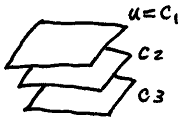
4 梯度

先将上一讲的主要内容概括如下

数量场	矢量场
$u(x,y,z)$	$\vec{A}(x,y,z)$
宏观特征—等值面	宏观特征—矢线分布
	
$u(x,y,z)=C$	$\frac{A_x}{dx}=\frac{A_y}{dy}=\frac{A_z}{dz}$

数量场、矢量场的微观特征

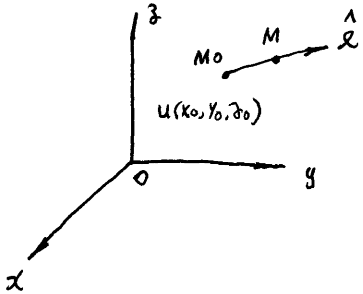
Hamilton 算子 $\nabla=\hat{i}\frac{\partial}{\partial x}+\hat{j}\frac{\partial}{\partial y}+\hat{k}\frac{\partial}{\partial z}$

梯度是数量场在 Space 中最重要的微观特征量

等值面是数量场	梯度是数量场
$u(x,y,z)$ 的宏观特征	$u(x,y,z)$ 空间变化微观特征

在空间数量场 $u(x,y,z)$ 的某点沿任何方向都会做出变化，因此，变化方向是数量场研究的独有特色.

一、$\hat{e}$ 的方向余弦



在数量场 $u=u(x,y,z)$ 的空间中取 M_0，对应 $u(x_0,y_0,z_0)$，让我们来研究场在 $\hat{e}$ 方向的变化规律. 任取 $\Delta\hat{e}$

$$\Delta\hat{l} = \Delta x\,\hat{i} + \Delta y\,\hat{j} + \Delta z\,\hat{k}$$

$$|\Delta\hat{l}| = \Delta l = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}$$

于是，写出该方向单位矢

$$\hat{l} = \left(\frac{\Delta x}{\Delta l}\right)\hat{i} + \left(\frac{\Delta y}{\Delta l}\right)\hat{j} + \left(\frac{\Delta z}{\Delta l}\right)\hat{k}$$

令 $\cos\alpha = \frac{\Delta x}{\Delta l}$，$\cos\beta = \frac{\Delta y}{\Delta l}$，$\cos\gamma = \frac{\Delta z}{\Delta l}$

分别表示 $\hat{l}$ 与 x, y, z 的方向余弦

$$\hat{l} = \cos\alpha\,\hat{i} + \cos\beta\,\hat{j} + \cos\gamma\,\hat{k}$$

且满足 $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$

我们首先研究方向

二、方向导数 $\frac{\partial u}{\partial l}$

现在，进一步研究数量场 u 在 $\hat{l}$ 方向的变化规律。

【定义】 M_0 是数量场 $u = u(M)$ 空间中的一点。

取 $\hat{l}$ 方向上动点 M，记

$$\overline{M_0M} = \Delta l$$

知

$$\frac{\Delta u}{\Delta l} = \frac{u(M) - u(M_0)}{\overline{M_0M}}$$

若 $M \to M_0$ 时，上式极限存在，则称之为 $u(M)$ 在 M_0 点沿 $\hat{l}$ 方向的方向导数，具体写出

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{M_0} = \lim_{M \to M_0} \frac{u(M) - u(M_0)}{\overline{M_0M}}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial l} > 0 & u \text{ 随 } \hat{l} \text{ 增加} \\ \frac{\partial u}{\partial l} < 0 & u \text{ 随 } \hat{l} \text{ 减少} \\ \frac{\partial u}{\partial l} = 0 & u \text{ 处于等值面} \end{cases}$$

【定理】 数量场 $u=u(x,y,z)$ 在 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 处可微，则 u 在 M_0 处沿 $\hat{l}$ 的方向导数必存在，且作有

$$\frac{\partial u}{\partial l}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$$

