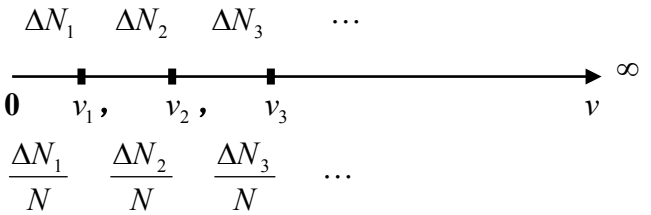
第 4 节 麦克斯韦分子速率分布律

一、麦~率

单个分子的速率可以取 $0\sim\infty$ 之间的任何数值

平衡状态下，大量气体分子按照速率的分布遵守完全确定的统计规律



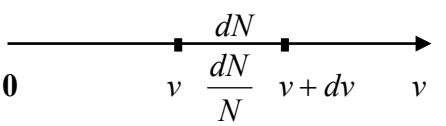
$0^\circ C$ 氧气分子速率分布

速率区间（m/s）	$\frac{\Delta N}{N}\times 100\%$
0~100	1.4%
100~200	8.1%
200~300	16.5%
300~400	21.4%
400~500	20.6%
500~600	15.1%
600~700	9.2%
700~800	4.8%
800~900	2.0%
900~∞	0.9%

速率区间 $v\sim v+dv$

$dv\uparrow$， $dN\uparrow$

$\frac{dN}{N}\uparrow$， $\frac{dN}{N}\propto dv$



dv 相同， $\frac{dN}{N}$ 与速率区间取在哪个速率 v 附近有关

如速率在 **100~100+*dv*** 和 **200~200+*dv*** 中 $\frac{dN}{N}$ 不同

$\frac{dN}{N}=f(v)dv$， $f(v)$：分子速率分布函数

$f(v)=\frac{dN}{Ndv}$：在速率 v 附近单位速率区间中的分子数占总分子数的比率

$$f(v)=4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}v^2e^{-\frac{1}{2}mv^2/kT}$$

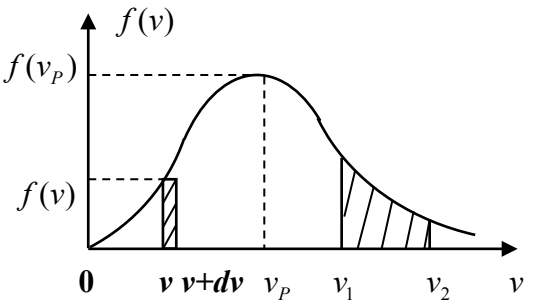
—— 麦克斯韦分子速率分布函数

速率在$v \sim v+dv$之间的分子数占总分子数的比率

$$\frac{dN}{N}=f(v)dv=4\pi(\frac{m}{2\pi kT})^{3/2}v^2e^{-\frac{1}{2}mv^2/kT}dv$$

—— 麦克斯韦分子速率分布律

二、速率分布曲线



1、窄条面积

$$f(v)dv=\frac{dN}{N}$$

速率在$v \sim v+dv$之间的分子数占总分子数的比率

2、宽条面积

$$\int_{v_1}^{v_2}f(v)dv=\int_{v_1}^{v_2}\frac{dN}{N}=\frac{\Delta N}{N}$$

速率在$v_1 \sim v_2$之间的分子数占总分子数的比率

3、曲线下的总面积

$$\int_0^{\infty}f(v)dv=\int_0^{\infty}\frac{dN}{N}=\frac{N}{N}=1$$：归一化条件

4、v=0 及 v→∞，$f(v)$=0

5、v_P：最可几速率，由极值条件$\frac{df}{dv}=0$

$$v_P=\sqrt{\frac{2kT}{m}}=\sqrt{\frac{2RT}{\mu}}，\quad f(v_P)=\frac{1}{e}\sqrt{\frac{8m}{\pi kT}}$$

