

量子力学基础

第1节 实物粒子的波粒二象性

光学发展简史

牛 顿: **微粒学说**, 惯性运动的微粒流

直线传播、反射、折射 ✓ 牛顿环 ✗

惠更斯: **波动学说**, 波动

直线传播、反射、折射 ✓ 干涉、衍射 ✗

几何光学

1801 年, 杨氏, 双缝干涉, 光的波长

1815 年, 菲涅耳, 惠更斯-菲涅耳原理, 直线传播、反射、折射、干涉、衍射

1817 年, 杨氏, 光是横波, 偏振

1865 年, 麦克斯韦, 光是电磁波

19 世纪末 20 世纪初, 普朗克, 爱因斯坦, 光量子假说

$$E = h\nu, \quad P = \frac{h}{\lambda}$$

光的波粒二象性

1924 年, 德布罗意

几何光学 费马原理: $\delta \int n ds = 0$ **波动光学**

经典力学 哈密顿原理: $\delta \int L dt = 0$ **波动力学?**

德布罗意假设: 一切实物粒子都具有波粒二象性

质量为 m 、运动速度为 V 的粒子

$$\begin{aligned} E &= mc^2 = h\nu \\ P &= mV = \frac{h}{\lambda} \end{aligned} \quad \text{—— 德布罗意关系式}$$

物质波或德布罗意波

$$\text{非相对论: } \lambda = \frac{h}{P} = \frac{h}{mV} = \frac{h}{\sqrt{2mE_k}}, \quad (E_k = \frac{P^2}{2m})$$

$$\begin{aligned} \text{相对论: } \lambda &= \frac{h}{P} = \frac{h}{m_0 V} = \frac{h}{m_0 V} \sqrt{1 - V^2 / c^2} \\ &= \frac{hc}{\sqrt{E^2 - E_0^2}}, \quad (E^2 = E_0^2 + c^2 P^2, \quad P = \frac{1}{c} \sqrt{E^2 - E_0^2}) \end{aligned}$$

$$E = E_0 + E_k, \quad E^2 = E_0^2 + 2E_0 E_k + E_k^2$$

$$\lambda = \frac{hc}{\sqrt{2E_0 E_k + E_k^2}}$$

$$\text{if } E_k \gg E_0, \quad \lambda \approx \frac{hc}{E_k}$$

$$\text{if } E_k \ll E_0, \quad \lambda \approx \frac{hc}{\sqrt{2E_0 E_k}} = \frac{h}{\sqrt{2m_0 E_k}}$$

例：经 150V 电压加速后，电子的 λ

解： $E_k = eU$

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2mE_k}} = \frac{6.63 \times 10^{-34}}{\sqrt{2 \times 9.11 \times 10^{-31} \times 1.6 \times 10^{-19} \times 150}} \\ = 1.00261 \times 10^{-10} \text{ m} \approx 1 \text{ \AA}$$

用相对论公式： $\lambda = \frac{hc}{\sqrt{2E_0E_k + E_k^2}} = 1.00254 \times 10^{-10} \text{ m}$

$U > 10^4 \text{ V}$ 时，必须使用相对论公式

例： $m = 0.01 \text{ kg}$ ， $V = 300 \text{ m/s}$ 的子弹的 λ

解： $V \ll c$ ， $\lambda = \frac{h}{P} = \frac{h}{mV} = \frac{6.63 \times 10^{-34}}{0.01 \times 300} = 2.21 \times 10^{-34} \text{ m}$

1927 年，戴维逊-革末实验

$$2\pi r = n\lambda, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\lambda = \frac{h}{P}, \quad 2\pi r = n \frac{h}{P}$$

$$rP = n \frac{h}{2\pi}, \quad L = n\hbar, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

电子显微镜，分辨率 $R \propto 1/\lambda$

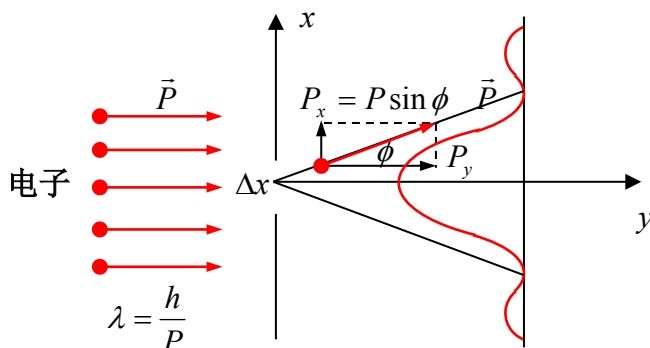
可见光波长： $4000 \sim 7600 \text{ \AA}$ ， 运动电子的波长： $0.1 \sim 0.01 \text{ \AA}$

