1

矢　量

—— 本课程强调三抓：抓概念，抓思想，抓应用.

—— 在最基本的概念里面，往往蕴育着最深刻的思想.

一. 什么是矢量？

矢量是有序独立的n个数.

$$\vec{A} = (a_1, a_2, \cdots a_n) \qquad (1)$$

因此它包含n个信息. 换句话说：凡是体现n个信息的，都可以应用矢量理论.

特别对于3维Space，则进一步有

$$\vec{r}_1 = \vec{OP} = (P_1, P_2, P_3) \qquad (2)$$

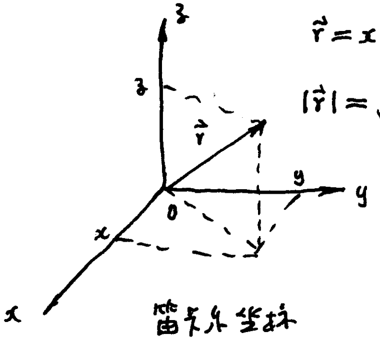
矢量的公理与体系

公　　理	体　　系
公理1　矢量相等 $\vec{r}_2 = (Q_1, Q_2, Q_3)$ 若 $P_1 = Q_1$，$P_2 = Q_2$，$P_3 = Q_3$ 则 $\vec{r}_1 = \vec{r}_2$	(1) 可加性 $\vec{r}_1 \pm \vec{r}_2 = (P_1 \pm Q_1, P_2 \pm Q_2, P_3 \pm Q_3)$ (2) 可数乘性　k是一个数 $k\vec{r}_1 = (kP_1, kP_2, kP_3)$
公理2　0矢量 $\vec{0} = (0, 0, 0)$	

例：物理上力即3维矢量.

矢量理论走出的关键第1步是——矢量几何化

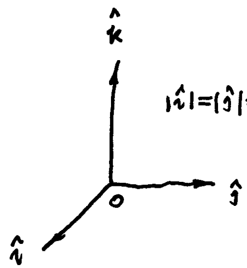
引入笛卡尔坐标和单位矢.



$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

$$|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

笛卡尔坐标



$$|\hat{i}| = |\hat{j}| = |\hat{k}| = 1$$

一切归于单位矢

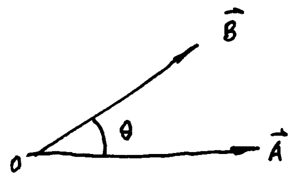
二. 矢量之间的相互作用

正是矢量间的相互作用，使它和物理，工程紧密相连.

1. 矢量点积

点积 $\vec{A}\cdot\vec{B}$ 是矢量之间一种数量型相互作用.

定义 $\vec{A}\cdot\vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}|\cos\theta \quad (0\leq\theta\leq\pi)$ (3)



点积是对称运算，即 $\vec{A}\cdot\vec{B} = \vec{B}\cdot\vec{A}$ (4)

思想：把一切归于单位矢，只需研究单位矢间点积

只研究单位矢点积 →

	$\hat{i}$	$\hat{j}$	$\hat{k}$
$\hat{i}$	1	0	0
$\hat{j}$	0	1	0
$\hat{k}$	0	0	1

— 即可推广到任意情况

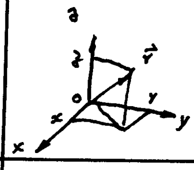
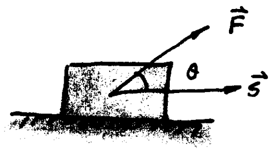
$$\begin{cases} \vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k} \\ \vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k} \end{cases} \quad (5)$$

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z \quad (6)$$

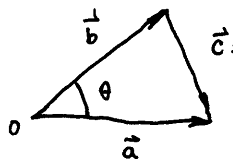
夹角余弦

$$\cos\theta = \frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{|\vec{A}||\vec{B}|} = \frac{A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z}{\sqrt{A_x^2+A_y^2+A_z^2}\sqrt{B_x^2+B_y^2+B_z^2}} \quad (7)$$

点积的应用背景

几何背景		$\vec{r}$ 的各分量是向坐标单位矢投影 $x = \vec{r}\cdot\hat{i}$ $y = \vec{r}\cdot\hat{j}$ $z = \vec{r}\cdot\hat{k}$
物理背景		力 $\vec{F}$ 在 $\vec{s}$ 方向做功 $W = \int \vec{F}\cdot d\vec{s}$

【例－1】 证明三角形余弦定理



$\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$

$\vec{c}\cdot\vec{c} = (\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$

当 $\theta = 90^\circ$ $\quad c^2 = a^2 + b^2$ 勾股定理

2. 矢量叉积

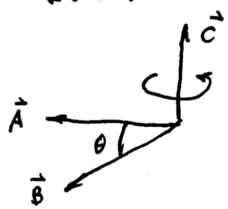
两矢量叉积是一种矢量型相互作用.

