1

复　数

一、复数的概念

讨论复数的概念包含三个层次：复数的引入；复数的对应和复数的自身运动。

1. 复数的引入

引入复数最初纯粹是因求解代数方程而提出的。

1484年，法国舒开首先孕育一先进思想——每个方程都应该有根，但它完全是特例性的。1545年意大利的3次方程怪杰卡尔丹给出命题："把10分成两部分，使其乘积为40。"†

随后，法国笛卡尔取 $i=\sqrt{-1}$，彻底给虚数正名，正式出现了imaginary。而Gauss则进一步把实和虚放到一起

$$z=a+ib \tag{1}$$

并名为Complex。

Gauss对于数，特别对于复数极有兴趣，他一生采用了多种办法证明了代数基本定理：也即

$$x^n+b_1x^{n-1}+\dots+b_n=0 \tag{2}$$

上述n次方程存在n个根，十分明显，如果不扩展数域，则代数方程理论是不完备的。

---

† 卡尔丹命题翻译成代数语言，有 $x(10-x)=40$，或写成标准二次方程

$$x^2-10x+40=0$$

它有两个复根 $x_1=5+i\sqrt{15}$，$x_2=5-i\sqrt{15}$

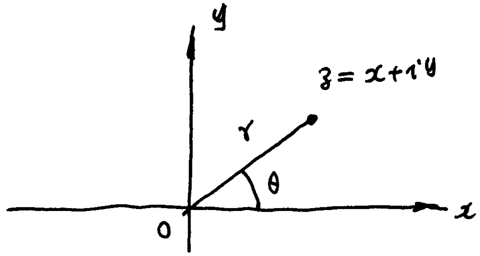
2. 复数的对应

在现实物理世界中，一切可以与复数对应的体系均可采用复数理论。挪威测量学家韦塞尔首先提出了 Complex plane 和 Complex Geometry.

当代数和几何以孤傲的姿态各自发展时，它们总感到有某种孤独和缺陷。而一旦让它们携起手来，数学就出现飞跃。

笛卡尔促使了代数和几何实现"第一次握手"。1619年11月10日，雨夜的雷声震醒了整日沉思而又正在昏睡的笛卡尔。在迷蒙中的他突然看见窗框中间苍蝇的飞行轨迹。这使笛卡尔幡然醒悟：窗框即 xoy 坐标系，而飞行轨迹即 $f(x)=0$。新兴的学科：代数和几何紧密结合——解析几何出现了。一位数学史家作过如此评价，没有笛卡尔的解析几何，就没有 Newton 的微积分。

复数的几何表示——把复数——对应于几何的复平面。韦塞尔促使复代数与几何实现"第二次握手"。这样一来，复微分和复积分的发展也就顺理成章了。



复平面

对应极坐标形式 $|z| = r = \sqrt{x^2+y^2}$ (3)

$\theta = \mathrm{Arg}(z) \quad \tan\theta = y/x$ (4)

主值为 $\arg(z) \in (-\pi, \pi]$

$\mathrm{Arg}(z) = \arg(z) + 2k\pi$ (5)

笛卡尔平面与 Complex plane 不同.

- 笛卡尔平面的 x, y 可以是任意实数

即 $y=f(x)$，而复平面 $z=x+iy$ 是一对复向量.

- 笛卡尔平面中横纵坐标相互独立，而 z-plane 中 $i^2=-1$：y 和 x 量可相互转化.

代数表示法	$z=x+iy$	$x,y\in R$ $\begin{cases} Re(z)=x \\ Im(z)=y \end{cases}$
三角表示法	$z=r\cos\theta+ir\sin\theta$	$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$
指数表示法	$z=re^{i\theta}$	$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ Euler公式 †

3. 复数的自洽运动

任何一种理论在起始阶段有着应用和实际背景. 但进一步发展又有自洽的规律. 复数概念发展也有自洽运动.

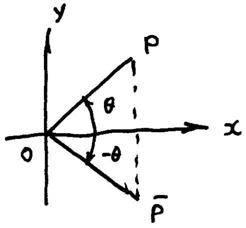
复数的第一运动就是建立自洽的运算体系.

二. 复数的运算体系.

