm{Im}\,z\geq 0} R(z)\,dz$$

$$=2\pi i\sum_{\substack{k=1\\ \mathrm{Im}\,z_k>0}}^{n}\mathrm{Res}[f(z),z_k]$$

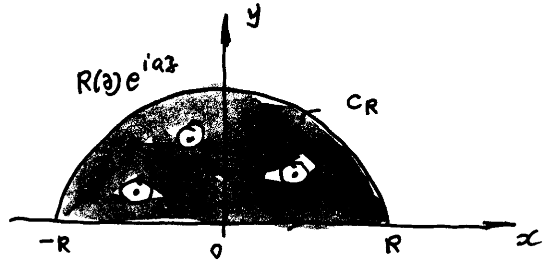


第3类 积分 $\int_{-\infty}^{\infty} R(x)e^{iax}\,dx \quad (a>0)$

Note 这一类实虚混合积分，它相当于

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\cos ax\,dx + i\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\sin ax\,dx$$

(1). 条件
- $a>0$
- $R(x)$是x的有理多项式, $m-n\geq 1$
- $x\in(-\infty,\infty)$
- 在x轴上无极点.



实虚混合积分.

如同前面的处理方法，对于 $m-n\geq 1$，对于充分大的$|z|$，有

$$|R(z)|<\frac{2}{|z|}$$

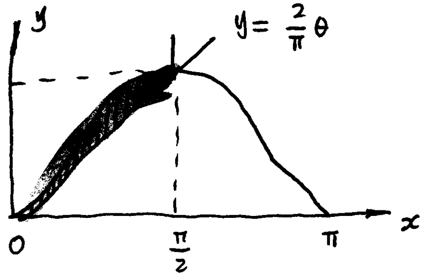
从概念上讲，关键是

$$\boxed{\lim_{|z|\to\infty}\int_{C_R} R(z)e^{iaz}\,dz \equiv 0}$$

由于 $\left|\int_{C_R} R(z)e^{iaz}\,dz\right| \le \int_{C_R}|R(z)|\,|e^{iaz}|\,ds$

$$< \frac{2}{R}\int_{C_R} e^{-ay}\,ds = 2\int_0^{\pi} e^{-aR\sin\theta}\,d\theta$$

在 $0\le\theta\le\pi/2$，有 $\sin\theta \ge \frac{2}{\pi}\theta$



$$\left|\int_{C_R}R(z)e^{iaz}\,dz\right| < 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-aR\left(\frac{2\theta}{\pi}\right)}\,d\theta$$

$= \frac{2\pi}{aR}\left(1-e^{-aR}\right)$ 当 $R\to\infty$ $\int_{C_R}R(z)e^{iaz}\,dz\to 0$

最后得到

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty}R(x)e^{iax}\,dx = 2\pi i\sum_{\substack{k=1\\ \operatorname{Im} z_k>0}}^{n}\operatorname{Res}\left[R(z)e^{iaz}, z_k\right]}$$

当然也能写成

$$\int_{-\infty}^{\infty}R(x)\cos ax\,dx = \operatorname{Re}\left\{2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Res}\left[R(z)e^{iaz}, z_k\right]\right\}$$

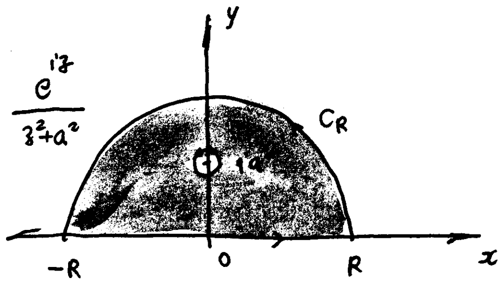
$$\int_{-\infty}^{\infty}R(x)\sin ax\,dx = \operatorname{Im}\left\{2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Res}\left[R(z)e^{iaz}, z_k\right]\right\}$$

【例-1】计算实积分

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x}{x^2+a^2}\,dx \qquad (a>0)$$

【解】(I). 条件
- $m-n=2$
- $x\in(-\infty,\infty)$
- $R(z)=\frac{1}{z^2+a^2}$

(II) 转化 $\oint_{\operatorname{Im} z>0}\frac{e^{iz}}{z^2+a^2}\,dz$



单极点积分

$$\mathrm{Res}\left[R(z)e^{iz}, ia\right] = \lim_{z\to ia}\left\{(z-ia)\frac{e^{iz}}{(z-ia)(z+ia)}\right\}$$

$$= \frac{e^{-a}}{2ia}$$

最后得到 $$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix}}{x^2+a^2}dx = \frac{\pi e^{-a}}{a} \blacksquare$$

附带 $$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{x^2+a^2}dx \equiv 0$$

这也是奇函数的必然结果.