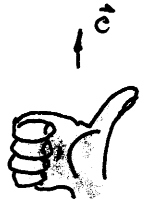
定义　　$\vec{C}=\vec{A}\times\vec{B}$　　(8)

大小　　$|\vec{C}|=|\vec{A}||\vec{B}|\sin\theta$　　(9)

$(0\leq\theta\leq\pi)$

方向





右手螺旋法则

叉积是反对称运算　　$\vec{A}\times\vec{B}=-(\vec{B}\times\vec{A})$　　(10)

只确定单位矢叉积 →

	$\hat{i}$	$\hat{j}$	$\hat{k}$
$\hat{i}$	0	$\hat{k}$	$-\hat{j}$
$\hat{j}$	$-\hat{k}$	0	$\hat{i}$
$\hat{k}$	$\hat{j}$	$-\hat{i}$	0

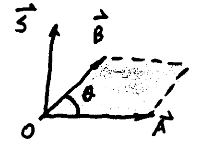
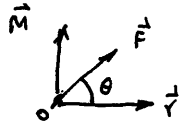
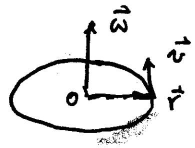
→ 即可推广到任意情况

总结为行列式法则

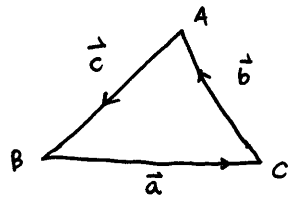
$$\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix}=(A_yB_z-A_zB_y)\hat{i}+(A_zB_x-A_xB_z)\hat{j}$$

$$+(A_xB_y-A_yB_x)\hat{k} \qquad (11)$$

叉积的应用背景

几何背景		$\vec{S}=\vec{A}\times\vec{B}$ 有向平行四边形面积
物理背景(1)		$\vec{M}=\vec{r}\times\vec{F}$ 力矩
物理背景(2)		$\vec{v}=\vec{\omega}\times\vec{r}$ 旋转速度

【例-2】　推证三角形正弦定理



$|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin C$

$|\vec{b}\times\vec{c}|=|\vec{b}||\vec{c}|\sin A$

$|\vec{c}\times\vec{a}|=|\vec{c}||\vec{a}|\sin B$

$$2\triangle\text{面积} = |\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{b}\times\vec{c}| = |\vec{c}\times\vec{a}|$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \qquad (12)$$

三. 矢量除法

讨论至此，有两个重要问题尚未涉及：

(1). 为什么矢量定义出两种乘法：点乘和叉乘？

(2). 为什么矢量没有除法？按一般逻辑，有乘法必定有除法.

乘法	$uv = w$
除法	已知 u 和 w 求 v
	$v = \dfrac{w}{u} \quad (u \neq 0)$

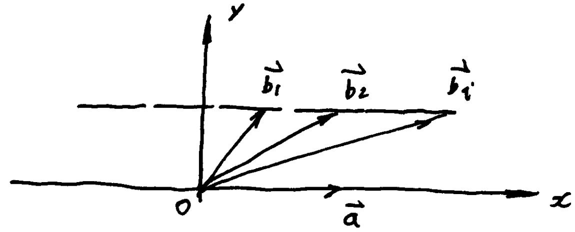
1. 单用叉乘无法唯一地定义矢量除法.

已知 $\vec{a}\times\vec{b} = \vec{d}$

由 $\vec{a}$ 和 $\vec{d}$ 求 $\vec{b}$

$$\begin{bmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_x \\ d_y \\ d_z \end{bmatrix} \qquad (13)$$

系数行列式为零，无法求出 $\vec{b}$



$\vec{b}_i$ 不同，但 $\vec{a}\times\vec{b}$ 相同.

