3

场

先复习一下上讲的主要内容

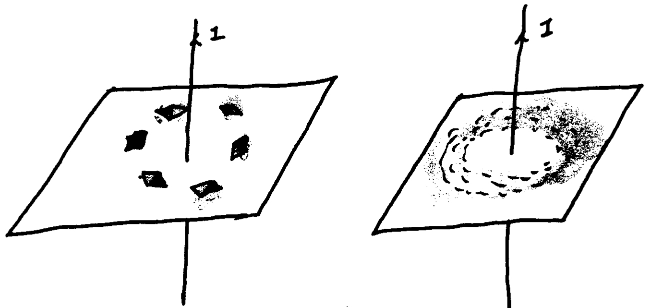
非零矢量 $\vec{A}$ 与 $\vec{B}$ 的几何关系	$\vec{A}\perp\vec{B}$，$\vec{A}\cdot\vec{B}=0$，$A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z=0$ $\vec{A}\parallel\vec{B}$，$\vec{A}\times\vec{B}=\vec{0}$，$\frac{A_x}{B_x}=\frac{A_y}{B_y}=\frac{A_z}{B_z}$
单位矢与其导数垂直	单位矢 $\hat{\tau}$，则 $\frac{d\hat{\tau}}{dt}\perp\hat{\tau}$，$\frac{d\hat{\tau}}{dt}\sim-\hat{n}$
矢量函数微积分关系	$\frac{d\vec{A}}{dt}=\frac{dA_x}{dt}\hat{i}+\frac{dA_y}{dt}\hat{j}+\frac{dA_z}{dt}\hat{k}$ $\int\vec{A}\,dt=\hat{i}\int A_x dt+\hat{j}\int A_y dt+\hat{k}\int A_z dt$ Note：一般要计及单位矢微积分。

如果说矢量分析研究矢量的时间变化，那么场是它的空间变化。

数量函数或矢量函数的空间分布构成场（field）

场是客观存在。杨振宁先生在总结20世纪物理学时，明确指出："场和对称性"是两个极为重要的革命性概念。

奥斯特是发现电可以产生磁的第一人，但他没有发



Oersted 实验 （磁针）　　Faraday 实验（磁粉）

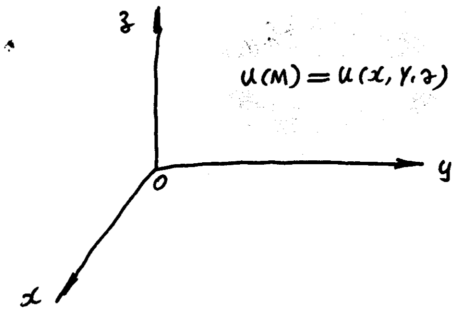
现场。而Faraday与他不同，利用磁粉发现布满空间的场，见到了直观的磁力线。

最一般情况下，场是随时间 t 变化．这里讨论的是稳定场，即不出现 t.