【证明】 由全微分

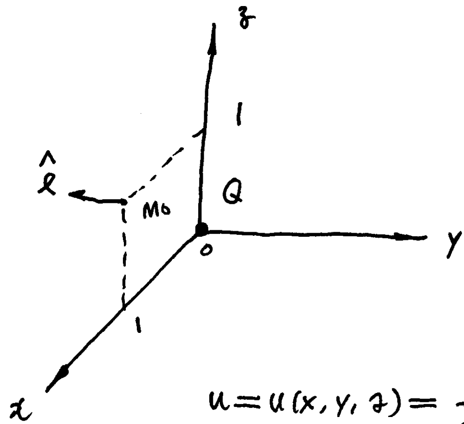
$$\Delta u=u(M)-u(M_0)=\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial u}{\partial y}\Delta y+\frac{\partial u}{\partial z}\Delta z+\delta\Delta l$$

$$\frac{\Delta u}{\Delta l}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\Delta x}{\Delta l}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta l}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\Delta z}{\Delta l}+\delta$$

$$\frac{\partial u}{\partial l}=\lim_{\Delta l\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta l}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$$

■

【例-1】 数量场 $u(x,y,z)$ 表示处于原点 O 的点电荷 Q 的电位。求 $M_0(1,0,1)$，$\vec{l}=\hat{i}+2\hat{j}+2\hat{k}$ 方向导数。



$$u=u(x,y,z)=\frac{Q}{4\pi\varepsilon r}$$

$$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

按归一化电位函数 $\bar{u}$

$$\bar{u}=\bar{u}(x,y,z)=\frac{4\pi\varepsilon u}{Q}=\frac{1}{r}$$

$$|\vec{l}|=\sqrt{1+2^2+2^2}=3$$

$$\hat{l}=\frac{1}{3}\hat{i}+\frac{2}{3}\hat{j}+\frac{2}{3}\hat{k}$$

$\cos\alpha=\frac{1}{3}$，$\cos\beta=\frac{2}{3}$，$\cos\gamma=\frac{2}{3}$

$$\left\{\begin{aligned}\frac{\partial\bar{u}}{\partial x} &= -\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}\\ \frac{\partial\bar{u}}{\partial y} &= -\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} = 0\\ \frac{\partial\bar{u}}{\partial z} &= -\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}\end{aligned}\right.$$

$$\frac{\partial\bar{u}}{\partial l} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{3} + 0\cdot\frac{2}{3} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{2}{3}$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\frac{\partial\bar{u}}{\partial l} = -\frac{\sqrt{2}Q}{16\pi\varepsilon}.$$

Note 电位 u 在 $\hat{l}$ 方向减少

三 梯度 ∇u

利用点积来把重新写出方向导数

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\hat{k}\right)\cdot\left(\cos\alpha\,\hat{i} + \cos\beta\,\hat{j} + \cos\gamma\,\hat{k}\right)$$

$$= \left(\frac{\partial u}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\hat{k}\right)\cdot\hat{l}$$

特别重要的是上式把函数和方向分开了，可以

把方向导数分解成两部分乘积

方向导数 $\frac{\partial u}{\partial l}$	$\frac{\partial u}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\hat{k}$
	$\hat{l} = \cos\alpha\,\hat{i} + \cos\beta\,\hat{j} + \cos\gamma\,\hat{k}$

引入 Hamilton 算子

$$\nabla = \hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial z} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

梯度 $\nabla u = \frac{\partial u}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\hat{k}$

是一个矢量，它表示函数场 u 在 M_0 点的固有变化，与方向无关。

大小	梯度大小等于最大方向导数 $\lvert\nabla u\rvert = \max\left(\frac{\partial u}{\partial l}\right)$
方向	梯度矢量垂直于 M_0 的等值面，且指向 $u = u(x, y, z)$ 的增大方向。
方向导数	任何方向导数都是梯度 ∇u 在该方向投影 $\frac{\partial u}{\partial l} = (\nabla u)\cdot\hat{l}$