【例-2】计算实积分

$$I = \int_0^{\infty}\frac{x\sin x}{x^2+a^2}dx \quad (a>0)$$

首先注意上述积分限不规范，可写为

$$I = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin x}{x^2+a^2}dx$$

(I). 条件
- $m-n=1$
- $x\in(-\infty,\infty)$
- $R(z)=\frac{z}{z^2+a^2}$ 在上半平面

只有 ia 为极点.

(II) 转化

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x e^{ix}}{x^2+a^2}dx = \pi i\,\mathrm{Res}\left[R(z)e^{iz}, ia\right]$$

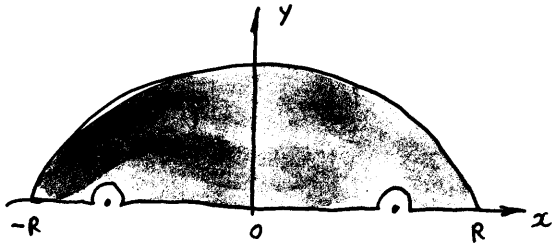
$$= \pi i\cdot\frac{e^{-a}}{2} = i\frac{\pi}{2}e^{-a}$$

最后得到

$$I = \int_0^{\infty}\frac{x\sin x}{x^2+a^2}dx = \mathrm{Im}\left\{\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin x}{x^2+a^2}dx\right\}$$

$$= \frac{\pi}{2}e^{-a}.$$

第4类 实积分 $\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\,dx$



实轴上有极点积分

Case 1. 条件与第2类相同, $m-n \geq 2$

只是在实轴上有奇点, 于是有 $\int_{C_R} R(z)\,dz \equiv 0$;

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\,dx = 2\pi i \sum_{\substack{k=1 \\ \operatorname{Im} z_k > 0}}^{n} \operatorname{Res}[R(z), z_k] - \sum_{m=1}^{l} \int_{C_{rm}} R(z)\,dz}$$

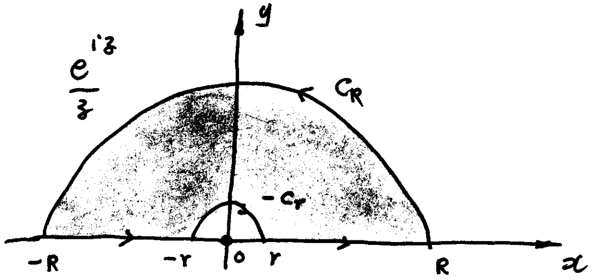
Case 2. 对于 $\int_{-\infty}^{\infty} R(x)e^{iax}\,dx \quad (a>0)$

条件与第3类相同, $m-n \geq 1$

只是在实轴上有极点. 又与上式类似.

【例-3】 计算积分 $I = \oint_C \frac{e^{iz}}{z}\,dz$

Note. 这本身即是一个积分.



$\frac{e^{iz}}{z}$ 积分

应用 Cauchy-Goursat 定理有:

$$\int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z}\,dz + \int_{-R}^{-r} \frac{e^{ix}}{x}\,dx - \int_{C_r} \frac{e^{iz}}{z}\,dz + \int_{r}^{R} \frac{e^{ix}}{x}\,dx = 0$$

令 $x = -t \qquad dx = -dt$

$$\int_{-R}^{-r} \frac{e^{ix}}{x}\,dx = \int_{R}^{r} \frac{e^{-it}}{t}\,dt = -\int_{r}^{R} \frac{e^{-ix}}{x}\,dx$$

于是有 $$\int_r^R \frac{e^{ix}}{x}dx+\int_{-R}^{-r}\frac{e^{ix}}{x}dx$$

$$=\int_r^R \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{x}dx = 2i\int_r^R \frac{\sin x}{x}dx$$

