# 2

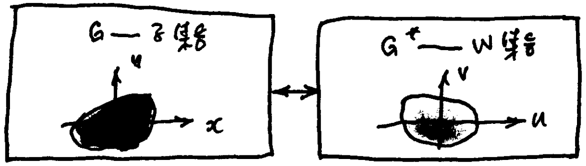
# 复 函 数

从复数发展成复函数是一个十分自然的推广。本课程一贯彻始终的思想：复函数是实函数之延伸。

## 一、复函数定义

【定义】 G是复自变量 $z=x+iy$ 的集合，现有一明确规则，对于G中的每个复数，至少有一个复数 $w=u+iv$ 与之对应。w是应变量，称 w 是 z 的复函数，记为：

$$w=f(z) \qquad (1)$$




复函数

$z \rightarrow$ 对应1个w　　单值函数

$z \rightarrow$ 对应多个w　　多值函数

表面看来，复函数w的提出似乎意义不大，因为 $w=f(z)=u+iv$ 对应两个实函数。

$$\begin{cases} u=u(x,y) \\ v=v(x,y) \end{cases} \qquad (2)$$

但是，后边将清楚指出，在重要的一些情况，u和v存在紧密联系。

其次，我们必须指出：复函数需两个平面。

【例—1】　$w=z^2$ 求 u 和 v

【解】　$u+iv=(x+iy)^2$

$$\begin{cases} u(x,y)=x^2-y^2 \\ v(x,y)=2xy \end{cases}$$

## 二、复指数函数和对数函数

复指数函数定义是通过复幂级数作出的。

### 1. 复指数函数

$$\exp(z)=1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!} \quad (3)$$

【加法定理】 $\exp(z_1)\exp(z_2)=\exp(z_1+z_2)$ (4)

$$\exp(z_1)\exp(z_2)=\left(1+\frac{z_1}{1!}+\frac{z_1^2}{2!}+\cdots\right)\left(1+\frac{z_2}{1!}+\frac{z_2^2}{2!}+\cdots\right)$$

$$=1+\frac{(z_1+z_2)}{1!}+\frac{(z_1+z_2)^2}{2!}+\cdots=\exp(z_1+z_2) \quad \blacksquare$$

Note. 复函数好像是实函数的自然推广，只要 $z\to x$ 形式完全一致，又

$$e^{i2k\pi}=1^{\dagger} \quad (5)$$

【推论】 $\exp(z)$ 是周期函数，周期为 $2\pi$.

即 $\exp(z+i2k\pi)=\exp(z)$ (6)

### 2. 复对数函数

复对数函数作为指数函数的反函数

$$z=e^{w}$$

则定义 $W=\operatorname{Ln} z$ (7)

称为对数函数.

---

† 设 $z=iy$ 由 Euler 公式

$$\exp(iy)=\cos y+i\sin y$$

而 $y=2k\pi$，则得

$\exp(i2k\pi)\equiv1$，$k$ 是整数.

---

【定理】 $W = \mathrm{Ln}\, z = \ln|z| + i\,\mathrm{Arg}\, z$ (8)

是多值函数.

【证明】 $z = re^{i\theta}$, $W = u + iv$ 写出

$$re^{i\theta} = e^{u+iv}$$ 于是

$$\begin{cases} u = \ln r = \ln|z| \\ v = \theta = \mathrm{Arg}\, z \end{cases}$$

由于 $\mathrm{Arg}\, z$ 是多值函数, 所以 $\mathrm{Ln}\, z$ 为多值函数.

进一步定义

$$\ln z = \ln|z| + i\arg z \qquad (9)$$

式中 $\arg z \in [0, 2\pi]$ 表示对数主值函数.

$$\mathrm{Ln}\, z = \ln z + i2k\pi \quad (k = \pm 1, \pm 2 \cdots) \qquad (10)$$

Note: 复对数函数多值性实质源自指数的周期性. 换句话说, 周期函数的反函数必多值.

| | |
|---|---|
| 性质 | • $\mathrm{Ln}(z_1 z_2) = \mathrm{Ln}(z_1) + \mathrm{Ln}(z_2)$ <br> • $\mathrm{Ln}(z_2/z_1) = \mathrm{Ln}(z_2) - \mathrm{Ln}(z_1)$ |

【例-2】 求 $\mathrm{Ln}(-1)$ 主值.

$$\mathrm{Ln}(-1) = i\pi + i2k\pi. \qquad \ln(-1) = i\pi$$

Note: 主值未必是实值.

