3

解析函数（Ⅰ）

在复变函数的发展史上，解析函数研究是最重要的里程碑。正是从这一点开始，复函数摆脱了跟着实函数亦步亦趋的研究模式，走上了自主发展的道路。

解析函数是从研究复微分发端的。

一、单连域和复连域

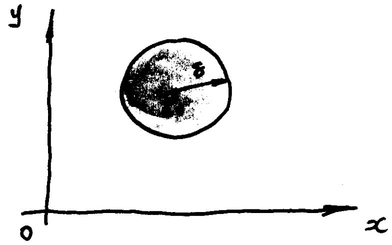
复数的几何表述是 z 面与 w 面之间的映射。

1 邻域

在复平面上，以某点 z_0 为中心，任意小正数 δ 为半径的圆域内部全部点集，称之为 z_0 的邻域。

它包括两种情况

- $0\le|z-z_0|<\delta$，即包括 z_0 在内的都称邻域。
- $0<|z-z_0|<\delta$，不包括 z_0，称去心邻域。



邻域

Note：不论上述何种情况，邻域都不包括边界。即 $|z-z_0|=\delta$ 不是邻域。

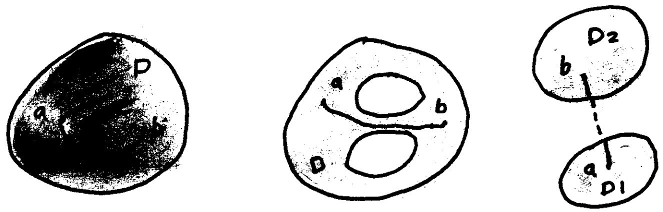
2. 区域

【定义】 复平面上点集 D，满足以下两个条件，则称为区域

- D 是开集，点集中每个点都有邻域，且邻域内每个点均属于 D；

• D是连通的，点集中任意两点都可以用属于完全是

是D的一条简单曲线连接。



(a) 区域　　(b) 区域　　(c) 非区域

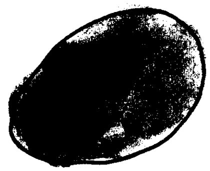
区　域

【定义】 复平面内不属于D的点，而其邻域总有属于D的点，这种点称为边界。边界用Γ表示。

【定义】 闭域 $\bar{D}$ 是D和Γ的组成点集

$$\bar{D} = D \cup \Gamma \qquad (1)$$

点集总可以用一有限半径圆来包围 称D为有界集；反之为无界域。有界集的补集为无界集。



D补集

D的补集 —— 无界域

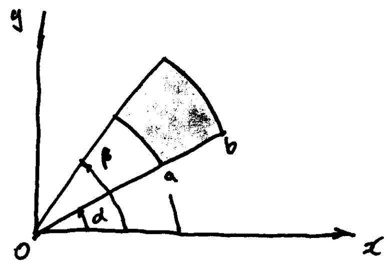
简单曲线 —— 不断、不交.

3. 单连域和多连域

【定义】 由一条简单曲线能包围的区域称作单连域(a)，域内点集全部属于D；反之为多连域，见(b).

【例-1】 $D=\{z \mid a\le z\le b,\ \alpha\le \arg z\le\beta\}$

其中，$\alpha>-\pi$，$\beta<\pi$



扇形闭域

二. 复函数极限和连续性

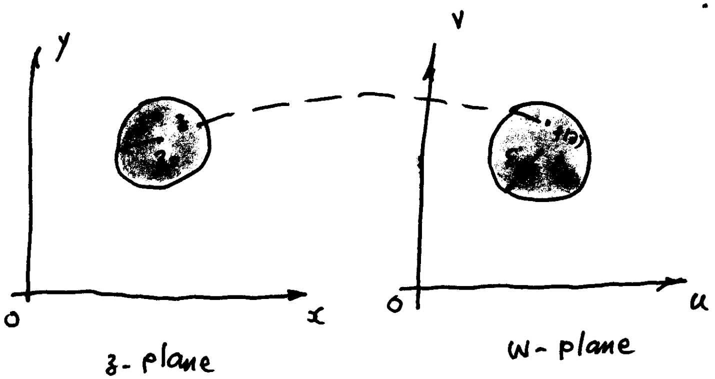
1. 复函数极限

复函数的极限是双平面 $\delta-\varepsilon$ 极限.