一、数量场

在Space中，数量函数 u 随点 M 变化，即

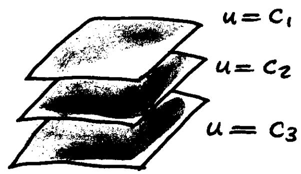
$$u=u(M)$$



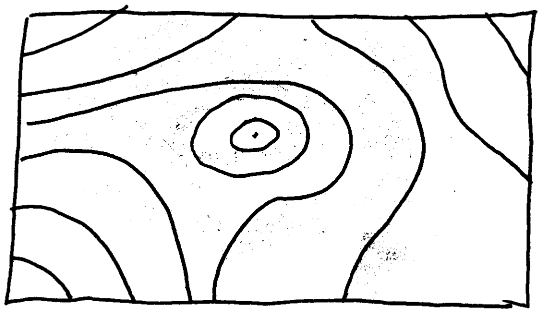
则 u —— 空间的数量场．一旦坐标选定，有

$$u=u(x,y,z)$$

数量场中，等值面的概念非常重要．

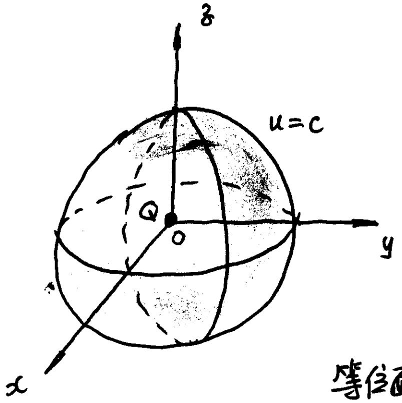
等值面 $u(x,y,z)=c$	
(1)	空间每一点 $M_0\ (x_0,y_0,z_0)$ 均属于一个等值面，即 $u(x,y,z)=u(x_0,y_0,z_0)$
(2)	不同等值面互不相交，即每一点只属一个等值面． 

【例-1】 山脉等高线 $H=H(x,y,z)$



【例-2】 三维静电场对应的等位面.

研究原点o处有一静电荷Q



$u = u(x,y,z) = \frac{Q}{4\pi\epsilon R}$

其中 $R = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

令 $u = c_0$ 有

等位面方程

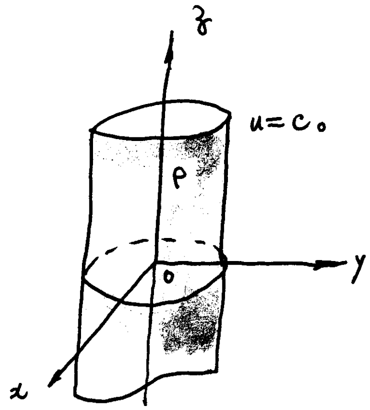
$x^2+y^2+z^2 = c$ 即球面

【例-3】 二维静电场对应的等位面.

研究 $x=0$, $y=0$ 处有一密度为 ρ 的无穷长

线电荷. 这时另为电位

$$u = \frac{\rho}{2\pi\epsilon}\ln\left(\frac{1}{r}\right) + c'$$



其中 $r = \sqrt{x^2+y^2}$

令 $u = c_0$ 有

等位面方程

$x^2+y^2 = c$ 即圆柱面

Note: 由于二维场和三维场是成规律不同,

三维场 $r \to \infty$, $u=0$. 是电位0点.

二维场则不同 只可选 $r = r_0$, $u=0$

即 $u = \frac{\rho}{2\pi\epsilon}\ln\left(\frac{r_0}{r}\right)$.

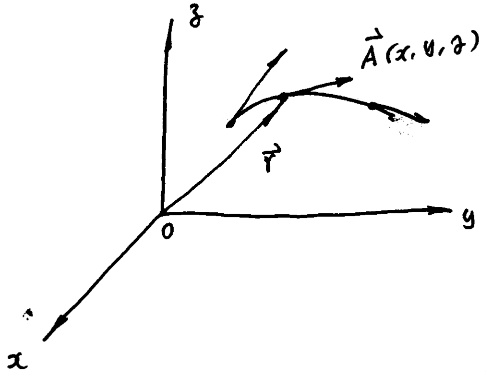
二. 矢量场

Space中, 任何一点均对应一矢量函数

$\vec{A} = \vec{A}(M)$

则称 $\vec A$ 是空间的矢量场，一旦坐标选定，进一步有

$$\vec A = \vec A(x,y,z)$$



矢量场中，矢线是最重要的概念.

矢线有方向，有大小.

空间每一点有一根矢线，每一点只有一根矢线

(除源奇异点外).