## 三. 复三角函数和双曲函数

### 1. 三角函数

【定义】 还是按 Series 写出

$$\begin{cases} \sin z = z - \dfrac{z^3}{3!} + \dfrac{z^5}{5!} - \cdots & (11) \\[2ex] \cos z = 1 - \dfrac{z^2}{2!} + \dfrac{z^4}{4!} - \cdots & (12) \end{cases}$$

【复 Euler 公式】

$$e^{iz} = \cos z + i\sin z \qquad (13)$$

只需据复指数定义 $iz \to z$ 即可. Note $\cos z$ 并非实部.

$$
\boxed{\begin{aligned}
\sin z &= \frac{1}{2i}\left(e^{iz}-e^{-iz}\right)\\
\cos z &= \frac{1}{2}\left(e^{iz}+e^{-iz}\right)\\
\tan z &= \frac{1}{i}\left(\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{e^{iz}+e^{-iz}}\right)
\end{aligned}}
$$

且 $$e^{z} = e^{x}(\cos y + i\sin y) \qquad (14)$$

上式是复指数的等价公式.

| | | |
|---|---|---|
| 性质 | 奇偶性 | $\sin(-z) = -\sin z$ 奇函数<br>$\cos(-z) = \cos z$ 偶函数 |
| | 归一性 | $\sin^2 z + \cos^2 z \equiv 1$ |
| | 周期性 | $\sin(z+2k\pi) = \sin z$<br>$\cos(z+2k\pi) = \cos z$ |
| | 加法定理 | $\sin(z_1 \pm z_2) = \sin z_1 \cos z_2 \pm \cos z_1 \sin z_2$<br>$\cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cos z_2 \mp \sin z_1 \sin z_2$ |

【例-3】 计算 $\sin(i)$ 和 $\cos(i)$

$$\sin(i) = \frac{1}{2i}\left(e^{-1}-e\right) = 1.17520\, i$$

$$\cos(i) = \frac{1}{2}\left(e^{-1}+e\right) = 1.54308$$

可见, 复三角函数 $|\sin i|$, $|\cos i|$ 完全可能大于 1.

但 $\cos^2(i) + \sin^2(i) \equiv 1$.

【例-4】 证明下列级数和

$$1 + 2\cos\theta + 2\cos 2\theta + \cdots + 2\cos n\theta$$

$$= \frac{\sin(2n+1)\frac{\theta}{2}}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{\cos n\theta - \cos(n+1)\theta}{1-\cos\theta}$$

【证明】 由 Euler 公式

$$S = e^{-in\theta} + \cdots + e^{-i\theta} + 1 + e^{i\theta} + \cdots + e^{in\theta}$$

此式是典型的几何级数, 记 $q = e^{i\theta}$.

$$s=\frac{e^{-in\theta}-e^{i(n+1)\theta}}{1-e^{i\theta}}=\frac{e^{i(n+\frac{1}{2})\theta}-e^{-i(n+\frac{1}{2})\theta}}{e^{i\frac{\theta}{2}}-e^{-i\frac{\theta}{2}}}$$

$$=\frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}\theta\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}.$$

也可采用另一种形式

$$s=\frac{\left(e^{-in\theta}-e^{i(n+1)\theta}\right)\left(1-e^{-i\theta}\right)}{\left(1-e^{i\theta}\right)\left(1-e^{-i\theta}\right)}$$

$$=\frac{\cos n\theta-\cos(n+1)\theta}{1-\cos\theta} \quad \blacksquare$$

## 2. 复双曲函数

$$\begin{cases} \operatorname{ch} z=\frac{1}{2}\left(e^{z}+e^{-z}\right) \\ \operatorname{sh} z=\frac{1}{2}\left(e^{z}-e^{-z}\right) \end{cases} \tag{15}$$

对比复三角函数，可知

$$\begin{cases} \operatorname{ch}(iz)=\cos z \\ \operatorname{sh}(iz)=i\sin z \end{cases} \tag{16}$$

完全可以把复双曲函数代入复三角函数看待，且

$$\operatorname{ch}^2 z-\operatorname{sh}^2 z\equiv 1 \tag{17}$$

同时，复双曲是周期函数，周期为 $i2\pi$.

## 3 复反三角函数.

【定义】 若 $z=\cos w$，则

$$w=\cos^{-1} z \tag{18}$$

由 $z=\cos w=\frac{1}{2}\left(e^{iw}+e^{-iw}\right)$，即

$$e^{i2w}-2ze^{iw}+1=0$$

$$e^{iw}=z+\sqrt{z^2-1}$$

$$w = \cos^{-1} z = -i\,\mathrm{Ln}\left(z + \sqrt{z^2-1}\right) \qquad (19)$$

$\cos^{-1} z$ 是多值函数.

