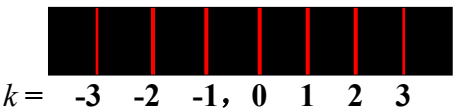
第 9 节　光栅衍射

透射光栅

反射光栅



衍射条纹特点：细而明亮

一、光栅常数

刻痕宽度 b

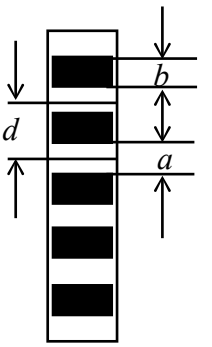
狭缝宽度 a

$d = a + b$：光栅常数

在 **1cm** 长的玻璃板

上刻上一万条刻痕

$d = 10^{-2}/10^{4} = 10^{-6} m = 10^{4}$ Å



二、光栅方程

相邻两狭缝发出的

倾角为 ϕ 的光线到达 P 的光程差

$\boxed{\delta = d\sin\phi = \pm k\lambda}$　　$k = 0,1,2\cdots$

光栅方程

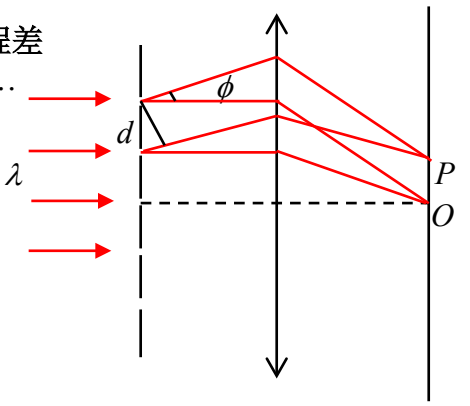
主极大条纹

k：主极大级次

$k = 0$：　**0** 级主极大

或中央明纹

$|\sin\phi| \le 1$，　$k_{\max} < \dfrac{d}{\lambda}$



三、缺级

光栅衍射是单缝衍射和多缝干涉的综合效果

若倾角为 ϕ 的光线满足光栅方程

$$d\sin\phi = k\lambda$$

同时也满足单缝衍射暗纹条件

$$a\sin\phi = k'\lambda \qquad k' = \pm1,\pm2,\pm3,\cdots$$

按光栅方程应是主极大条纹而实际上却是暗纹：缺级

缺级对应的主极大级次

$$\frac{d}{a} = \frac{k}{k'}，\quad k = \frac{d}{a}k' \qquad k' = \pm1,\pm2,\pm3\cdots$$

如，$\dfrac{d}{a} = 3$，$k = 3k'$，缺级级次，$k = \pm3,\pm6,\pm9,\cdots$

反过来，由第一个缺级对应的主极大级次可确定 $\dfrac{d}{a}$

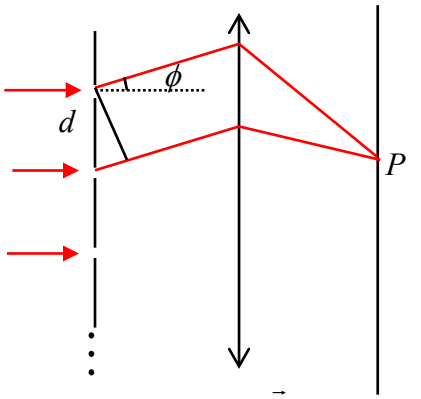
四、暗纹条件

N 缝

每个狭缝发出的倾角为 ϕ 的

光线会聚于 P 点进行相干迭加

$$\vec{A}=\vec{A}_1+\vec{A}_2+\cdots+\vec{A}_N=\sum_{i=1}^{N}\vec{A}_i$$



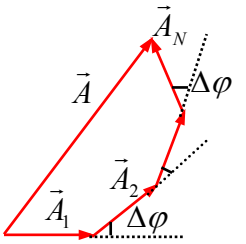
每个 $\vec{A}_i$ 大小相同

相邻两个 $\vec{A}_i$ 间的位相差 $\Delta\varphi$ 相同

相邻两狭缝发出的倾角为 ϕ 的

光线到达 P 点的光程差 $\delta=d\sin\phi$

位相差 $\Delta\varphi=\dfrac{2\pi}{\lambda}\delta=\dfrac{2\pi d\sin\phi}{\lambda}$



$\vec{A}=\sum_{i=1}^{N}\vec{A}_i$ 可由矢量多边形计算

若矢量多边形恰好形成一个

或若干个闭合多边形，则 $\vec{A}=0$， P 点为一暗纹

矢量多边形恰好形成一个或若干个闭合多边形的条件

$N\Delta\varphi=\pm m2\pi$， $m\in I$， $m\neq kN$， $k=0,1,2\cdots$

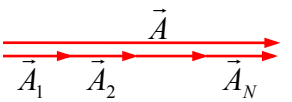
暗纹条件 $N\dfrac{2\pi d\sin\phi}{\lambda}=\pm m2\pi$