1. 基本定义

0定义	$x=0$, $y=0$ 则 $z=0$	$z=0$ 时 θ 无意义
相等定义	$x_1=x_2$, $y_1=y_2$ 则 $z_1=z_2$	$r_1=r_2$, $\theta_1=\theta_2$ $(z\neq 0)$
模大小	$\lvert z\rvert=\sqrt{x^2+y^2}$	复数可比较大小
共轭定义	$\bar{z}=x-iy$	也有用 z^* 表示 $\bar{z}$

† 在复数发展的历史上，Euler公式是一个极其重要的里程碑. 它将在复数域的意义下，指数和三角函数联系了起来.



共轭的像点对称.

2. 基本运算

加减法	$z_1\pm z_2=(x_1\pm x_2)+i(y_1\pm y_2)$
乘法	$(z_1\cdot z_2)=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1)=r_1r_2e^{i(\theta_1+\theta_2)}$
除法	$\left(\frac{z_2}{z_1}\right)=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_1^2+y_1^2}+i\frac{x_1y_2-x_2y_1}{x_1^2+y_1^2}=\frac{r_2}{r_1}e^{i(\theta_2-\theta_1)}$ $z\neq0$

De Moiver 公式

乘幂	$z^n=r^ne^{in\theta}=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$
开方	$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}\,e^{i\frac{\theta_0}{n}}=\sqrt[n]{r}\,(\cos\frac{\theta}{n}+i\sin\frac{\theta}{n})$ $\theta=\theta_0+2k\pi,\ k=0,1,\cdots(n-1)$

3. 共轭复数运算

$$z+\bar{z}=2x,\quad z-\bar{z}=2iy$$

$$z\bar{z}=|z|^2,\quad |\bar{z}|=|z|$$

$$\overline{z_1\pm z_2}=\bar{z}_1\pm\bar{z}_2$$

$$\overline{z_1z_2}=\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2$$

$$\overline{(z_2/z_1)}=\bar{z}_2/\bar{z}_1$$

4. 模运算

$$|z_1z_2|=|z_1||z_2|$$

$$|z_2/z_1|=|z_2|/|z_1|\quad(z_1\neq0)$$

$$\big||z_1|-|z_2|\big|\leqslant|z_1\pm z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|$$

最后一个公式在几何上可解释为三角形两边之和大于第三边；而两边之差小于第三边。

【例-1】 已知 $|z|=1$. 试证对于任何非零复数 a 和 b 均有 $\left|\dfrac{az+b}{\bar a+\bar b z}\right|=1$

【证明】 据 $|z|=1$, 可知 $z\bar z=|z|^2=1$

$$\left|\frac{az+b}{\bar a+\bar b z}\right| = \left|\frac{az+b}{\bar a\bar z+\bar b\bar z z}\cdot\frac{1}{z}\right|$$

$$=\left|\frac{az+b}{\overline{az+b}}\right|\left|\frac{1}{z}\right|=1 \,. \blacksquare$$

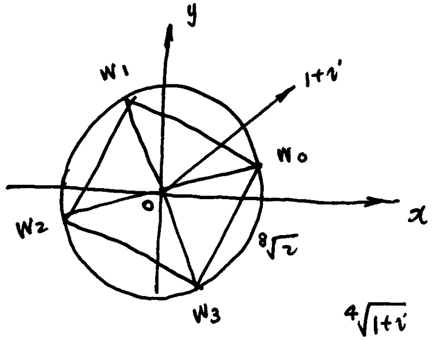
【例-2】 求 $\sqrt[4]{1+i}$

【解】 求方根可采用 De Moiver 定理

$1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ 于是

$$\sqrt[4]{1+i}=\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{4}+i\sin\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{4}\right)$$

$k=0,1,2,3.$



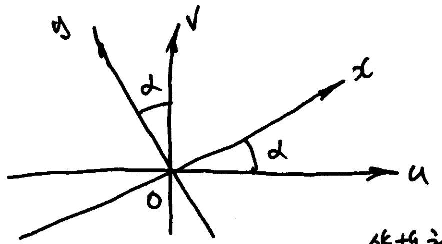
$\sqrt[4]{1+i}$ 根分布.