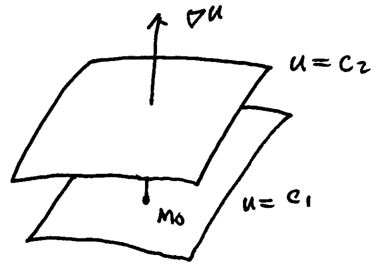
等值面 $\frac{\partial u}{\partial l} = (\nabla u)\cdot\hat{l} = 0$ $\quad \nabla u \perp \hat{l}$

【性质1】 $\lvert\nabla u\rvert = \max\left(\frac{\partial u}{\partial l}\right)$

令 $\frac{\partial u}{\partial l} = (\nabla u)\cdot\hat{l}$ 夹角为 θ

$\frac{\partial u}{\partial l} = \lvert\nabla u\rvert\cos\theta \qquad \cos\theta \le 1$

【性质2】 ∇u 方向是等值面垂直方向



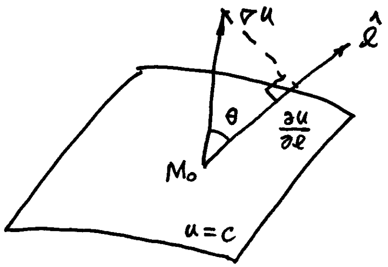
$(c_2 > c_1)$

已知 等值面上 $\frac{\partial u}{\partial l} = 0$，$\hat{l}_c$ 是切线方向

$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{\hat{l}_c} = \nabla u\cdot\hat{l}_c \equiv 0 \qquad \nabla u$ 垂直等值面.

【性质3】 方向导数 $\frac{\partial u}{\partial l}$ 表示梯度 ∇u 矢量在 $\hat{l}$ 上的投影

$$\frac{\partial u}{\partial l} = (\nabla u)\cdot\hat{l}$$



$$\nabla[f(u)] = \frac{\partial f}{\partial u}\nabla u$$

【例-2】 已知矢径 $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ 和常矢 $\vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}$，求 $\nabla(\vec{a}\cdot\vec{r})$

$$\vec{a}\cdot\vec{r} = a_x x + a_y y + a_z z$$

$$\nabla(\vec{a}\cdot\vec{r}) = \vec{a}$$

【例-3】 $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

证明 $\nabla r = \frac{\vec{r}}{r} = \hat{r}$

【证明】

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{x}{r}$$

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{y}{r}$$

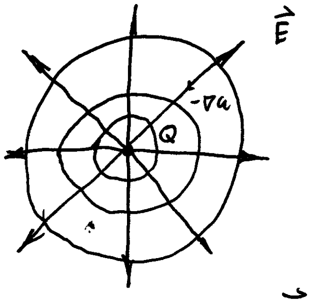
$$\frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{z}{r}$$

$$\nabla r = \frac{1}{r}(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}) = \frac{\vec{r}}{r} = \hat{r}$$ ■

【例-4】 证明点电荷 Q 的电场 $\vec{E}$ 和电位 u

构成负梯度关系，有 $\vec{E}=-\nabla u$

【证明】 已知 $u=\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon r}$



$$\nabla u=\frac{\partial u}{\partial r}\nabla r=-\frac{Q\vec{r}}{4\pi\varepsilon r^{3}}$$

我们又知 $\vec{E}=\dfrac{Q\vec{r}}{4\pi\varepsilon r^{3}}$ 可見

$\vec{E}=-\nabla u$ ∎

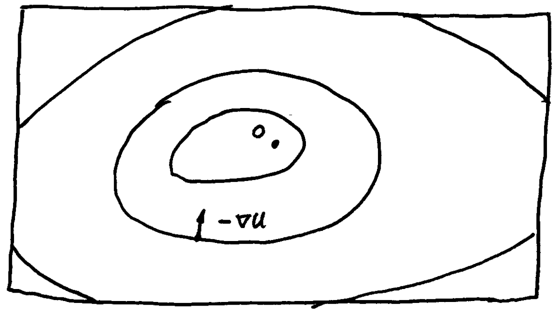
$\vec{E}$ 朝外，电位不断减少，即 $-\nabla u$.