2. 矢量除法

已知 $\vec{a}$，$\vec{a}\times\vec{b}$，$\vec{a}\cdot\vec{b}$ 求 $\vec{b}$

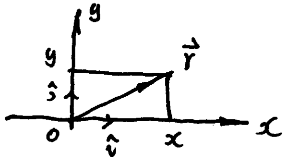
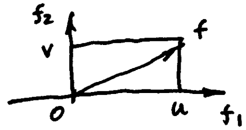
设 $\quad \vec{a}\cdot\vec{b} = c$，$\quad \vec{a}\times\vec{b} = \vec{d} \qquad (14)$

$$\vec{a}\times(\vec{a}\times\vec{b}) = \vec{a}(\vec{a}\cdot\vec{b}) - \vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{a}) \qquad (15)$$

于是有

$$\vec{b} = \frac{\vec{a}(\vec{a}\cdot\vec{b}) - \vec{a}\times(\vec{a}\times\vec{b})}{(\vec{a}\cdot\vec{a})} = \frac{\vec{a}c - \vec{a}\times\vec{d}}{(\vec{a}\cdot\vec{a})} \qquad (16)$$

四 泛函的广义矢量理论

二维矢量空间	二维泛函空间
单位矢 $\hat{i}, \hat{j}$ 正交性 $\hat{i}\cdot\hat{j}=0$ 归一性 $\hat{i}\cdot\hat{i}=1$ $\hat{j}\cdot\hat{j}=1$	函数基 $f_1(x), f_2(x)$ 正交性 $\langle f_1, f_2\rangle=\int_a^b f_1 f_2\,dx=0$ 归一性 $\langle f_1, f_1\rangle=\int_a^b f_1^2\,dx=1$ $\langle f_2, f_2\rangle=\int_a^b f_2^2\,dx=1$
二维矢量逼近	二维函数逼近
$\vec{r}=x\hat{i}+y\hat{j}$ $\begin{cases} x=\vec{r}\cdot\hat{i} \\ y=\vec{r}\cdot\hat{j} \end{cases}$ 	$f(x)=uf_1+vf_2$ $x\in[a,b]$ $u=\int_a^b ff_1\,dx=\langle f, f_1\rangle$ $v=\int_a^b ff_2\,dx=\langle f, f_2\rangle$ 

【例-3】 精确函数 $f_0=\dfrac{1}{2-x}$ $\quad x\in[0,1]$ (17)

采用近似函数逼近 $f(x)=a+bx$ (18)

求 a 和 b. 从矢量角度, $f_0(x)$属于无穷维, 而$f(x)$则是二维. 所以问题的提法是：用2维函数逼近无穷维的 $\dfrac{1}{2-x}$.

> 设基函数—即单位矢
> $f_1(x)=1$
> $f_2(x)=p+qx$

(19)

$f_1(x)$满足归一化条件. $f_2(x)$有

归一条件 $\int_0^1 (p+qx)^2\,dx=1$ (20)

正交条件 $\int_0^1 (p+qx)\,dx=0$ (21)

—则有

$$\int_0^1 (p+qx)\,dx = \left(px+\frac{1}{2}qx^2\right)\Big|_0^1 = p+\frac{1}{2}q = 0 \qquad (22)$$

$$\int_0^1 (p+qx)^2\,dx = \int_0^1 \left(p^2+2pqx+q^2x^2\right)dx$$

$$= \left(p^2x+pqx^2+\frac{1}{3}q^2x^3\right)\Big|_0^1 = p^2+pq+\frac{1}{3}q^2 = 1 \qquad (23)$$

据(22)得到 $\qquad q = -2p \qquad (24)$

代入(23)式，有 $\qquad p^2-2p^2+\frac{4}{3}p^2 = 1 \qquad (25)$

$$p^2 = 3\,, \qquad p = \pm\sqrt{3} \qquad (26)$$

$$q = \mp 2\sqrt{3} \qquad (27)$$

于是给出

$$\boxed{\begin{aligned} f_1(x) &= 1 \\ f_2(x) &= \sqrt{3}\,(2x-1) \end{aligned}} \qquad (28)$$

$$f(x) \Rightarrow \frac{1}{2-x} = A_1 f_1(x) + A_2 f_2(x) \qquad (29)$$

$$A_1 = \int_0^1 f f_1\,dx = \int_0^1 \frac{1}{2-x}\,dx =$$

$$-\ln(2-x)\Big|_0^1 = \ln 2 \qquad (30)$$

$$A_2 = \int_0^1 f f_2\,dx = \int_0^1 \frac{\sqrt{3}(2x-1)}{2-x}\,dx$$

$$= \sqrt{3}\int_0^1 \left[-2\left(\frac{2-x}{2-x}\right) + \frac{3}{2-x}\right]dx$$

$$= \sqrt{3}\,(3\ln 2 - 2) \qquad (31)$$

最后得到

$$\boxed{\begin{aligned} f(x) &= A_1 f_1(x) + A_2 f_2(x) \\ &= (6-8\ln 2) + (18\ln 2 - 12)x \\ &= 0.4548225 + 0.4766492x \end{aligned}} \qquad (32)$$

必须要指出：把函数量推广为广义单位矢的函数逼近思想显得十分普遍，而且它与泛函误差的最小二乘法 完全等价.