【例-3】 $w=e^{i\alpha}z$ 表示z平面正向旋转α度

【解】 $w=(u+iv)=(\cos\alpha+i\sin\alpha)(x+iy)$

$$\begin{cases} u=x\cos\alpha-y\sin\alpha \\ v=x\sin\alpha+y\cos\alpha \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$



坐标旋转

【例-4】历史上几个著名的π计算公式

(1) $\frac{\pi}{4} = \arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{3}\right)$

$$(2+i)(3+i) = 5(1+i) = 5\sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$= 5\sqrt{2}\, e^{i\left(\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)\right)}$$

(2). $\frac{\pi}{4} = 4\arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{239}\right)$

——马青公式

$$(5-i)^4(1+i) = \sqrt{913952}\, e^{-i\tan^{-1}\left(\frac{1}{239}\right)}$$

$$= \sqrt{913952}\, \exp\left\{ i\left[4\arctan\left(-\frac{1}{5}\right)+\frac{\pi}{4}\right]\right\} \blacksquare$$

三. 复数与平面矢量.

匈牙利著名美国数学家 G. Polya 提出的 z_1, z_2 表示平面复数，而 $\vec{z}_1, \vec{z}_2$ 则是对应的平面矢量.

【定理】 $\bar{z}_1 z_2 = (\vec{z}_1 \cdot \vec{z}_2) + i\{\vec{z}_1 \times \vec{z}_2\}$

$\{\ \}$ 符号表示不计方向的叉积值.

【证明】(1). 从复数角度

$$\bar{z}_1 z_2 = (x_1 - i y_1)(x_2 + i y_2) = (x_1x_2 + y_1y_2) + i(x_1y_2 - x_2y_1)$$

(2). 从矢量角度

$$\vec{z}_1 \cdot \vec{z}_2 = (x_1\hat{i} + y_1\hat{j})\cdot(x_2\hat{i} + y_2\hat{j}) = x_1x_2 + y_1y_2.$$

$$\vec{z}_1 \times \vec{z}_2 = (x_1y_2 - x_2y_1)\hat{k} \quad \blacksquare$$

四. 复数应用

1. 复数几何

直线方程	$\bar{\alpha}z+\alpha\bar{z}+c=0$	$\alpha\neq0$ 任一复数 c — 实数
圆方程	$\lvert z-\alpha\rvert=c$	
椭圆方程	$\lvert z-\alpha\rvert+\lvert z-\beta\rvert=2c$	
双曲线方程	$\lvert z-\alpha\rvert-\lvert z-\beta\rvert=2c$	

【例-5】 作为例子，试证 $\bar{\alpha}z+\alpha\bar{z}+c=0$ 为直线方程

【证明】 平面直线方程的实表示是

$$ax+by+c=0$$

$$\frac{1}{2}a(z+\bar{z})+\frac{b}{2i}(z-\bar{z})+c=0$$

$$\frac{1}{2}(a-ib)z+\frac{1}{2}(a+ib)\bar{z}+c=0$$

只须令 $\alpha=\frac{1}{2}(a+ib)$，$\bar{\alpha}=\frac{1}{2}(a-ib)$ 即所求. ■

2. 三角方程的复证明

Euler 公式

$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$

De Moiver 定理

$z^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$

$\longrightarrow$ 三角方程 复证明

$$\begin{cases}\cos2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta\\ \sin2\theta=2\sin\theta\cos\theta\\ \cos3\theta=\cos^3\theta-3\sin^2\theta\cos\theta\\ \sin3\theta=3\sin\theta\cos^2\theta-\sin^3\theta\end{cases}$$