四、最速下降法

一座山，不让看見而要爬上去——其中一个方法

即梯度方向（局部上升最快）——这就是瞎子爬山.

若我们研究最低点"山谷"——则为 $-\nabla u$



这里以二元函数为例作出讨论

以下为搜索方向可保证局部使 $f(x,y)$

下降最快，起始点

$$\vec{r}_0=x_0\hat{i}+y_0\hat{j}$$

$$\vec{r}_1=\vec{r}_0-k_0\nabla f(x_0,y_0)$$

第 $i+1$ 步为

$$\vec{r}_{i+1}=\vec{r}_i-k_i\nabla f(x_i,y_i)$$

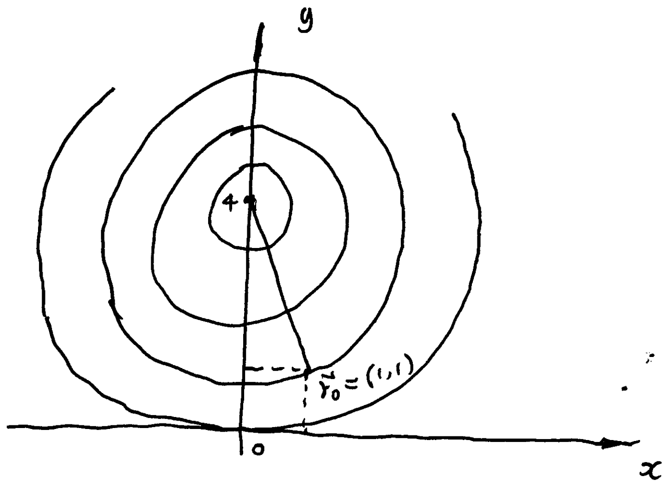
为使 k_i 最佳有

$$\frac{df(k_1')}{dk_1'} = 0$$

求出

【例-5】 $\min f(x,y) = x^2 + (y-4)^2$

作出优化，设起始点 $(x_0, y_0) = (1,1)$



$(0,4)$ 是最优点，也即 $\min f(0,4) = 0$

已知 $\vec{r_0} = \hat{i} + \hat{j}$

$$\nabla f(x_0, y_0) = 2x_0 \hat{i} + 2(y_0 - 4)\hat{j}$$

$$\vec{r_1} = x_1 \hat{i} + y_1 \hat{j} = \vec{r_0} - k_0 \nabla f(x_0, y_0)$$

$$= (1 - 2k_0)\hat{i} + (1 + 6k_0)\hat{j}$$

$$f(x_1, y_1) = 40k_0^2 - 40k_0 + 10$$

$$\frac{df(k_0)}{dk_0} = 80k_0 - 40 = 0$$

$$k_0 = \frac{1}{2}$$

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 = 0 \\ y_1 = 4 \end{array}\right. \rightarrow \min$$

圆 一步到位。

容易写出

$$\begin{cases} \hat{e}_\rho = \cos\varphi\,\hat{i} + \sin\varphi\,\hat{j} \\ \hat{e}_\varphi = -\sin\varphi\,\hat{i} + \cos\varphi\,\hat{j} \end{cases}$$