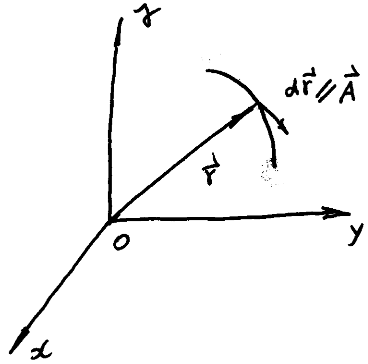
矢线有起点（源），有终点（∞处可算作一终点）

$\vec r$ 是空间任一点的矢径

$$\vec r = x\hat i + y\hat j + z\hat k$$ （Note：$\vec r$ 并非 $\vec A$ 方向）

但是，$d\vec r$ 处于 $\vec e$ 的切线方向，即

$$d\vec r = dx\,\hat i + dy\,\hat j + dz\,\hat k \;/\!/\; \vec A$$



这样，我们很易写出

矢线的微分方程

$$\boxed{\frac{dx}{A_x} = \frac{dy}{A_y} = \frac{dz}{A_z}}$$

【例-4】 点电荷 Q 的矢线（电力线）分布

$$\vec E = \frac{Q\vec r}{4\pi\varepsilon r^3} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r^3}(x\hat i + y\hat j + z\hat k)$$

其中，$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

于是电力线微分方程为

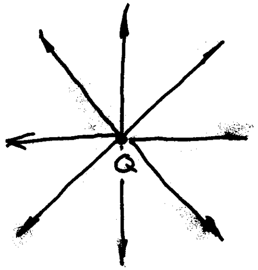
$$\frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y} = \frac{dz}{E_z}$$

具体写为

$$\frac{dx}{\frac{Qx}{4\pi\varepsilon r^3}} = \frac{dy}{\frac{Qy}{4\pi\varepsilon r^3}} = \frac{dz}{\frac{Qz}{4\pi\varepsilon r^3}}$$

等价于 $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}$

可解为 $\begin{cases} y = C_1 x \\ z = C_2 x \end{cases}$



点电荷力线分布

【例-5】 已知一二维场 $\vec{A}$ 为

$$\vec{A} = (x^2-y^2)\hat{i} + 2xy\hat{j}$$

求它对应的力线方程.

由定义很容易写出

$$\frac{dx}{x^2-y^2} = \frac{dy}{2xy}$$

取 $\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases}$ 转换成极坐标

$$\begin{cases} dx = \cos\varphi\, d\rho - \rho\sin\varphi\, d\varphi \\ dy = \sin\varphi\, d\rho + \rho\cos\varphi\, d\varphi \\ x^2 - y^2 = \rho^2\cos 2\varphi \\ 2xy = \rho^2\sin 2\varphi \end{cases}$$

$$\frac{\cos\varphi\, d\rho - \rho\sin\varphi\, d\varphi}{\cos 2\varphi} = \frac{\sin\varphi\, d\rho + \rho\cos\varphi\, d\varphi}{\sin 2\varphi}$$

$$(\sin 2\varphi\cos\varphi - \cos 2\varphi\sin\varphi)\, d\rho =$$

$$(\cos 2\varphi\cos\varphi + \sin 2\varphi\sin\varphi)\, d\varphi$$

也即 $\sin\varphi\, d\rho = \rho\cos\varphi\, d\varphi$

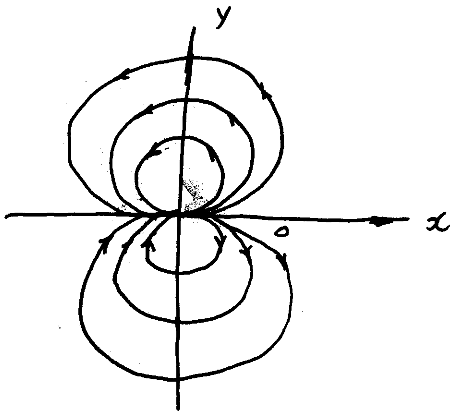
它等价于 $\frac{d\rho}{\rho} = \frac{d\sin\varphi}{\sin\varphi}$

