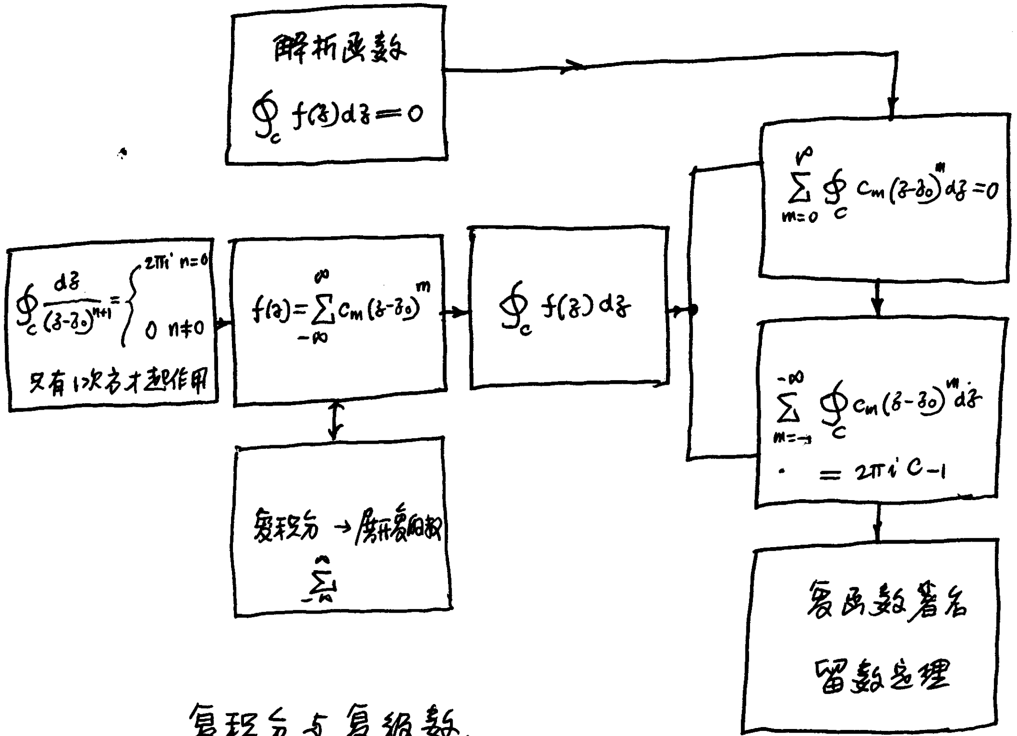
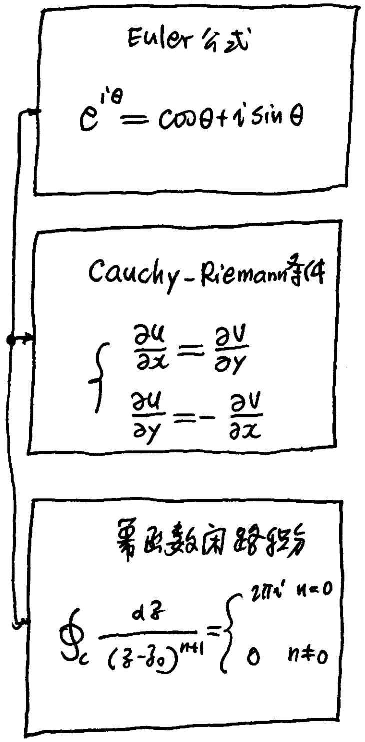
7

复合闭路积分



复积分与复级数.

需要把握的是复函数有三个关键点

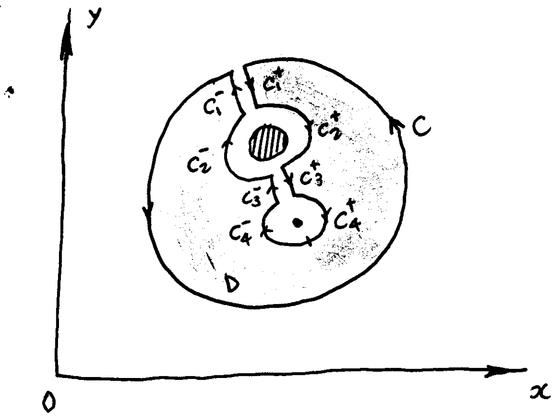


值得我们思考的事情很多，

Euler 想出的公式，为什么我们没有想出？

一. 复合闭路积分

Cauchy-Goursat定理要求被积函数$f(z)$，在D内处处解析，现将此作进一步推广：即$f(z)$在D域内不是处处解析，换句话说，当积分$\oint_C f(z)dz$，在D的多连域，是多.