【定义】 设 $w=f(z)$ 在 z_0 的去心邻域内 (即 $0<|z-z_0|<\rho$) 存在一复数 $A=u_0+iv_0$ 当任给一正数 $\varepsilon>0$, 相应必有对应 $\delta(\varepsilon)$ ($0<\delta\le\rho$) 使

$$|f(z)-A|<\varepsilon$$

则称 A 是 $f(z)$ 当 $z\to z_0$ 的极限.



记作 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=A$. (2).

两平面映射意味复数 $\delta-\varepsilon$ 极限.

Note. 到此为止, 复函数依然保有摆脱实函数定义的阴影. 从本质上说: 复函数极限完全等价于二元实函数的极限. 即 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=A$ 极限的充要条件是

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u(x,y)=u_0, \quad \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} v(x,y)=v_0 \qquad (3)$$

2. 复函数的连续性

【定义】 若 $f(z)=f(z_0)$, 则 $f(z)$ 在 z_0 处连续. 处处连续的函数即为连续函数.

三. 复函数的导数和微分

让复函数真正走出独立自主道路的分水岭是从研究导数开始的.

1. 复函数导数.

关键在于 $z \to z_0$ 在平面上有各种方向, 那么

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$$ 是否存在? 是一个大问题.

【例-2】 $f(z) = ax + iby \quad (a \neq 0,\ b \neq 0)$

问是否可导?

【解】 $$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z} =$$

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{a(x_0+\Delta x)+ib(y_0+\Delta y)-ax_0-iby_0}{\Delta x+i\Delta y}$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{a\Delta x+ib\Delta y}{\Delta x+i\Delta y} = a + \lim_{\Delta z \to 0} \frac{i(b-a)\Delta y}{\Delta x+i\Delta y}$$

Case 1, $b=a$. 则导数极限存在.

Case 2, $b \neq a$ 则不同方向 $z \to z_0$ 有不同结果.

设 $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \tan\theta$ 表示不同方向, 于是有

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z} = a + \frac{(b-a)\tan\theta}{1+\tan\theta}$$

- $\theta = 0^\circ$ 极限 $= a$
- $\theta = 90^\circ$ 极限 $= b$.

可见 $b \neq a$ 要数不可导.

进一步我们不仅要得到不可导的现象, 还要找寻它深层次的原因, 重始写出

$$f(z) = ax+iby = \frac{1}{2}a(z+\bar{z}) + \frac{1}{2}b(z-\bar{z})$$

$$= \frac{1}{2}(a+b)z + \frac{1}{2}(a-b)\bar{z}$$

很容易看出: $(a-b)=0$ 才可导的条件表明:

$f(z)$ 不能有 $\bar{z}$ 的部分.

【性质】 复函数中 $f(z)=\bar{z}$ 不可导.

如果我们再作进一步大胆猜测 $f(z)$ 可导的必要条件是可以用 $\bar{z}$ 单独表示(这一点,将由下面作者证明).

Note. 可导和连续的条件要求程度不同.

在 z_0 处可导函数必定在 z_0 处连续;

但是,在 z_0 处连续则未必可导.

2. 微分

$w=f(z)$ 可导,则

$dw=f'(z)dz$ 称为微分.

四. 解析函数

解析函数是复变函数论中最重要的研究对象.

【定义】 若函数 $f(z)$ 在 z_0 和 z_0 的邻域内处处可导,则称 $f(z)$ 在 z_0 处解析. 在 D 区域内处处解析称 $f(z)$ 是 D 的解析函数.