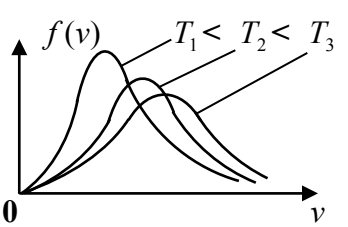
6、*T* 对曲线的影响

（同种理想气体）

***T*↑，v_P↑，$f(v_P)$↓**

温度越高，曲线越平坦

曲线下的总面积不变，都为 **1**

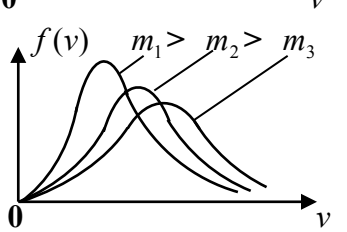


7、*m* 对曲线的影响

（***T*** 相同）

***m*↑，v_P↓，$f(v_P)$↑**

曲线下的总面积不变，都为 **1**



三、几个平均值

1、平均速率$\bar{v}=\frac{\text{所有分子速率之和}}{\text{分子总数}}$

速率在$v \sim v+dv$之间的分子数：***dN***

速率在$v \sim v+dv$之间的分子速率之和：***vdN***

所有分子速率之和：$\int_0^{\infty}vdN$

$$\bar{v}=\frac{1}{N}\int_0^\infty vdN=\int_0^\infty vf(v)dv=\sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}=\sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}$$

2、 $\overline{v^2}=\dfrac{\text{所有分子速率平方之和}}{\text{分子总数}}$

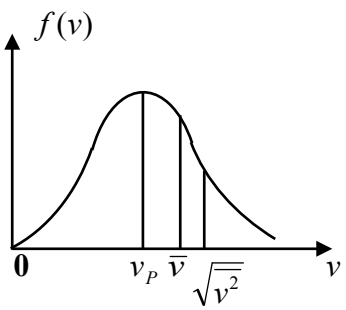
所有分子速率平方之和：$\int_0^\infty v^2dN$

$$\overline{v^2}=\frac{1}{N}\int_0^\infty v^2dN=\int_0^\infty v^2f(v)dv=\frac{3kT}{m}$$

$$\sqrt{\overline{v^2}}=\sqrt{\frac{3kT}{m}}=\sqrt{\frac{3RT}{\mu}}$$

三个特征速率：

$$v_P=\sqrt{\frac{2kT}{m}}<\bar{v}=\sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}<\sqrt{\overline{v^2}}=\sqrt{\frac{3kT}{m}}$$



v_P：讨论速率分布问题

$\bar{v}$：讨论分子碰撞问题

$\sqrt{\overline{v^2}}$：计算分子平均平动动能

3、 平均平动动能

$$\bar{\varepsilon}_K=\frac{1}{N}\int_0^\infty \varepsilon_K dN=\int_0^\infty \varepsilon_K f(v)dv=\int_0^\infty \frac{1}{2}mv^2f(v)dv=\frac{3}{2}kT$$

4、 速率 v 的任意函数 $g(v)$ 的平均值

$$\bar{g}=\int_0^\infty g(v)f(v)dv$$

指出下列各式的物理意义：

$f(v)dv$，$Nf(v)dv$，$\int_0^{v_P} f(v)dv$，$\int_{v_1}^{v_2} Nf(v)dv$

$\int_0^\infty Nf(v)dv$，$\int_0^\infty \frac{1}{2}mv^2f(v)dv$，$\int_{v_1}^{v_2} N\frac{1}{2}mv^2f(v)dv$