现设 $\mathcal{E}$ 为误差泛函，且逼近函数

$$f(x) = a + bx \qquad (33)$$

写出

$$\min \mathcal{E} = \int_0^1 [f_0(x) - f(x)]^2 dx$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{1}{2-x} - a - bx\right]^2 dx \qquad (34)$$

求偏导

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{E}}{\partial a} = \displaystyle\int_0^1 -2\left[\frac{1}{2-x} - a - bx\right] dx = 0 & (35) \\ \dfrac{\partial \mathcal{E}}{\partial b} = \displaystyle\int_0^1 -2\left(\frac{1}{2-x} - a - bx\right] x\, dx = 0 & (36) \end{cases}$$

于是得出

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^1 (a+bx)\,dx = \int_0^1 \frac{1}{2-x}\,dx \\ \displaystyle\int_0^1 (a+bx)\,x\,dx = \int_0^1 \frac{x}{2-x}\,dx \end{cases} \qquad (37)$$

也即

$$\begin{cases} a = 6 - 8\ln 2 \\ b = 18\ln 2 - 12 \end{cases} \qquad (38)$$

具体有

$$\begin{cases} a = 0.4548225 \\ b = 0.4166492 \end{cases} \qquad (39)$$

$$f(x) = (6 - 8\ln 2) + (18\ln 2 - 12)x \qquad (40)$$

与 (32)式完全相同.

矢量概念 → 点积 $\vec{A}\cdot\vec{B}$ 叉积 $\vec{A}\times\vec{B}$ → 几何、物理、工程方面应用

↓

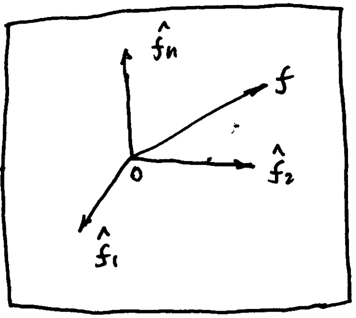
提取
- 多元仿密思想
- 单位矢正交思想
- 投影与分量思想

↓

泛函与函数逼近

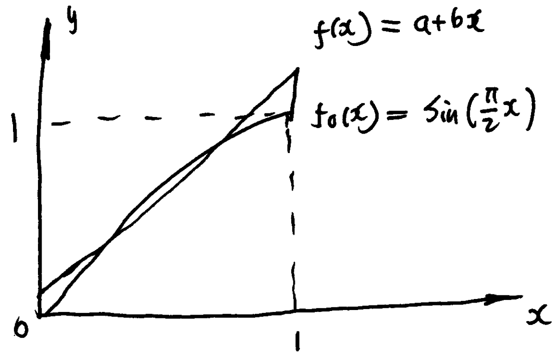
应用

→



问题 1 $f_0(x)=\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) \quad x\in[0,1]$

今用 $f(x)=a+bx$ 逼近. 见图



由于研究区域 $[0,1]$, 取值 $0\leq f_0(x)\leq 1$ 与前面相同, 即基函数——单位矢完全相同.

$$\begin{cases} f_1(x)=1 \\ f_2(x)=p+qx \end{cases}$$

归一条件 $\int_0^1 (p+qx)^2\,dx=1$

正交条件 $\int_0^1 (p+qx)\,dx=0$

可得
$$\begin{cases} f_1(x)=1 \\ f_2(x)=\sqrt{3}\,(2x-1) \end{cases}$$

几何意义：在同一坐标系单位矢上画的两个不同函数. 令

$$f(x)=A_1f_1+A_2f_2$$

$$A_1=\int_0^1 ff_1\,dx=\int_0^1 \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)dx$$

$$=-\frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\Big|_0^1=\frac{2}{\pi}$$

$$A_2 = \int_0^1 ff_2\,dx = \sqrt{3}\int_0^1 (2x-1)\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)dx$$

分别为两部分

- $$-\sqrt{3}\int_0^1 \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)dx = -\sqrt{3}\left(\frac{2}{\pi}\right)$$