⊕ De Moiver 定理

$$e^{in\theta}=\cos n\theta+i\sin n\theta=(\cos\theta+i\sin\theta)^n$$

令 $n=2$

$(\cos\theta+i\sin\theta)^2=\cos2\theta+i\sin2\theta$，即有

$\cos2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta$

$\sin2\theta=2\sin\theta\cos\theta$

$n=3$

$(\cos\theta+i\sin\theta)^3=\cos3\theta+i\sin3\theta$ 同样有

$\cos3\theta=\cos^3\theta-3\sin^2\theta\cos\theta$

$\sin3\theta=3\sin\theta\cos^2\theta-\sin^3\theta$

五 复球面

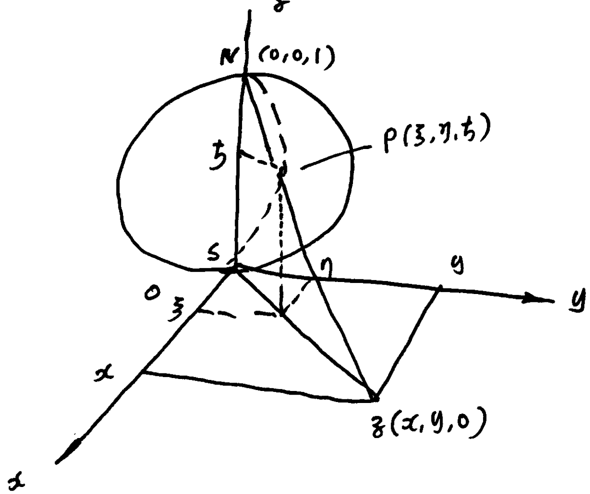
根据对应的思想，复数的几何除了 z 平面外，

〈还可用 Riemann 球

直径为1的球面与复平面 z 在 $z=0$ 处相切 S 点

$S(0,0,0)$ 称为 Riemann 球南极；$N(0,0,1)$ 则为北极.

对应
$$\begin{cases} z(x,y,0)=x+iy & z\text{-plane} \\ P(\xi,\eta,\zeta) & \text{Riemann球} \end{cases}$$



Riemann 球

$$\begin{cases} \xi^2+\eta^2+\zeta^2=\zeta \\ \xi^2+\eta^2+\left(\zeta-\frac{1}{2}\right)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2 \end{cases}$$

对应方程

$$\frac{x}{\xi} = \frac{y}{\eta} = \frac{1}{1-\zeta}$$

很易写出

$$\begin{cases} \xi = (1-\zeta)x \\ \eta = (1-\zeta)y \end{cases}$$

代入 Riemann 球方程

$$(1-\zeta)^2(x^2+y^2) = \zeta(1-\zeta)$$

$$(1-\zeta)(x^2+y^2) = \zeta$$

$$\zeta = \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2+1}, \quad 1-\zeta = \frac{1}{x^2+y^2+1}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \begin{cases} \xi = \dfrac{x}{x^2+y^2+1} = \dfrac{z+\bar{z}}{2(|z|^2+1)} \\[2ex] \eta = \dfrac{y}{x^2+y^2+1} = \dfrac{z-\bar{z}}{2i(|z|^2+1)} \\[2ex] \zeta = \dfrac{x^2+y^2}{x^2+y^2+1} = \dfrac{|z|^2}{(|z|^2+1)} \end{cases} \\ \hline \begin{cases} x = \dfrac{\xi}{1-\zeta} \\[2ex] y = \dfrac{\eta}{1-\zeta} \end{cases} \end{array}}$$

9 月 22 日

度

《矢算场论》这门课，**度**是最重要的概念之一。

度在物理上——反映微观变化与微观特征。

度在数学上——表现算子∇与场（数量场 u 和矢量场$\vec{A}$）的**相互作用**。

从科学的方法论观点观察问题，把算子

$$\nabla=\hat{i}\frac{\partial}{\partial x}+\hat{j}\frac{\partial}{\partial y}+\hat{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

与它的运算**对象**分开，作为运算因素**单独**提炼出来是人们概念上一个很大**创新**，思想上一个很大升华。

表面看来，单独的一个运算，犹如乘法符号×，它是无源之水，无本之木，它**什么都不是**！

正是算子∇“什么都不是”，它既可以与数量场u相互作用；又可以与矢量场$\vec{A}$相互作用，形成各种度。

算子∇	数量场 u	∇u	梯度
	矢量场$\vec{A}$	$\nabla\cdot\vec{A}$	散度
		$\nabla\times\vec{A}$	旋度

需要提醒：算子与算子之间也可相互作用，从而形成新的运算，典型的有

$$\nabla\cdot\nabla=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$\nabla\times\nabla=0$$

其中，第 2 式是算子的一种**矢量理解**。