多连域

我们构造$C+C'$使闭合路径所围成的区域全在解析域之内，其中

$$C'=C_1^+ + C_1^- + C_2^+ + C_2^- + C_3^+ + C_3^- + C_4^+ + C_4^-$$

但 $C_1^+ + C_1^- = 0$， $C_3^+ + C_3^- = 0$

$C_2^+ + C_2^- = -C_2$ $\quad C_4^+ + C_4^- = -C_4$

由于$C+C'$闭曲线完全在解析区域之内，可以应用Cauchy-Goursat定理，有

$$\oint_{C+C'} f(z)dz = 0$$

得到

$$\boxed{\oint_C f(z)dz = \oint_{C_2} f(z)dz + \oint_{C_4} f(z)dz}$$

【定理1】复合闭路积分定理.

C是多连域内一条简单闭曲线，在C内还有各自互不相交，互不包含的简单闭曲线$C_1, C_2, \cdots C_n$.

C和$-C_1, -C_2, \cdots -C_n$均属解析域D.

$f(z)$是D的解析函数，则

$$\oint_C f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{n} \oint_{C_k} f(z)\,dz$$

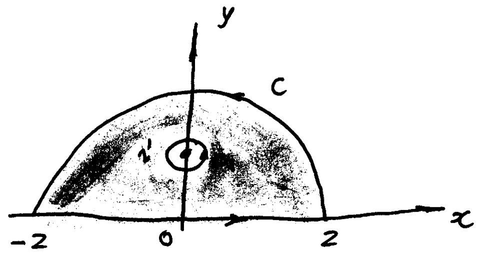
或者为

$$\oint_{C+C'} f(z)\,dz = 0$$

复合闭路积分其物理意义十分明显：只有局部不解析域的曲线C内，若把不解析部分用C'包住，重新构成多连解析域，则 $\oint_C$ 积分贡献完全取决于 $\sum_{k=1}^{n}\oint_{C_k}$ 若干不解析的小环贡献（代数）和。

【例-1】 试求 $\oint_C \frac{dz}{z^2+1}$ 的值，其中

$C=\{z \mid \mathrm{Im}\, z=0 \text{ 和 } |z|=2\}$ 的回合.



半圆环积分

【解】 $\frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i}\right)$

容易看出，$z=i$是积分域内唯一的不解析点. 取作以ε为半径的圆包围i点，从而构成多连解析域. 写出

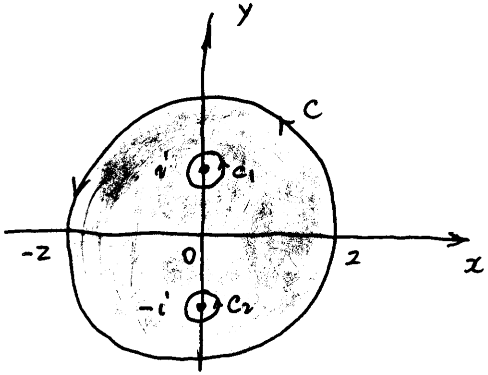
$$\oint_C \frac{dz}{z^2+1} = \oint_{C_1} \frac{dz}{z^2+1} =$$

$$\frac{1}{2i}\oint_{C_1}\frac{-dz}{z+i} + \frac{1}{2i}\oint_{C_1}\frac{dz}{z-i}.$$

Note：第1项在D域内分母不为零，解析，故即积分为0，后一项利用幂函数积分

$$\oint_c \frac{dz}{z^2+1} = \frac{1}{2i}\oint_{c_1}\frac{dz}{z-i} = \frac{1}{2i}2\pi i = \pi.$$

【讨论】 Case 1. 若 $c=\{z \mid |z|=2\}$ 的全圆域，见图.



全圆域积分.

这时 $$\oint_c f(z)\,dz = \oint_{c_1}\frac{dz}{z^2+1}+\oint_{c_2}\frac{dz}{z^2+1}$$

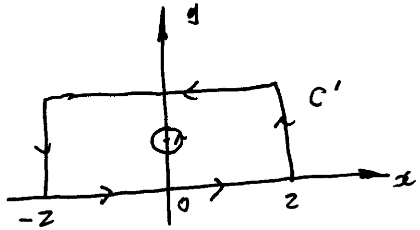
$$= \frac{1}{2i}\oint_{c_1}\frac{dz}{z-i} - \frac{1}{2i}\oint_{c_2}\frac{dz}{z+i}$$

$$=\frac{1}{2i}(2\pi i - 2\pi i)=0$$

这一结果深刻说明了，复路积分不为零，里边肯定有不解析成份；反之积分为0，并不能判断为解析.

Case 2. 积分路径矩形.