- $$2\sqrt{3}\int_0^1 x\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)dx =$$

$$-\frac{4\sqrt{3}}{\pi}\int_0^1 x\,d\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right] =$$

$$-\frac{4\sqrt{3}}{\pi}x\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\Big|_0^1 + \frac{4\sqrt{3}}{\pi}\int_0^1 \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)dx$$

$$= \frac{8\sqrt{3}}{\pi^2}\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\Big|_0^1 = \frac{8\sqrt{3}}{\pi^2}$$

也即 $$A_2 = \frac{2\sqrt{3}}{\pi}\left(\frac{4}{\pi}-1\right)$$

写出 $f(x)$

$$f(x) = \frac{12}{\pi}\left(\frac{4}{\pi}-1\right)x + \frac{8}{\pi}\left(1-\frac{3}{\pi}\right)$$

$$= 1.043698178x + 0.114770684$$

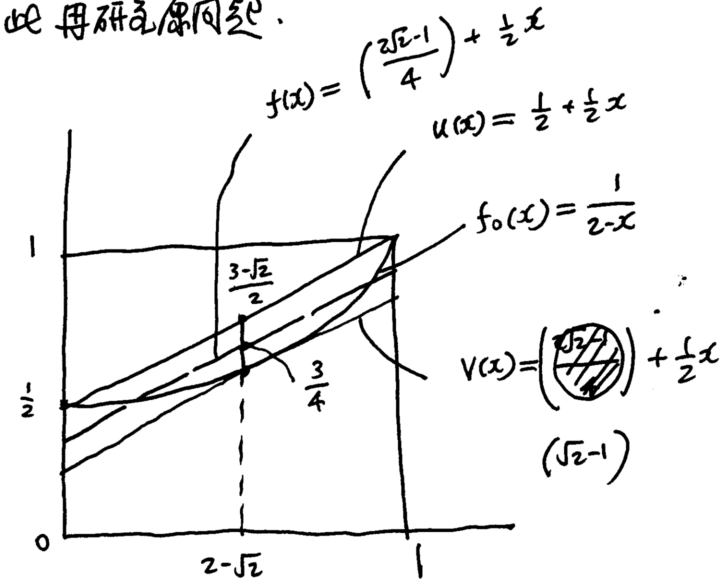
error	$f(x) - f_0(x)$
$x=0$	$+0.114770684$
$x=0.5$	-0.070487008
$x=1$	$+0.158468862$

问题 2

最佳逼近 — chebyshev逼近

Remez思想：正负偏差交替出现，大小相等.

以此再研究原问题.



连接 $(0, \frac{1}{2})$ 和 $(1, 1)$ 两点直线

$$u(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x.$$

直线斜率为 $\frac{1}{2}$.

找 $f_0(x)$ 切线斜率为 $\frac{1}{2}$ 点.

$$x_0 = 2-\sqrt{2} \text{ 点}$$

找到最佳 $f(x)$

$$f(x) = \left(\frac{2\sqrt{2}-1}{4}\right) + \frac{1}{2}x$$

其偏差满足 Remez原则

error	$f(x) - f_0(x)$
$x=0$	-0.04289319
$x=2-\sqrt{2}$	$+0.04289319$
$x=1$	-0.04289319 .

8 月 25 日

向学生交出一颗心

今天，是这一学期《矢量场论和复变函数》的第一堂课。不知道为什么，已经教了 30 多年的学心情却还是那么激动，连我自己都感到奇怪，总觉得有无数的话想跟年轻人说。

实际上，概括起来就是一句话，想叫学生们理解我——在“用**心**教学”。

细细分起来大致有三个层次：

1. 通过教学，使学生逐步树立事业心。任何人，没有事业心是被动的。只有用强大的事业心驱动才会使浑身上下有使不完的劲。

中央电视台评论员说：“如果中国的公司、企业和高层专家眼睛只盯住钱，那么永远也产生不了中国的“苹果”，也产生不了中国的乔布斯。”

一句话，就是要让学生通过教学实践真正体会到教师的事业心。

2. 做任何事，最重要的是责任心。

教学的各个环节都在体现责任心。无论对于内容，对学生，对作业，对考试均为如此。要以高度的责任感把教师懂转化为学生懂。

毛泽东同志说：对同志对人民极端地热忱，对工作极端地负责任，这正是责任心的最好体现。

进一步，自己还要超脱课程，立足培养人才，蕴育创新思想，树立百年大计。

3. 克服困难的最好办法是保持一颗平常心。

教学内容总是有难有易，学生程度总是有好有差，切忌急躁，始终要用平常心对待一切。必须懂得，天底下不会一切好事都找到你；更必须懂得任何困难总会有过得去的坎。

这就是我向同学交出的一颗心——事业心、责任心和平常心。