$\boxed{Nd\sin\phi=\pm m\lambda}$ $m\neq kN$， $k=0,1,2\cdots$

为什么 $m\neq kN$？

（1） $m=kN$， $Nd\sin\phi=\pm kN\lambda\Rightarrow d\sin\phi=\pm k\lambda$：光栅方程

（2） $m=kN$， $N\Delta\varphi=\pm kN2\pi\Rightarrow\Delta\varphi=\pm k2\pi$

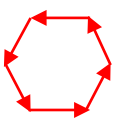


（3） $m=kN$， $\Delta\varphi=\pm k2\pi$

$m=0$	1	$2\cdots\cdots N-1$	N	$N+1\cdots\cdots 2N-1$	$2N$	$2N+1$
×			×		×	
$k=0$，			**1**		**2**	
0 级主极大			**1** 级主极大		**2** 级主极大	

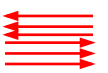
两个相邻主极大条纹之间有 $(N-1)$ 个暗纹， $(N-2)$ 个次极大，**p237**

$N=6$ 缝光栅， $m=1,2,3,4,5$ 时的矢量多边形， $N\Delta\varphi=\pm m2\pi$

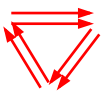


$m=1$， $\Delta\varphi=\pi/3$

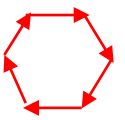
$m=2$， $\Delta\varphi=2\pi/3$



$m=3$， $\Delta\varphi=\pi$



$m=4$， $\Delta\varphi=4\pi/3$



$m=5$， $\Delta\varphi=5\pi/3$

p239

只能观察到主极大条纹

$N=2$：双缝同样成立

$N\uparrow$，主极大条纹越细越明亮，**p236**

五、衍射光谱

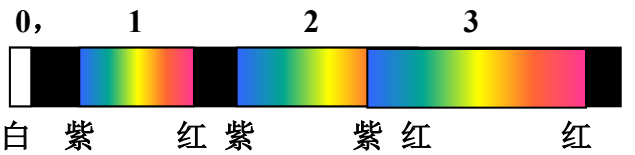
$d\sin\phi=\pm k\lambda$

主极大条纹的坐标 $x=f\cdot tg\phi\approx f\cdot\sin\phi=\pm kf\lambda/d$， $k=0,1,2\cdots$

相邻两个主极大条纹间距 $\Delta x=f\lambda/d$

d 一定， $\lambda\uparrow$， $\Delta x\uparrow$

用日光做实验，除中央亮纹为白色条纹外，两侧为彩色光谱



干涉与衍射都是波的相干迭加

干涉一般是指两束或几束光的相干迭加

衍射则是无穷多个子波的相干迭加

计算合振动时，干涉用求和的方法，衍射用积分的方法

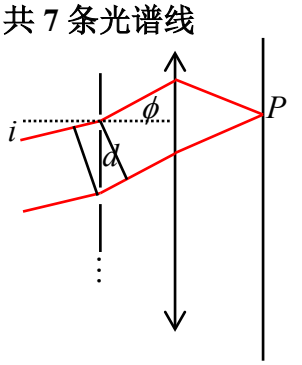
例：用 $\lambda=5000\,\mathring{A}$ 的单色光照射 $d=2.10\mu m$， $a=0.700\mu m$ 的光栅

求：（1）垂直照射（2）斜入射 $i=30.0^\circ$，能看到哪几级光谱线？

解：（1） $d\sin\phi=\pm k\lambda$， $k=\dfrac{d\sin\phi}{\lambda}<\dfrac{d}{\lambda}=\dfrac{2.10\times10^{-6}}{5000\times10^{-10}}=4.2$， $\dfrac{d}{a}=3$

$k=\pm3$ 为缺级，**-4，-2，-1，0，1，2，4** 共 **7** 条光谱线

（2） $\delta=d\sin\phi-d\sin i=d(\sin\phi-\sin i)$



$d(\sin\phi-\sin i)=\pm k\lambda$， $k=0,1,2\cdots$

$\phi=90^\circ$

$$k=\frac{d(\sin90^\circ-\sin30^\circ)}{\lambda}=2.1$$

$\phi=-90^\circ$

$$k=\frac{d[\sin(-90^\circ)-\sin30^\circ]}{\lambda}=-6.3$$

$\dfrac{d}{a}=3$， $k=-6,-3$ 为缺级

实际能看到**-5，-4，-2，-1，0，1，2** 共 **7** 条光谱线

注：平行光斜入射时，单缝衍射暗纹条件为

$$a(\sin\phi-\sin i)=\pm k'\lambda，\quad k'=1,2,3,\cdots$$

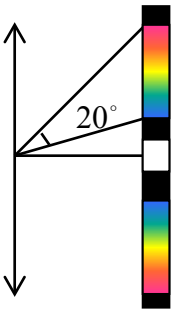
光栅方程 $d(\sin\phi-\sin i)=\pm k\lambda$， $k=0,1,2,\cdots$

