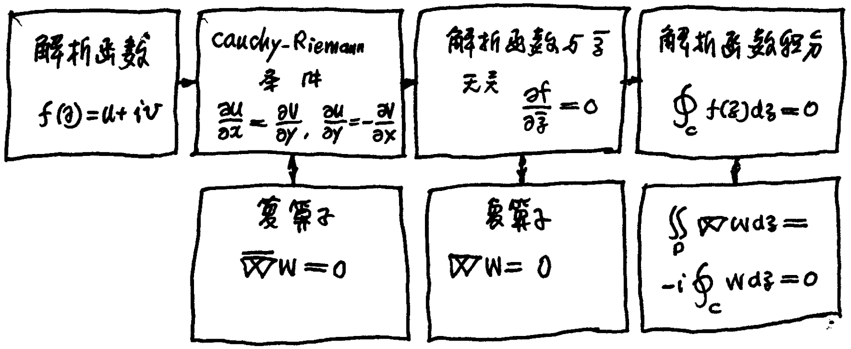
6 复积分

我们已经学习了复函数中最重要的一类——解析函数.



解析函数的微分和积分

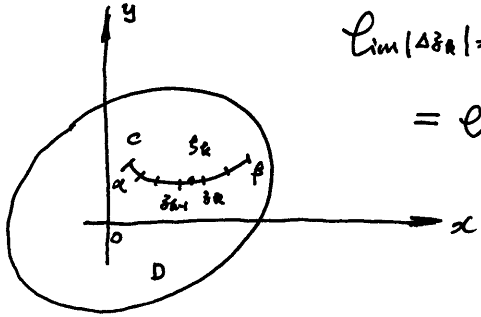
一. 复积分

【定义】 z平面有一段光滑有向曲线，$z\in D$，$w=f(z)$，我们把曲线分成n个弧段

$$\alpha=z_0,\ z_1,\ \cdots z_{k-1},\ z_k,\ \cdots,\ z_n=\beta.$$

在每个弧段 $\widehat{z_{k-1}z_k}$ $(k=1,2,\cdots n)$上任取ζ_k，作和式

$$S_n=\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)(z_k-z_{k-1})=\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k$$



$$\lim|\Delta z_k|=\lim|\widehat{z_{k-1}z_k}|=\lim\Delta s_k$$

z平面复积分定义

$$\boxed{\int_c f(z)dz=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k}$$

复积分三要素
- 被积函数 $f(z)$.
- 积分路径 C
- 积分方向

事实上，一个复积分相当于两个曲线实积分（Note：又遇到和导数，微分类似的情况.）

$$f(z) = u + iv \,, \quad dz = dx + i\,dy$$

$$\boxed{\int_C f(z)\,dz = \int_C u\,dx - v\,dy + i\int_C v\,dx + u\,dy}$$

二. 参数方程法.

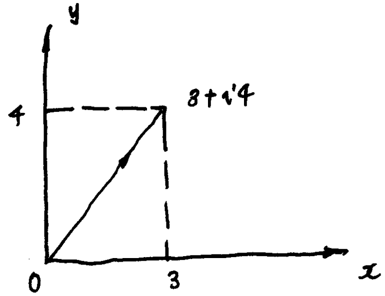
参数方程法是复积分的一种计算方法. 若光滑曲线 C 的参数方程为 $z = z(t) = x(t) + i\,y(t)$, $t_\alpha \le t \le t_\beta$