## 四 复幂级数

【定义】 $a^b = e^{b\,\mathrm{Ln}\,a}$ (20)

Note $a = e^{\mathrm{Ln}\,a}$

【例-5】 计算 $1^{\sqrt{2}}$ 和 $i^i$

【解】 $1^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2}\,\mathrm{Ln}\,1} = e^{i2k\pi\sqrt{2}}$

$= \cos(2k\pi\sqrt{2}) + i\sin(2k\pi\sqrt{2})$

Note. 在复域中, 1的任意次幂未必是1.

$i^i = e^{i\,\mathrm{Ln}\,i} = e^{i\left(\frac{\pi}{2}i + i2k\pi\right)}$

$= e^{-\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)} \qquad (k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$

Note $i^i$ 是正实数.

开方幂 $z^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{z}$

$\sqrt[n]{z} = \exp\left(\frac{1}{n}\mathrm{Ln}\,z\right) = e^{\frac{1}{n}\ln|z|}$

$\left[\cos\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\right]$ (21)

它是多值函数, 有n个分支.

## 五. 映射 (mapping)

映射是复函数的几何表示: 平面 → 平面.

映射大致可以分为三类:

- 区域映射 (或点映射);
- 曲线映射
- 等位线映射

我们以 $w=z^2$ 为例加以说明.

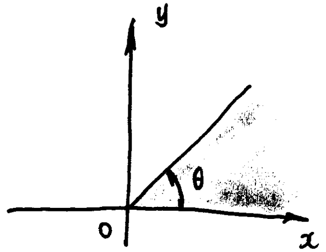
## Case 1 区域映射

z-plane $0\leq\theta\leq\frac{\pi}{4}$ 向 w-plane 映射

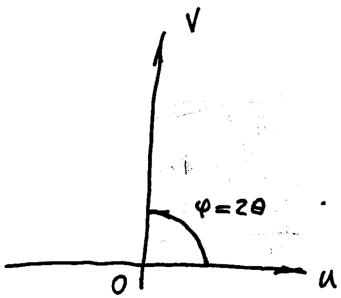
$$z=re^{i\theta}, \quad w=Re^{i\varphi}$$

$$w=z^2=r^2e^{i2\theta}$$

$\Phi=2\theta$，即 $0\leq\varphi\leq\frac{\pi}{2}$




z-plane




w-plane

$w=z^2$ 的区域映射

## Case 2 曲线映射

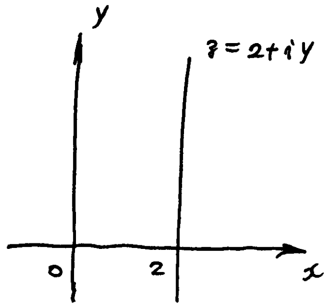
z-plane $z=2+iy$ 向 w-plane 映射

$$W=(x^2-y^2)+i2xy=(4-y^2)+i4y$$

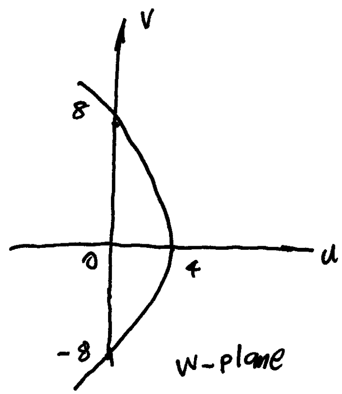
$$\begin{cases} u=4-y^2 \\ v=4y \end{cases}$$

Note: u和v相互有联系.