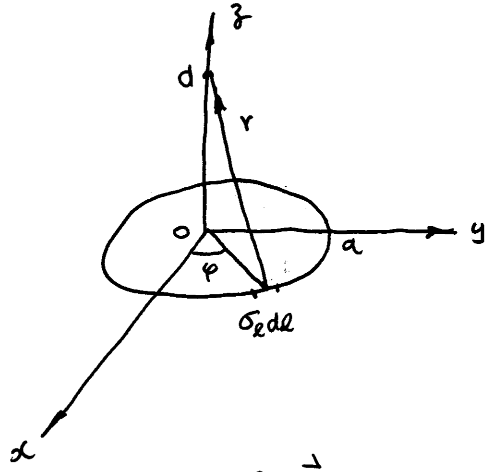
也即

$$\begin{bmatrix} \hat{e}_\rho \\ \hat{e}_\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{i} \\ \hat{j} \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} \hat{i} \\ \hat{j} \end{bmatrix}$$

恰好为转动矩阵. 单位矢的微分关系

$$\boxed{\begin{gathered} \frac{\partial \hat{e}_\rho}{\partial \rho} = 0, \quad \frac{\partial \hat{e}_\rho}{\partial \varphi} = -\sin\varphi\,\hat{i} + \cos\varphi\,\hat{j} = \hat{e}_\varphi \\ \frac{\partial \hat{e}_\varphi}{\partial \rho} = 0, \quad \frac{\partial \hat{e}_\varphi}{\partial \varphi} = -(\cos\varphi\,\hat{i} + \sin\varphi\,\hat{j}) = -\hat{e}_\rho \\ \frac{\partial^2 \hat{e}_\rho}{\partial \varphi^2} = -\hat{e}_\rho, \quad \frac{\partial^2 \hat{e}_\varphi}{\partial \varphi^2} = -\hat{e}_\varphi \end{gathered}}$$

【例-6】 静电场. 有一半径为 a 的圆环, 线电荷密度为 σ_l, 求在 z 轴 d 处的电场 $\vec{E}$



$$d\vec{E} = \frac{\sigma_l \vec{r}}{4\pi\varepsilon r^3}\,dl$$

其中 $\quad r = \sqrt{a^2 + d^2}$

$$\vec{r} = -a\,\hat{e}_\rho + d\,\hat{e}_z$$

$$\varphi \in [0, 2\pi]$$

$$dl = a\,d\varphi$$

于是

$$\vec{E}_1 = -\frac{\sigma_e a^2}{4\pi\epsilon (a^2+d^2)^{3/2}}\int_0^{2\pi}\hat{e}_\rho\, d\varphi$$

$\hat{e}_\rho$ 要受 $d\varphi$ 影响

$$\vec{E}_2 = \frac{\sigma_e a d}{4\pi\epsilon (a^2+d^2)^{3/2}}\int_0^{2\pi} d\varphi\,\hat{e}_z$$

$\hat{e}_z$ 不受 $d\varphi$ 影响

也即

$$\int_0^{2\pi}\hat{e}_\rho\, d\varphi = \int_0^{2\pi}(\cos\varphi\,\hat{i} + \sin\varphi\,\hat{j})\, d\varphi = \vec{0}$$

$$\vec{E} = \vec{E}_2 = \frac{a d \sigma_e}{2\epsilon (a^2+d^2)^{3/2}}\hat{e}_z$$

四. Hamilton 算子

空间算子

$$\nabla = \hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

$\longleftrightarrow$

时间算子

$$\frac{d}{dt}$$

一切朝算子理论进军!

9 月 6 日

活的教学

我已经听很多人提出的同一个问题——既然已经有书，有讲稿，为什么还要讲课呢？

一句话，教学是活的。我所追求的就是一种活的教学。

首先，我们面对的是人，每次对象都会有所不同。人是活的，教学不仅是内容的交流，而且是人的互动。教师的内在精神在默默无声中流淌到了学生的心中。这是书，教材和讲稿所完全不能替代的。

其次，在教学过程中，学生不断地向教师提出挑战。他们从各个角度问许多活的问题，完全不受条条框框的约束。所以，教师不单单在讲课，也是向学生学习的一个过程，这是不在其中体味不到的一种快乐。

最后，活的教学给教师提出一个十分明确的目标——教学要发展，要创新，绝不能把它看成万古不变的教条。让我们坚持讲活，学活——活的教学。