$f(v)dv=\dfrac{dN}{N}$：速率在 $v\sim v+dv$ 之间的分子数占总分子数的比率

$Nf(v)dv=dN$：速率在 $v\sim v+dv$ 之间的分子数

$\int_0^{v_P} f(v)dv=\int_0^{v_P}\dfrac{dN}{N}=\dfrac{\Delta N}{N}$：

速率在 $0\sim v_P$ 之间的分子数占总分子数的比率

$\int_{v_1}^{v_2} Nf(v)dv=\int_{v_1}^{v_2} dN=\Delta N$：速率在 $v_1\sim v_2$ 之间的分子数

$\int_0^\infty Nf(v)dv=N$：分子总数

$\int_0^\infty \frac{1}{2}mv^2f(v)dv$：分子的平均平动动能

$\int_{v_1}^{v_2} N\frac{1}{2}mv^2 f(v)dv = \int_{v_1}^{v_2}\frac{1}{2}mv^2 dN$：速率在$v_1 \sim v_2$之间的分子的平动动能之和

第 5 节 玻耳兹曼分布律

一、重力场中粒子按高度的分布

大气，平衡态，温度 ***T***

PV$=\nu$ ***RT*** 不成立

$P = nkT$ 成立

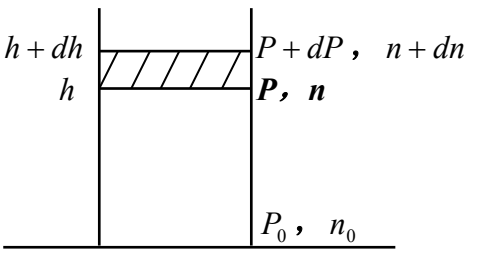
$dP = -\rho g dh$（1）

ρ：空气质量密度

$\rho = nm$，***m***: 空气分子质量

$dP = kTdn$　　（2）

$kTdn = -\rho g dh = -nmgdh$



$$\int_{n_0}^{n}\frac{dn}{n} = -\int_0^h \frac{mg}{kT}dh，\quad \ln\frac{n}{n_0} = -\frac{mgh}{kT}$$

$$n = n_0 e^{-\frac{mgh}{kT}} = n_0 e^{-\frac{\mu gh}{RT}}$$

$h\uparrow$，$n\downarrow$

$$P = nkT = n_0 kTe^{-\frac{mgh}{kT}} = P_0 e^{-\frac{mgh}{kT}} = P_0 e^{-\frac{\mu gh}{RT}}$$：等温气压公式

$h\uparrow$，$P\downarrow$　　高度计

例：求大气中 **n** 相差一倍的两处的高度差

已知：空气 $\mu = 28.97\times10^{-3}kg$，**T=300K**

解：h_1处，$n_1 = n_0 e^{-\frac{\mu g h_1}{RT}}$，$h_2$处，$n_2 = n_0 e^{-\frac{\mu g h_2}{RT}}$

$$h_2 > h_1，\quad \frac{n_2}{n_1} = e^{-\frac{\mu g(h_2-h_1)}{RT}} = \frac{1}{2}，\quad -\frac{\mu g(h_2-h_1)}{RT} = -\ln 2$$

$$h_2 - h_1 = \frac{RT\ln 2}{\mu g} = 6.10\times10^3 m$$

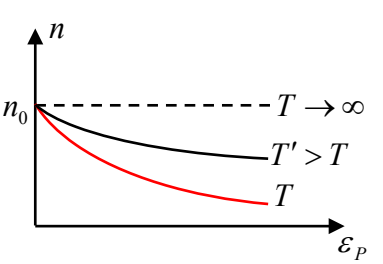
二、玻耳兹曼分布率

$$n = n_0 e^{-\frac{mgh}{kT}}，\quad n = n_0 e^{-\frac{\varepsilon_P}{kT}}$$

（适用于任意的保守力场）

ε_P：分子势能

n_0：势能零点处的分子数密度



$\varepsilon_P\uparrow$，$n\downarrow$；$T\uparrow$，$n\uparrow$；$T\to\infty$，$n\to n_0$

分子热运动有使分子趋向均匀分布的趋势
外力场有使分子聚集在势能较低处的趋势
两者的共同作用使气体分子形成了一种平衡的非均匀分布

$$dN = ndV = n_0 e^{-\frac{\varepsilon_P}{kT}} dxdydz$$

玻耳兹曼分布律：气体分子按空间位置的分布规律