$$dz = z'(t)\,dt$$

$$\boxed{\int_C f(z)\,dz = \int_{t_\alpha}^{t_\beta} f[z(t)]\, z'(t)\,dt}$$

【例-1】 计算 $\int_C z\,dt$

Case 1 C 从 0 点到 $3+i4$ 的直线段



直线段

【解】 利用参数方程 $x = 3t$, $y = 4t$ $\quad 0 \le t \le 1$

$$z = (3+i4)\,t$$

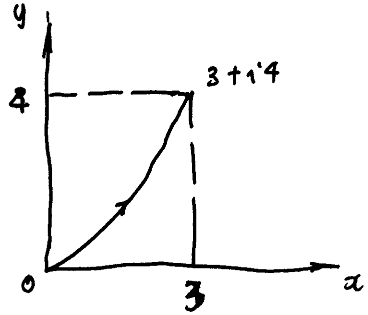
$$dz = (3+i4)\,dt$$

于是有 $$\int_C z\,dz = (3+i4)^2 \int_0^1 t\,dt$$

$$= \frac{1}{2}(3+i4)^2$$

■

Case 2 C从0到3+i4的2次抛物线



抛物线

写出抛物线参数方程 $x=3t$, $y=4t^2$ $0\le t\le 1$

$$z=(3+i4t)t$$

$$dz=(3+i8t)dt$$

$$\int_C z\,dz=\int_0^1 (3+i4)(3+i8)t\,dt$$

$$=\int_0^1 (9t+i36t^2-32t^2)dt=\frac{9}{2}+i12-8$$

$$=\frac{1}{2}(3+i4)^2 \quad \blacksquare$$

完全可以猜测：这一积分值与路径无关，而只与起止相关，即 $\int_C z\,dz=\int_0^{3+i4} z\,dz=\frac{1}{2}z^2\Big|_0^{3+i4}=\frac{1}{2}(3+i4)^2$

三. 积分基本性质

(1)	$\int_C f(z)dz=-\int_{C^-} f(z)dz$	线性性质
(2)	$\int_C k f(z)dz=k\int_C f(z)dz$	
(3)	若C由$C_1, C_2\cdots C_m$组成 则 $\int_C f(z)dz=\sum_{i=1}^{m}\int_{C_i} f(z)dz$	
(4)	$\int_C [f(z)\pm g(z)]dz=$ $\int_C f(z)dz\pm\int_C g(z)dz$	
(5)	设曲线C长度为L. 且函数f(z)在C上满足 $\lvert f(z)\rvert\le M$，则 $\left\lvert\int_C f(z)dz\right\rvert\le\int_C \lvert f(z)\rvert ds\le ML$	

只给出(5)的证明.

【证明】 十分清楚，$\Delta S_k \geq |\Delta z_k|$，即弧长≥弦长.

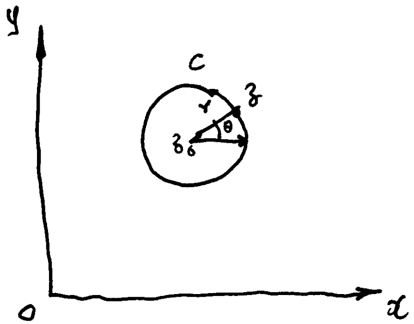
$$\left|\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} \left|f(\zeta_k)\Delta z_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |f(\zeta_k)|\Delta S_k$$

于是有

$$\left|\int_C f(z)\,dz\right| \leq \int_C |f(z)|\,dS$$

另一方面 $\sum_{k=1}^{n} |f(\zeta_k)|\Delta S_k \leq M\sum_{k=1}^{n}\Delta S_k = ML$ ■

【例-2】 计算积分 $\oint_C \frac{dz}{(z-z_0)^{n+1}}$，其中，C是以 z_0为圆心，r为半径的正向圆周，n为整数.



【解】 注意到本例是典型的幂函数的积分.

它可以包括负幂和正幂. 把它转化为参数方程.

写圆方程 $|z-z_0| = r$.

$$z = z_0 + re^{i\theta} \qquad -\pi < \theta \leq \pi$$

我们把未知数转为θ (只有一个未知数)

$$dz = ire^{i\theta}\,d\theta$$

$$\oint_C \frac{dz}{(z-z_0)^{n+1}} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{ire^{i\theta}}{r^{n+1}e^{i(n+1)\theta}}\,d\theta$$

$$= \frac{i}{r^n}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-in\theta}\,d\theta = \begin{cases} 2\pi i & i=0 \\ 0 & i\neq 0 \end{cases}$$

上面结果来自Fourier变换的结构性质

$$\begin{cases} \int_0^{2\pi} \cos m\theta\,d\theta = \begin{cases} 2\pi & m=0 \\ 0 & m\neq 0 \end{cases} \\ \int_0^{2\pi} \sin m\theta\,d\theta = 0 \end{cases}$$

不解析两种基本情况 → $f(z)$ 包含 $\bar{z}$ 部分

不解析两种基本情况 → $z_0\in D$, $n>0$, $f(z)=\dfrac{1}{(z-z_0)^n}$

这个例子我们把它提炼为幂函数第3个里程碑.