于是有 $\rho = c\sin\varphi$

或者 $\rho^2 = x^2 + y^2 = cy$

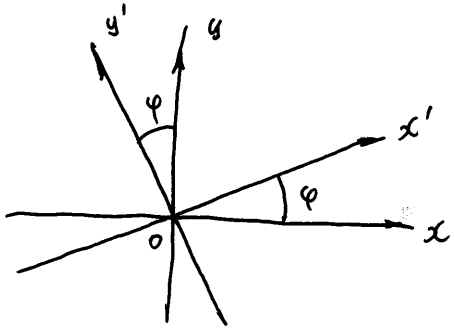
最后得到

$$\boxed{x^2 + \left(y - \frac{c}{2}\right)^2 = \left(\frac{c}{2}\right)^2}$$



三. 坐标转换和坐标单位矢

1. 坐标转动



坐标转动 φ 角

$$\begin{cases} x' = \cos\varphi\, x + y\sin\varphi \\ y' = -\sin\varphi\, x + \cos\varphi\, y \end{cases}$$

写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$= T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

我们以二维为例

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = A^T B = B^T A$$

旋转之后

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} A_x' \\ A_y' \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \end{bmatrix} \\ \\ \begin{bmatrix} B_x' \\ B_y' \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} B_x \\ B_y \end{bmatrix} \end{array} \right.$$

于是有

$$A'^T B' = A^T T^T T B = A^T B$$

其中 $T^T T = I$ 单位矩阵

点积是坐标转动的不变量

特别当 $B = A$ 则

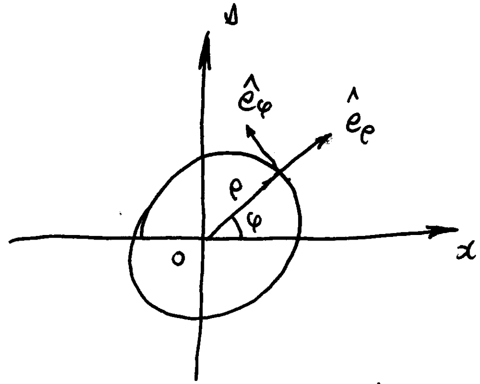
长度是坐标转动的不变量（Euclid世界）

2. 单位矢

单位矢有不变单位矢（直角坐标系）和变单位矢（柱或球坐标系）。不变单位矢不参与微积分，而变单位矢则需要参与微积分。

变单位矢 → 转换为不变单位矢 → 参与微积分

我们以圆柱坐标为例加以说明



圆柱单位矢 $\hat{e}_\rho$ 和 $\hat{e}_\varphi$

容易写出

$$\begin{cases}\hat{e}_\rho = \cos\varphi\,\hat{i} + \sin\varphi\,\hat{j} \\ \hat{e}_\varphi = -\sin\varphi\,\hat{i} + \cos\varphi\,\hat{j}\end{cases}$$

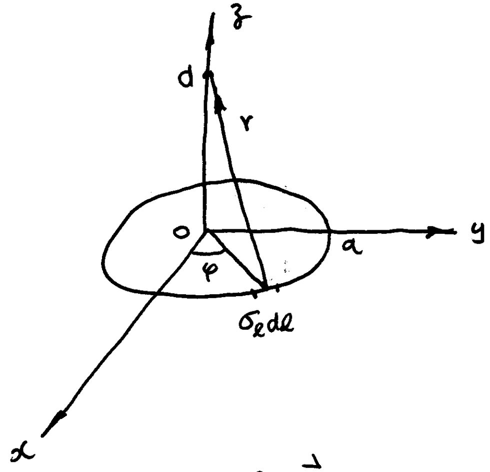
也即

$$\begin{bmatrix}\hat{e}_\rho \\ \hat{e}_\varphi\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{i} \\ \hat{j}\end{bmatrix} = T\begin{bmatrix}\hat{i} \\ \hat{j}\end{bmatrix}$$