要求照上半圆c和三边矩形积分c′相等



矩形域积分

c' $\{z \mid \mathrm{Re}\,z=-2,\ \mathrm{Im}\,z\in[2,0];$
$\mathrm{Im}\,z=2,\ \mathrm{Re}\,z\in[-2,2];$
$\mathrm{Re}\,z=2,\ \mathrm{Im}\,z\in[0,2]\}$

根据复合闭路积分

$$\oint_{C_0}\frac{dz}{z^2+1}=\pi$$

则上半圆 C 积分有

$$\int_{C}\frac{dz}{z^2+1}=\oint_{C_0}\frac{dz}{z^2+1}-\int_{-2}^{2}\frac{dx}{x^2+1}=\pi-2\tan^{-1}(2)$$

而上半平面三边矩形 C' 积分为

$$\int_{C'}\frac{dz}{z^2+1}=\oint_{C_0}\frac{dz}{z^2+1}-\int_{-2}^{2}\frac{dz}{x^2+1}=\pi-2\tan^{-1}(2)$$

可见 $$\int_{C}\frac{dz}{z^2+1}=\int_{C'}\frac{dz}{z^2+1}$$ ■

Case 3. 半径为∞的上半圆

事实上，这个例子只要 $R>1$，则与半径无关.

当 $R\to\infty$. 圆周缩于一点. 由此可见

$$\oint_{C_0}\frac{dz}{z^2+1}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2+1}=\pi.$$

复合闭路积分给出实广义积分之值.

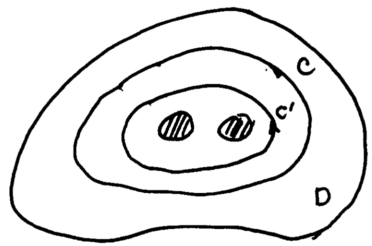
从实积分的角度

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2+1}=\tan^{-1}(x)\Big|_{-\infty}^{\infty}=\pi.$$

而复积分则认为是 $z=i$ 的奇点贡献.

【定理2】路径变形定理

$z\in D$ 为多连域，它的闭合曲线在 D 内路径变形，只要所包围的不解析区域一致，则积分值不变.



$$\oint_{C}f(z)\,dz=\oint_{C'}f(z)\,dz$$

所以，我们用小圆积分处理 $\oint_C \frac{dz}{(z-z_0)^{n+1}}$

要有普遍意义.

【定理3】 Cauchy积分公式

$f(z)$在D内处处解析，D为多连域，C是D内一条简单曲线(正向)，z_0是C内任一点，则有

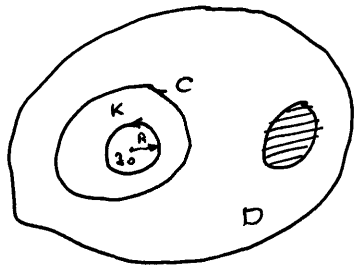
$$\boxed{f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz}$$

此即著名的Cauchy积分.

【证明】由于$f(z)$在D内处处解析，利用路径变形定理. $|z-z_0|=R$，$f(z)$在z_0处连续.

$|z-z_0|<\delta$ 则 $|f(z)-f(z_0)|<\epsilon$

取 $R<\delta$



Cauchy积分

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz=\oint_K \frac{f(z_0)}{z-z_0}dz+\oint_K \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}dz.$$

$$=2\pi i f(z_0)+\oint_K \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}dz$$

注意到

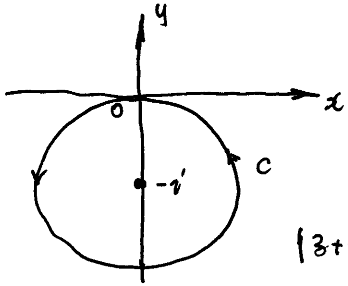
$$\left|\oint_K \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}dz\right|\le\oint_K \left|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\right|ds$$

$$\le\frac{\epsilon}{R}\oint_K ds\approx 2\pi\epsilon\to 0$$

Cauchy积分相当于选择性，它可以对比广义函数$\delta(x)$. 见表.

Cauchy积分	广义δ函数
$\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{z-z_0}$	$\delta(x)$
$\frac{1}{2\pi i}\oint_c \frac{dz}{z-z_0}=1$	$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)\,dx=1$
$\frac{1}{2\pi i}\oint_c \frac{f(z)}{z-z_0}dz=f(z_0)$	$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\delta(x)\,dx=f(0)$