有了这一点, 我们对任意幂函数的闭路积分全部思想便产生了.

计算闭路积分 $\oint_c f(z)dz$ → 展开成幂级数 $z\in D$, $f(z)=\sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m z^m$

→ 解析部分: $\sum_{m=0}^{\infty} c_m \oint_c z^m dz = 0$

→ 不解析部分: $\sum_{m=1}^{\infty} c_{-m} \oint_c z^{-m} dz = 2\pi i\, c_{-1}$

所以我们闭路积分最重要的思想是——

$f(z)$ 展开成幂级数. 这样积分与级数联系起来.

四. Cauchy-Goursat (柯西-古萨定理)

这里先给出 Green 定理

$$\boxed{\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = \oint_L P\,dx + Q\,dy.}$$

我们要研究 $f(z)$, $z\in D$ 在什么条件下积分与路径无关.

$$\int_c f(z)dz = \int_c (u\,dx - v\,dy) + i\int_c (v\,dx + u\,dy)$$

利用 Green 公式. 积分为0 时有

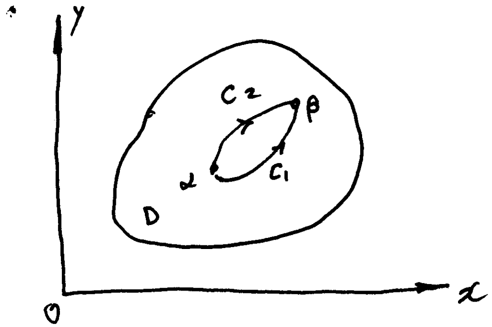
$\int_c u\,dx - v\,dy$: $u=P$, $Q=-v$; $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x} \Leftrightarrow \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}$

$\int_c v\,dx + u\,dy$: $P=v$, $Q=u$; $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x} \Leftrightarrow \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}$

十分清楚，只要满足 Cauchy-Riemann 条件，即 $f(z)=u+iv$ 解析，闭路积分为0，或曲线积分与路径无关。

【定理1】如果函数 $f(z)$ 在单连域 D 内处处解析，则 $\int_C f(z)\,dz$ 与路径无关，也即

$$\int_{C_1} f(z)\,dz = \int_{C_2} f(z)\,dz$$



【定理2】$f(z)$ 在单连域 D 内处处解析，则必存在解析函数 $F(z)$，满足

$$F'(z)=f(z).$$

$$F(z)=P(x,y)+iQ(x,y)=\int_{z_0}^{z} f(z)\,dz$$

$$=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}(u\,dx-v\,dy)+i\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}(v\,dx+u\,dy)$$

比较后可得

$$\begin{cases} P(x,y)=\displaystyle\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}(u\,dx-v\,dy) \\ Q(x,y)=\displaystyle\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}(v\,dx+u\,dy) \end{cases}$$

$$\begin{cases} u=\dfrac{\partial P}{\partial x}, & v=-\dfrac{\partial P}{\partial y} \\ v=\dfrac{\partial Q}{\partial x}, & u=\dfrac{\partial Q}{\partial y} \end{cases}$$

也就是

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial x}=\dfrac{\partial Q}{\partial y} \\ \dfrac{\partial P}{\partial y}=-\dfrac{\partial Q}{\partial x} \end{cases}$$

这恰好就是 $F(z)=P+iQ$ 的

Cauchy-Riemann条件，说明 $F(z)$ 在 $z\in D$ 内为单连域解析函数。

$$F'(z)=\frac{\partial P}{\partial x}+i\frac{\partial Q}{\partial x}=u+iv=f(z) \blacksquare$$