恰好为转动矩阵．单位矢的微分关系是

$$\boxed{\begin{aligned}&\frac{\partial \hat{e}_\rho}{\partial \rho} = 0, \quad \frac{\partial \hat{e}_\rho}{\partial \varphi} = -\sin\varphi\,\hat{i} + \cos\varphi\,\hat{j} = \hat{e}_\varphi \\ &\frac{\partial \hat{e}_\varphi}{\partial \rho} = 0, \quad \frac{\partial \hat{e}_\varphi}{\partial \varphi} = -(\cos\varphi\,\hat{i} + \sin\varphi\,\hat{j}) = -\hat{e}_\rho \\ &\frac{\partial^2 \hat{e}_\rho}{\partial \varphi^2} = -\hat{e}_\rho, \quad \frac{\partial^2 \hat{e}_\varphi}{\partial \varphi^2} = -\hat{e}_\varphi\end{aligned}}$$

【例-6】 静电场．有一半径为 a 的圆环，线电荷密度为 σ_l，求在 z 轴 d 处的电场 $\vec{E}$



$$d\vec{E} = \frac{\sigma_l\,\vec{r}}{4\pi\varepsilon r^3}\,dl$$

其中

$$r = \sqrt{a^2 + d^2}$$

$$\vec{r} = -a\,\hat{e}_\rho + d\,\hat{e}_z$$

$$\varphi \in [0, 2\pi]$$

$$dl = a\,d\varphi$$

于是

$$\vec{E}_1 = -\frac{\sigma_e a^2}{4\pi\epsilon(a^2+d^2)^{3/2}}\int_0^{2\pi}\hat{e}_\rho\, d\varphi$$

$\hat{e}_\rho$ 要参与 $d\varphi$ 积分

$$\vec{E}_2 = \frac{\sigma_e a d}{4\pi\epsilon(a^2+d^2)^{3/2}}\int_0^{2\pi} d\varphi\,\hat{e}_z$$

$\hat{e}_z$ 不参与 $d\varphi$ 积分

也即 $\int_0^{2\pi}\hat{e}_\rho\, d\varphi = \int_0^{2\pi}(\cos\varphi\,\hat{i} + \sin\varphi\,\hat{j})\,d\varphi = \vec{0}$

$$\vec{E} = \vec{E}_2 = \frac{a d \sigma_e}{2\epsilon(a^2+d^2)^{3/2}}\hat{e}_z$$

四. Hamilton 算子

空间算子		时间算子
$\nabla = \hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}$	$\leftrightarrow$	$\frac{d}{dt}$

一切朝算子理论进军！

9 月 1 日

教学“三层楼”

教学，广义地说，任何学习过程都可以用“三层楼”加以概括：

是什么？
为什么？
还有什么？

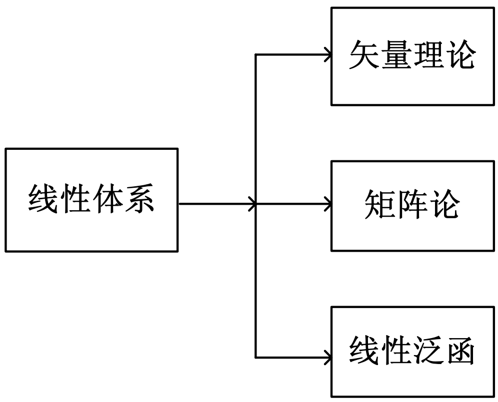
是什么表示**继承**；为什么反映**钻研**；还有什么要跨越到**联想和创新**。

举一个最简单的例子。学习矢量首先遇到的是建立公理化和体系。

这里的是什么就是认真接受前人的成果：定义、相等和 0 矢量；体系中的可加性和可数乘性。

为什么开始独立思考，深入钻研：前人为什么要建立这种体系？这一过程是艰苦的，由浅入深，透过表面看本质，经过反复研究才体会到：这是建立一个**线性体系**，它满足可加性和可数乘性。

有了为什么的“飞跃”，我们可以慢慢地爬上“三层楼”——还有什么？打开思想的翅膀，广泛地做出联想：任何其它的线性体系都可以与矢量存在某种共性和联系。



思路一打开，应用自然源源而不断。真可谓：

白日依山尽，黄河入海流。
欲穷千里目，更上一层楼。