缺级仍由 $k=\dfrac{d}{a}k'$ $\quad k'=\pm1,\pm2,\pm3\cdots$ 决定

例：假设把可见光的两个极限波长选定为

$\lambda_1 = 4300\,\mathring{A}$， $\lambda_2 = 6800\,\mathring{A}$，试设计

一光栅使第一级光谱线夹角为20°



求：d 及每厘米宽度上狭缝数目 N

解：$k=1$， $d\sin\phi_1 = \lambda_1$， $d\sin\phi_2 = \lambda_2$

$\phi_2 = \phi_1 + 20^\circ$

$$\lambda_2 = d\sin\phi_2 = d\sin(\phi_1 + 20^\circ) = d\sin\phi_1\cos 20^\circ + d\cos\phi_1\sin 20^\circ$$

$$= \lambda_1\cos 20^\circ + d\sqrt{1-\sin^2\phi_1}\sin 20^\circ = \lambda_1\cos 20^\circ + \sqrt{d^2-\lambda_1^2}\sin 20^\circ$$

$$\sqrt{d^2-\lambda_1^2}\sin 20^\circ = \lambda_2 - \lambda_1\cos 20^\circ$$

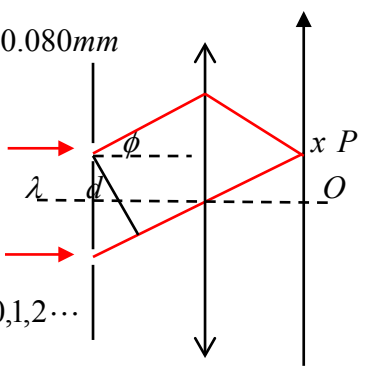
$$d = \sqrt{\lambda_1^2 + \frac{(\lambda_2 - \lambda_1\cos 20^\circ)^2}{\sin^2 20^\circ}} = 9142(\mathring{A})$$

$$N = \frac{10^{-2}}{9142\times 10^{-10}} = 10939\text{条/厘米}$$

例：一双缝，缝距 $d = 0.40mm$，缝宽 $a = 0.080mm$

用波长 $\lambda = 4800\,\mathring{A}$ 的平行光垂直照射

双缝，双缝后放一 $f = 2.0m$ 的透镜



求：（1）双缝干涉条纹间距

（2）单缝衍射中央明纹内

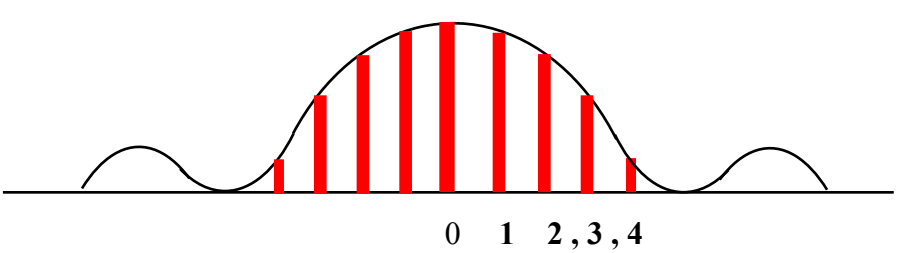
双缝干涉条纹数目 N

解：（1） $\delta = d\sin\phi = \pm k\lambda$， 明纹， $k = 0,1,2\cdots$

$$x = f\cdot tg\phi \approx f\cdot\sin\phi = \pm kf\lambda/d$$

$$\Delta x = f\lambda/d = \frac{2.0\times 4800\times 10^{-10}}{0.40\times 10^{-3}} = 2.4mm$$

（2） $\dfrac{d}{a} = 5$， $k = \pm 5$ 为缺级， N **=9**



，

单缝衍射一级暗纹

$a\sin\phi = \lambda$

$x = f\cdot tg\phi \approx f\cdot\sin\phi = f\lambda/a$

单缝衍射中央明纹宽度

$$\Delta x_0 = 2f\lambda/a = \frac{2\times 2.0\times 4800\times 10^{-10}}{0.080\times 10^{-3}} = 24mm$$

$\Delta x_0/\Delta x = 10$， N **=10-1=9**

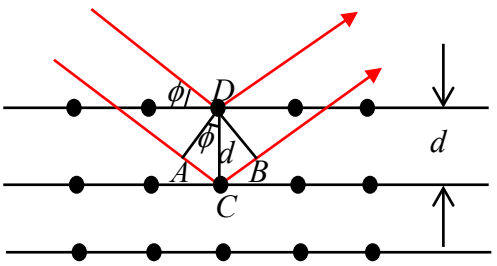
第 10 节　X 射线　布拉格方程

1895 年，X 射线（伦琴射线），波长：$0.1\mathring{A} \sim 100\mathring{A}$

1912 年，劳厄，天然晶体，透射光栅，观察到 X 射线衍射现象

证明了 X 射线是电磁波

布拉格父子，把晶体作为反射光栅



d：晶格常数（晶面间距），ϕ：掠射角

上下两个晶面产生的两束反射 X 射线的光程差

$$\delta = \overline{AC} + \overline{CB} = 2d\sin\phi$$

$2d\sin\phi = k\lambda$，$k = 1,2,3,\cdots$，强反射 ——— 布拉格方程

应用：（**1**）已知 d 求 λ（**2**）已知 λ 求 d，晶体结构分析