第 2 节 测不准关系

经典力学：质点，确定的轨道，确定的坐标和动量

微观粒子：波粒二象性，轨道

(x, P_x) 、 (y, P_y) 、 (z, P_z) 不能同时具有确定的数值



$$\Delta x \cdot \sin \phi = \lambda$$

缝宽 Δx ：电子 x 坐标的不确定量

只考虑中央亮纹， $-P \sin \phi \leq P_x \leq P \sin \phi$

电子 P_x 的不确定量： $\Delta P_x \approx P \sin \phi$

考虑到次极大： $\Delta P_x \geq P \sin \phi$

$$\Delta x \cdot \Delta P_x \geq \Delta x P \sin \phi = \lambda P = h$$

$$\Delta x \cdot \Delta P_x \geq \hbar/2, \quad \Delta y \cdot \Delta P_y \geq \hbar/2, \quad \Delta z \cdot \Delta P_z \geq \hbar/2 : \text{测不准关系式}$$

$$\Delta x \cdot \Delta P_y \geq \hbar/2 \quad \times$$

讨论：如果 $\Delta x = 0$ ，粒子位置完全确定

$\Delta P_x = \infty$ ，粒子动量完全不确定

如果 $\Delta P_x = 0$ ，粒子动量完全确定

$\Delta x = \infty$ ，粒子位置完全不确定

微观粒子不能同时具有确定的坐标和动量

估算时 $\Delta x \cdot \Delta P_x \geq \hbar/2, \hbar, h$

例：原子线度 $10^{-10} m$

求：原子中电子 ΔV_x

原子中的电子能否看作经典质点？

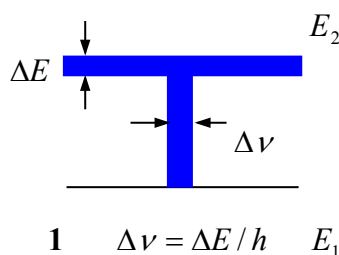
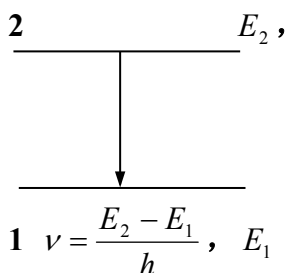
解： $\Delta x = 10^{-10} m$ ， $P_x = mV_x$ ， $\Delta P_x = m\Delta V_x$

$$\Delta x \cdot \Delta P_x \geq \hbar/2, \quad \Delta x \cdot m\Delta V_x \geq \hbar/2$$

$$\Delta V_x \geq \frac{\hbar}{2m\Delta x} = 5.8 \times 10^5 m/s$$

按玻尔理论 $V \approx 10^6 m/s$

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar/2$$



激发态寿命： $\tau \approx 10^{-8} s$

$$\Delta E \cdot \tau \geq \hbar/2, \quad \Delta E \approx \frac{\hbar}{2\tau}$$

若某谱线频率宽度为 $\Delta \nu$ ，波长宽度 $\Delta \lambda = ?$

$$\nu \lambda = c, \quad \lambda = \frac{c}{\nu}, \quad \Delta \lambda \neq \frac{c}{\Delta \nu}, \quad \Delta \lambda = \frac{c}{\nu^2} \Delta \nu$$

例：显象管中电子的加速电压 $U = 9000 V$

电子束直径 $D = 0.1 mm$

求：电子横向速度的不确定量

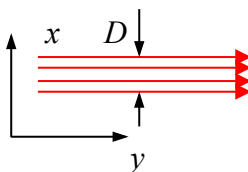
电子能否看作经典质点？

解： $\Delta x = D = 0.1 mm$ ， $\Delta x \cdot \Delta P_x \geq \hbar/2$ ， $\Delta x \cdot m\Delta V_x \geq \hbar/2$

$$\Delta V_x \geq \frac{\hbar}{2m\Delta x} = 0.58 m/s$$

$$\text{电子纵向速度 } v_y: \frac{1}{2} m v_y^2 = eU, \quad v_y = \sqrt{\frac{2eU}{m}} = 5.6 \times 10^7 m/s$$

$$\Delta v \ll v$$



例：氦氖激光器， $\lambda = 6328 \text{ \AA}$ ， $\Delta\lambda = 10^{-8} \text{ \AA}$

求：光沿 x 轴传播时，光子 Δx

解： $\Delta x \cdot \Delta P_x \geq \hbar/2$ ， $P_x = \frac{h}{\lambda}$ ， $\Delta P_x = \frac{h}{\lambda^2} \Delta\lambda$

$$\Delta x \frac{h}{\lambda^2} \Delta\lambda \geq \frac{\hbar}{2}, \quad \Delta x \geq \frac{\lambda^2}{4\pi\Delta\lambda} = 31.87 \text{ km}$$

例： $\lambda = 500 \text{ nm}$ 的光沿 x 轴传播

波长的不确定度（相对误差） $\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = 10^{-7}$

求：光子 Δx

解： $\Delta\lambda = 10^{-7} \lambda$ ， $\Delta x \geq \frac{\lambda^2}{4\pi\Delta\lambda} = 0.4 \text{ m}$