另一方面 $$\left|\int_{C_R}\frac{e^{iz}}{z}dz\right| \le \int_{C_R}\left|\frac{e^{iz}}{z}\right|ds$$

$$=\frac{1}{R}\int_{C_R} e^{-y}ds = \frac{\pi}{R}(1-e^{-R})$$

由于 $$\lim_{R\to\infty}(1-e^{-R})\frac{\pi}{R}=0$$

可以得到 $$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}\frac{e^{iz}}{z}dz=0$$

再者，我们把 e^{iz}/z 在 $z=0$ 点的邻域展开

$$\frac{e^{iz}}{z}=\frac{1}{z}+i-\frac{1}{2}z+\cdots+\frac{(i)^n}{n!}z^{n-1}+\cdots$$

$$=\frac{1}{z}+\varphi(z)$$

上式中 $$\varphi(z)=i-\frac{1}{2}z+\cdots+\frac{(i)^n}{n!}z^{n-1}+\cdots$$

在 $z=0$ 处解析，$\varphi(0)=i$． 有 $\lim\limits_{z\to 0}|\varphi(z)|\le 2$

Note $|\varphi(z)|\le 1+|z|+\frac{1}{2!}|z|^2+\cdots=e^{|z|}$

这样可得

$$\int_{C_r}\frac{e^{iz}}{z}dz=\int_{C_r}\frac{1}{z}dz+\int_{C_r}\varphi(z)dz$$

$$\lim_{r\to 0}-\int_{C_r}\varphi(z)dz=\lim_{r\to 0}-2ir\int_\pi^0 e^{i\theta}d\theta\to 0$$

而 $$-\int_{C_r}\frac{1}{z}dz=\int_\pi^0\frac{ire^{i\theta}d\theta}{re^{i\theta}}=-i\pi$$

最后得到

$$-\int_{C_r}\frac{e^{iz}}{z}dz=-i\pi$$

由 Cauchy – Goursat 定理

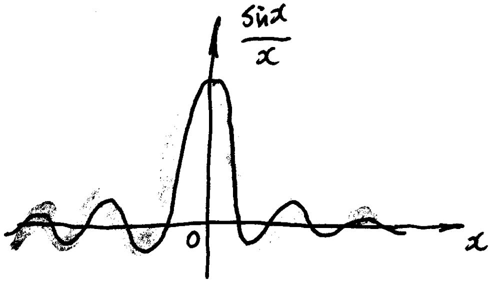
$$\int_{C_R}\frac{e^{iz}}{z}dz-\int_{C_r}\frac{e^{iz}}{z}dz+2i\int_0^\infty\frac{\sin x}{x}dx=0$$

我们给出

$$\boxed{\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2}}$$

这是用复变函数理论解决工程中很重要的积分.

$\frac{\sin x}{x}$ 是等幅阵列的光强分布. 也可以认为是手电筒打在墙上的光强分布



等幅阵列光强分布

【例-4】 菲涅耳（Fresnel）积分

$$\int_0^\infty \sin x^2 dx = \int_0^\infty \cos x^2 dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

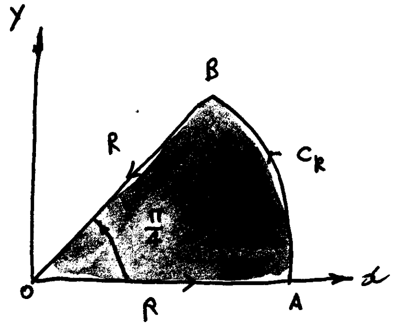
已知 概率积分 $\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

【解】 我们考虑复函数 e^{iz^2}，当 $z=x$

有 $e^{ix^2} = \cos x^2 + i\sin x^2$

取 $\frac{\pi}{4}$ 角半径为R的扇形. e^{iz^2} 在C内解析，即

$$\oint_C e^{iz^2}dz \equiv 0$$



Fresnel 积分

具体是

$$\int_{OA} e^{ix^2}dx + \int_{C_R} e^{iz^2}dz + \int_{BO} e^{iz^2}dz \equiv 0$$

(1). $\int_{OA} e^{ix^2}dx = \int_0^R e^{ix^2}dx$

(II). $\int_{C_R} e^{iz^2}dz$ 令 $z=Re^{i\theta}$ 这半径

R为常数.