这定理也称为解析函数广义牛顿-莱布尼茨定理。

【定理3】若 $f(z)$ 在单连域 D 内处处解析，$G(z)$ 是 $f(z)$ 的一个原函数，则

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)\,dz = G(z_1)-G(z_0)$$

【证明】假定 $F(z)=\int_{z_0}^{z} f(z)\,dz$ 也是 $f(z)$ 的原函数，

于是有 $$\int_{z_0}^{z} f(z)\,dz = F(z) = G(z)+C$$

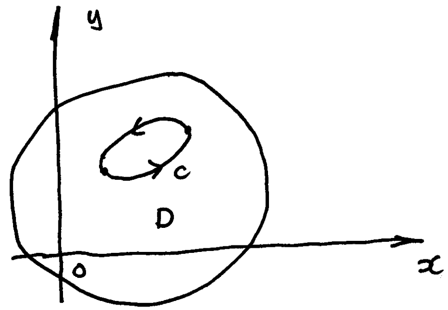
当 $z=z_0$ 时 $\quad C=-G(z_0)$

$$\int_{z_0}^{z} f(z)\,dz = G(z)-G(z_0) \blacksquare$$

【Cauchy-Goursat 基本定理】

$f(z)$ 在单连域 D 内处处解析，那么 $f(z)$ 沿 D 中任何一条封闭曲线积分为0。

$$\boxed{\oint_c f(z)\,dz \equiv 0}$$



Cauchy-Goursat 定理的物理意义是：若闭路积分为0，则表明其中没有发出的奇点

（关于奇点，以后将在留数定理深入讨论）

我们再一次记起复算子 $\bar{\nabla}$

积分定理 $\iint_D \bar{\nabla} W \, dx dy = -i \oint_C W \, dz$

解析函数 $\bar{\nabla} W = 0 \longleftrightarrow$ 积分 $\oint_C W \, dz = 0$

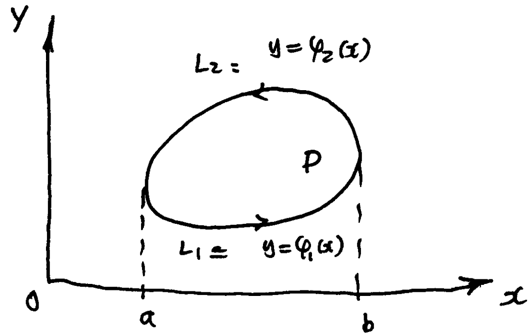
也即 $\oint_C f(z) dz = 0$

可见，复算子非常反映**本质**.

Appendix Green定理

【定理】闭域D是由分段光滑曲线L围成，函数 $P(x,y)$，$Q(x,y)$在D上有一阶连续偏导，则

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_L P dx + Q dy$$



L取正向曲线（D处于左手）

【证明】设 $D = \{ (x,y) \mid \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x) \}$

$a \leq x \leq b$.

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = \int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}\,dy \right] dx$$

$$= \int_a^b \{ P[x, \varphi_2(x)] - P[x, \varphi_1(x)] \}\,dx$$

另一方面，对坐标曲线积分

$$\oint_L P\,dx = \int_{L_1} P\,dx + \int_{L_2} P\,dx$$

$$= \int_a^b P[x, \varphi_1(x)]\,dx + \int_b^a P[x, \varphi_2(x)]\,dx$$

$$= \int_a^b \{ P[x, \varphi_1(x)] - P[x, \varphi_2(x)] \}\,dx$$

于是得到

$$-\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = \oint_L P\,dx$$

类似地，设

$$D = \{ (x,y) \mid \varphi_1(y) \le x \le \varphi_2(y),\ c \le y \le d \}$$

又可得到

$$\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy = \oint_L Q\,dy$$

这样我们即证明了

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\,dy = \oint_L P\,dx + Q\,dy$$

如果条件 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ 成立，则有

$$\oint_L P\,dx + Q\,dy = 0$$

全微分

$$du = P\,dx + Q\,dy \text{ 成立}$$

因为 $du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy$

$$P = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad Q = \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$$

即 $$\boxed{\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}}$$

与路径无关，

10 月 13 日

讲历史，谈责任

高等学校是搞学术的。任何一门学科的背后都有着一部厚重的历史。

教学自然无法回避学术发展史，我们很容易发现：现代学术发展史几乎就是欧洲和美国的勃起史，但却与我国关系不大。这正是先进的发展国家与发展中国家——我们中国的最大差距。

每一个国家从兴起到发展，总要跨过几个艰苦的“门槛”——国家体制的发展；国家科学的发展；国家工农业的发展。我们中国也必须如此。

在教学中讲述历史，会给在座的广大青年学生加上严肃的责任感和巨大的使命感。

人家的昨天，就是我们的今天和明天。我们现在落后，但我们不怕落后，并且不能也决不会永远落后。让大家发奋图强，自强不息，赶超世界水平。