$$u=4-\frac{1}{16}v^2$$




z-plane

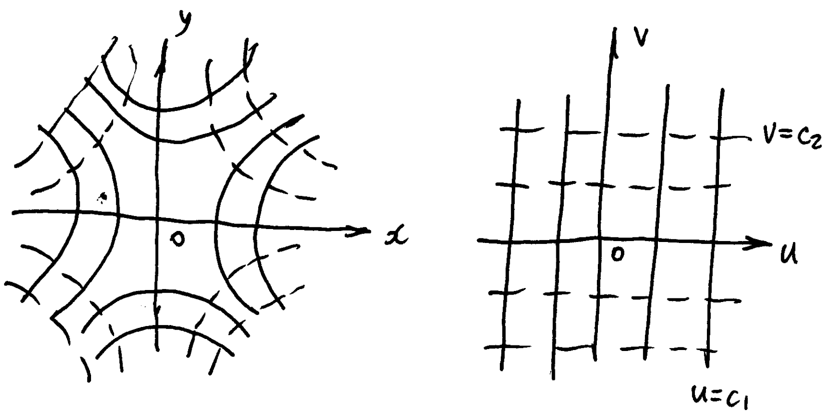



w-plane

曲线映射

# Case 3 等位线映射

$$\begin{cases} u = x^2 - y^2 = c_1 \\ v = 2xy = c_2 \end{cases}$$




z - plane　　w-plane

等位线映射

我们最后讨论一种很重要的 ——

儒可夫斯基映射

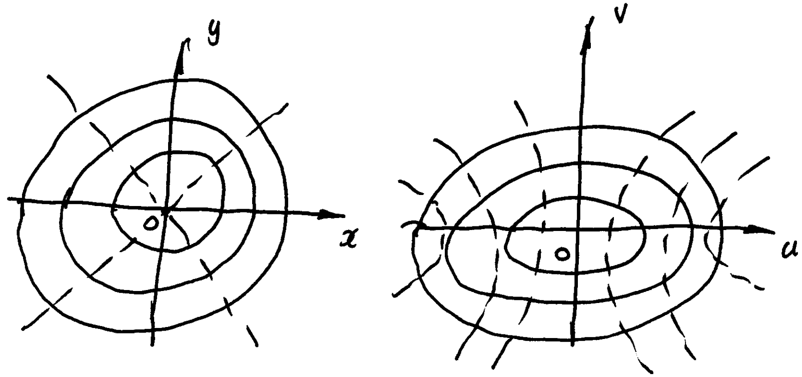
$$w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) \qquad (22)$$

它把圆变为椭圆.

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta), \quad w = u + iv$$

$$\begin{cases} u = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\theta \\ v = \frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\theta \end{cases}$$

$$\frac{u^2}{\left[\frac{1}{2}\left(r+\frac{1}{r}\right)\right]^2} + \frac{v^2}{\left[\frac{1}{2}\left(r-\frac{1}{r}\right)\right]^2} = 1 \qquad (23)$$




z - plane　　w - plane

儒可夫斯基变换

9 月 26 日

## 数学的神秘性

为什么有那么多人喜欢数学，特别是有那么多天才科学家迷恋数学？

原因当然有很多，甚至各不相同。但是，最重要的两条很可能在于数学的应用性和数学的神秘性。

数学应用、深入而且奇妙。有人用最简单语言概括：数学把物理思想和概念提高到空前未有的高度，并且创造出理论物理。

至于数学的神秘性则几乎没有人“敢讨论”。事实上，“文章本天成，妙手偶得之。”它确实是客观存在，且最重要的特点是：**美、绝、神！**

还是以矢量理论为例，算子$\nabla$的两重性，使我们可以作出比较。

| 运算 | 矢量 | 算子 | 场 |
| --- | --- | --- | --- |
| 数乘 | $\vec{P}k$ | $\nabla u$ | 位场 |
| 点乘 | $\vec{P}\cdot\vec{A}$ | $\nabla\cdot\vec{A}$ | 有源场 |
| 叉乘 | $\vec{P}\times\vec{A}$ | $\nabla\times\vec{A}$ | 有流场 |

很明显看出，$\nabla\cdot\vec{A}$和$\nabla\times\vec{A}$是很自然引出的，且反映矢量场的两种特性，**有源场**和**有流场**，确实美！

Gauss 定理把通量$\varphi$和散度$\nabla\cdot\vec{A}$联系起来；而 Stokes 定理把旋量$\Gamma$和旋度$\nabla\times\vec{A}$结合起来，一切都似乎是“故意安排”的，真是绝！

| | |
| --- | --- |
| Gauss 定理 | $\varphi=\oiint_S \vec{A}\cdot d\vec{S}=\iiint_v \nabla\cdot\vec{A}dV$ |
| Stokes 定理 | $\Gamma=\oint_l \vec{A}\cdot d\vec{l}=\oiint_S \nabla\times\vec{A}\cdot d\vec{S}$ |

已知$\vec{A}\cdot\vec{B}$和$\vec{A}\times\vec{B}$，我们可以定义矢量除法；而已知$\nabla\cdot\vec{A}$和$\nabla\times\vec{A}$，我们则可以唯一确定场$\vec{A}$，太神啦！

数学反应客观事物，而客观事物犹如一个深不可测的岩洞，非常需要我们“冒险探测”和“深入揭示”。