反之, $f(z)$ 在 z_0 处不解析,则 z_0 为 $f(z)$ 的奇点.

在工程中最常遇见的不解析情况有两种:

- $f(z)$ 包含 $\bar{z}$ 的函数成份;
- $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)\to\infty$.

两个解析函数的和差积商(除去分母为零的情况外)还是解析函数;解析函数的复合函数 $w=f[g(z)]$ 也是解析函数.

【Cauchy-Riemann 定理】

$f(z)=u+iv$ 在定义域 D 内解析的充要条件是 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 在 D 内任何一点可微,且满足

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x} \qquad (4)$$

式(4)是著名的 Cauchy-Riemann 条件.

【证明】<u>必要性</u>

若假定 $f(z)$ 在D内解析，即对D内任何一点均可导，有

$$f(z+\Delta z)-f(z)=f'(z)\Delta z+\rho(\Delta z)\Delta z$$

且 $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\rho(\Delta z)=0$，设

$$f(z+\Delta z)-f(z)=\Delta u+i\Delta v$$

$$f'(z)=\xi+i\eta, \quad \rho(\Delta z)=\rho_1+i\rho_2$$

于是得出

$$\Delta u+i\Delta v=(\xi+i\eta)(\Delta x+i\Delta y)+(\rho_1+i\rho_2)(\Delta x+i\Delta y)$$

也即

$$\begin{cases}\Delta u=\xi\Delta x-\eta\Delta y+\rho_1\Delta x-\rho_2\Delta y\\ \Delta v=\eta\Delta x+\xi\Delta y+\rho_2\Delta x+\rho_1\Delta y\end{cases}$$

计及 $\rho_1\to 0$，$\rho_2\to 0$ 证明了

$$\xi=\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}, \quad -\eta=\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

■

<u>充分性</u>

$$f(z+\Delta z)-f(z)=\Delta u+i\Delta v$$

$$=[u(x+\Delta x, y+\Delta y)-u(x,y)]+i[v(x+\Delta x, y+\Delta y)-v(x,y)]$$

计及 $u(x,y)$, $v(x,y)$ 在 $z=x+iy$ 处可微,

即

$$\begin{cases}\Delta u=\dfrac{\partial u}{\partial x}\Delta x+\dfrac{\partial u}{\partial y}\Delta y+\varepsilon_1\Delta x+\varepsilon_2\Delta y\\ \Delta v=\dfrac{\partial v}{\partial x}\Delta x+\dfrac{\partial v}{\partial y}\Delta y+\varepsilon_3\Delta x+\varepsilon_4\Delta y\end{cases}$$

其中 $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \varepsilon_i = 0 \quad (i=1,2,3,4)$

于是 $f(z+\Delta z)-f(z) = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial y}\right)\Delta x$

$$+\left(\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}\right)\Delta y + (\varepsilon_1 + i\varepsilon_3)\Delta x + (\varepsilon_2 + i\varepsilon_4)\Delta y$$

据 Cauchy–Riemann 条件

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = i^2\frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} \end{cases}$$

可以得到

$$f(z+\Delta z)-f(z) = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)(\Delta x + i\Delta y)$$

于是

$$f'(z) = \lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$$

换句话说，函数 $f(z)=u+iv$ 在区域 D 内可导，因而它在 D 内解析

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{i}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{i}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

【推论】 Cauchy–Riemann 条件的极坐标形式

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial r} &= \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} &= -\frac{\partial v}{\partial r} \end{aligned}} \qquad (5)$$

【例-3】 复函数中的主要初等函数均解析.