$$\int_{C_R} e^{iz^2}dz = \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{iR^2e^{i2\theta}} Rie^{i\theta}d\theta$$

$$\left|\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{iR^2\cos2\theta - R^2\sin2\theta} iRe^{i\theta}d\theta\right| \le$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-R^2\sin2\theta}Rd\theta \le R\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-\frac{4}{\pi}R^2\theta}d\theta$$

$$=\frac{\pi}{4R}(1-e^{-R^2})$$

于是有

$R\to\infty$ $\int_{C_R} e^{iz^2}dz = 0$

(3). $\int_{BO} e^{iz^2}dz$ 令 $z=re^{i\frac{\pi}{4}}$

$dz = e^{i\frac{\pi}{4}}dr$ 于是 BO 积分为

$$\int_{BO} e^{iz^2}dz = \int_R^0 e^{ir^2e^{i\frac{\pi}{2}}} e^{i\frac{\pi}{4}}dr$$

$$= e^{i\frac{\pi}{4}}\int_0^R -e^{-r^2}dr = -\frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(\frac{1}{\sqrt2}+i\frac{1}{\sqrt2}\right)$$

$$= -\left(\frac12\sqrt{\frac{\pi}{2}} + i\frac12\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)$$

最后得到

$$\boxed{\int_0^{\infty}(\cos x^2 + i\sin x^2)dx = \frac12\sqrt{\frac{\pi}{2}}(1+i)}$$ ■

大家有一个很自然的问题：为什么要取 $\frac{\pi}{4}$ 角扇形.

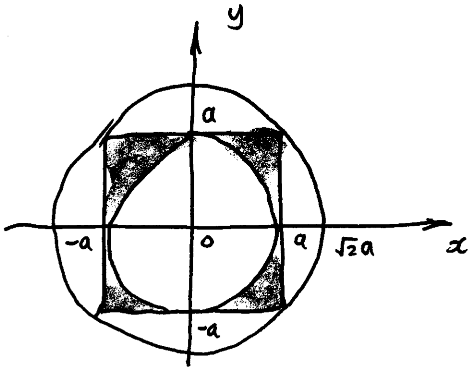
最重要的原因是 $e^{ir^2e^{i\frac{\pi}{2}}} = e^{-r^2}$ 可形成概率积分.

Appendix 概率积分

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

令 $$I=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx$$

$$I^2=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}e^{-y^2}dxdy$$



概率积分域

$$I^2=\lim_{a\to\infty}\int_{-a}^{a}\int_{-a}^{a} e^{-(x^2+y^2)}dxdy$$

由于被积函数恒正，I^2 必夹在两个圆积分之间.

$$\int_0^{a} e^{-r^2}rdr\int_0^{2\pi}d\varphi<I^2<\int_0^{\sqrt{2}a} e^{-r^2}rdr\int_0^{2\pi}d\varphi$$

$$\pi(1-e^{-a^2})<I^2<\pi(1-e^{-2a^2})$$

当 $a\to\infty$, $I^2=\sqrt{\pi}$

于是可知 $$I=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}$$

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx=\frac{1}{2}I=\frac{1}{2}\sqrt{\pi} \quad ■$$

11 月 14 日

复平面上的∞点——“通量”的统一收集点

我们还是从一个实际的物理例子着手：研究平面上 n 根不同的线电荷$q_1,q_2,\cdots q_n$，而且q_i可正可负。那么如何计算$\sum_{k=1}^{n}q_k$呢？一个简单的办法是定义∞处存在电荷q_∞，因为所有q_k所发出的力线通量总会汇合到一个地方，即∞点。于是有 $\sum_{k=1}^{n}q_k+q_\infty\equiv 0$，这样$q_\infty=-\sum_{k=1}^{n}q_k$。

以上所述，即大家所熟悉的**电荷守恒定律。**

几乎完全一样的思想，定义∞点留数。

$$\text{Res}[f(z),\infty]=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C^-}f(z)dz$$

即可得

$$\sum_{k=1}^{n}\text{Res}[f(z),z_k]+\text{Res}[f(z),\infty]\equiv 0$$

这就是留数第 2 定律，它的本质是**留数守恒定律**（也就是复数中的电荷守恒定律）。

事实上，寻找和发现这**统一的收集点**是一个非常重要的思想和研究方法。

例如，我们每个家庭的日常开支复杂而繁琐：衣食住行项目众多，但是只要归结为银行卡的数目即刻变成了统一的收集点。

复平面上的∞点是“通量”的统一收集点。只要遇到在环 C 内的极点多或者极点阶数高，则采用C^-和∞点计算将十分方便。