【例-2】求 $\oint_c \frac{\cos z}{z+i}dz$, $c=\{z \mid |z+i|=1\}$



$|z+i|=1$ 圆积分

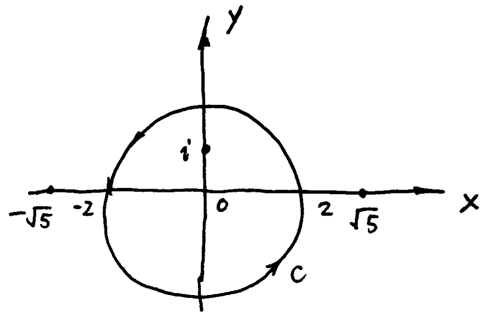
【解】据 Cauchy积分，$f(z)=\cos z$

$$\oint_c \frac{\cos z}{z+i}dz = 2\pi i\cos(-i) = \frac{1}{2}\left(e^{-i\cdot i}+e^{-i\cdot -i}\right)2\pi i$$

$$= \pi i\left(e+\frac{1}{e}\right)$$

【例-3】求 $\oint_c \frac{z\,dz}{(5-z^2)(z-i)}$

$c=\{z \mid |z|=2\}$



【解】依积分，把 $f(z)=\frac{z}{5-z^2}$，

且 $z_0=i$ 在 c 内.

于是

$$\oint_c \frac{z\,dz}{(5-z^2)(z-i)} = 2\pi i\left(\frac{z}{5-z^2}\right) = -\frac{\pi}{3}$$

三. 解析函数的高阶导数

【定理4】解析函数 $f(z)$ 的n阶导数都存在，并仍是解析函数.

$$\boxed{f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz \qquad n=1,2,3,\cdots}$$

式中，C是 $f(z)$ 的解析域D内包围 z_0 的任一条正向曲线，C全属D. 注意复函数的高阶导数与实函数有区别. 实函数的导数存在，高阶导数未必存在.

【证明】据Cauchy积分公式

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz$$

由于 z_0 是解析域D内C所包围的任一点，把 z_0 当动点，对Cauchy积分中 z_0 求导

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{df(z_0)}{dz_0}&=\frac{1!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{1+1}}dz\\
\frac{d^2f(z_0)}{dz_0^2}&=\frac{2!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{2+1}}dz\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\frac{d^{(n)}f(z_0)}{dz_0^n}&=\frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz
\end{aligned}\right.$$

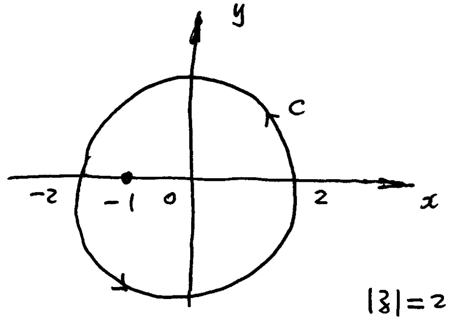
■

特别指出，把 $n=0$ 时Cauchy积分和高阶导数进一步统一.

$$f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$$

$$n=0,1,2,3,\cdots$$

【例-4】 求 $\oint_C \frac{z^3+1}{(z+1)^4}dz$， $C=\{z \mid |z|=2\}$



$|z|=2$ 高阶导数积分

【解】 $f(z)=z^3+1$， $z_0=-1$

$$f^{(3)}(z_0)=\frac{3!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z+1)^4}dz$$

于是

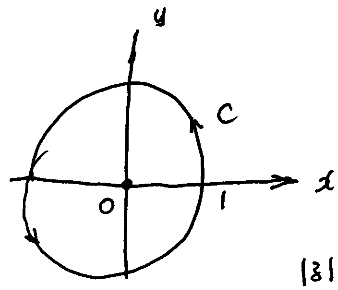
$$\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz=\frac{2\pi i}{3!}f^{(3)}(z_0)$$

$(z^3+1)'=3z^2$， $(3z^2)'=6z$ $(6z)'=6$

$$\oint_C \frac{z^3+1}{(z+1)^4}dz=2\pi i$$

【例-5】 求 $\oint_C \frac{e^{-z}\cos z}{z^2}dz$

$C=\{z \mid |z|=1\}$



$|z|=1$ 高阶导数积分

【解】 $f(z)=e^{-z}\cos z$

$z_0=0$

$$f^{(1)}(z_0)=\frac{1!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z^2}dz$$

$$\oint_C \frac{e^{-z}\cos z}{z^2}dz=2\pi i\left(e^{-z}\cos z\right)'\Big|_{z=0}$$

$=-2\pi i.$

10 月 17 日

乔布斯领先性创新

我们所受到的教育，形成了根深蒂固的概念——即创新的（产品）根本是顾及群众的需求。

然而，Jobs 彻底地把这一铁律给推翻了：他的领先潮流的创新思想是——“制造”出需要，把大批群众的需求带上去！

这种颠覆性创新，让多少人为之眼睛一亮、思想一震：iphone 不是群众提出的需求；ipad 也不是群众提出的需求，而经过 Jobs 一点拨、一制造，世界为之轰动！

Jobs——真正的领先创新的创始者。