Case 1 指数函数

$$f(z) = e^z = e^x(\cos y + i\sin y) = u+iv$$

则有 $\frac{\partial u}{\partial x} = e^x\cos y \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = e^x\cos y$

$\frac{\partial u}{\partial y} = -e^x\sin y \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = e^x\sin y$ ∎

$$f'(z)=f(z)=e^{z}$$

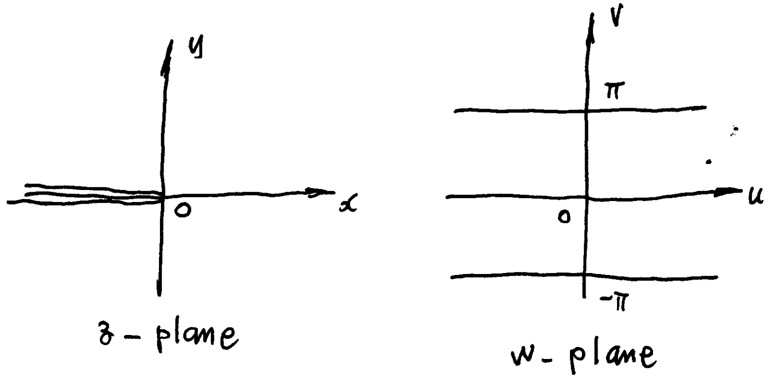
case 2 对数函数

$$f(z)=\mathrm{Ln}\,z=\ln z+i2k\pi$$

由反函数求导法则

$$\frac{d\ln z}{dz}=\frac{1}{\frac{de^{w}}{dw}}=\frac{1}{e^{w}}=\frac{1}{z}$$

$\ln z$ 除去原点与负轴外的平面全部解析.



$\ln z$ 的解析区域

case 3 三角函数

$$\sin z=\sin(x+iy)=\sin x\,\mathrm{ch}\,y+i\cos x\,\mathrm{sh}\,y$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\cos x\,\mathrm{ch}\,y \qquad \frac{\partial v}{\partial y}=\cos x\,\mathrm{ch}\,y$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\sin x\,\mathrm{sh}\,y \qquad \frac{\partial v}{\partial x}=-\sin x\,\mathrm{sh}\,y$$

$$(\sin z)'=\cos z$$

case 4 幂函数

$$f(z)=z^{n}=r^{n}(\cos n\theta+i\sin n\theta)$$

$$\frac{\partial u}{\partial r}=nr^{n-1}\cos n\theta \qquad \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}=nr^{n-1}\cos n\theta$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}=-nr^{n-1}\sin n\theta \qquad \frac{\partial v}{\partial r}=nr^{n-1}\sin n\theta$$

$$(z^{n})'=nz^{n-1}$$

特别当 $f(z)=\frac{1}{z}$，除 $z=0$ 外处处解析.

$z=0$ 为奇点.

通过初等例子看出：

- 和实函数导数统一；
- 根本是从指数 e^z 统一中，e^z 可导

→ 则其它均可导。

【解析函数必要性定理】 $w=f(z)=u+iv$

为解析函数的必要条件为

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}}=0 \qquad (6)$$

【证明】广义地把 w 看成 z 和 $\bar{z}$ 的函数

$$x=\frac{1}{2}(z+\bar{z}), \quad iy=\frac{1}{2}(z-\bar{z})$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial z}=\dfrac{1}{2}, & \dfrac{\partial x}{\partial \bar{z}}=\dfrac{1}{2} \\[2ex] \dfrac{\partial y}{\partial z}=-\dfrac{i}{2} & \dfrac{\partial y}{\partial \bar{z}}=\dfrac{i}{2} \end{cases}$$

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}}=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \bar{z}}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \bar{z}}\right)+ i\left(\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \bar{z}}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \bar{z}}\right)= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{i}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

若满足 Cauchy-Riemann 条件，则

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}}\equiv 0$$

∎

9 月 29 日

教学中的转化

从根本上说来，教学所作的最主要工作之一就是转化——
把教师自己懂转化为学生懂；
把教材中的难点转化为可以理解的弱点；
把研究的代数方法转化为几何方法，反之亦然；
把抽象概念转化为实际可用的典型范例；
把“枯燥的教条”转化为鲜活的语言；
把老师的抱负转化为学生本身爆发出来的万钧之力…
谁转化的好，谁转化的妙，谁就能创造出优质的教学。