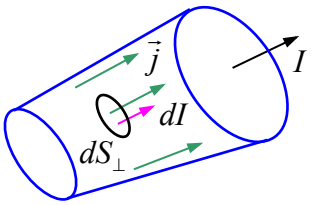
# 麦克斯韦电磁理论

## 一、电流密度



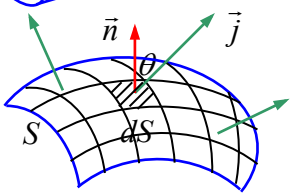

电流密度 $\vec{j}\begin{cases}\text{方向：沿电流方向}\\ \text{大小：}j=\dfrac{dI}{dS_\perp}\end{cases}$

**SI：** $A/m^2$

$dI = jdS_\perp = jdS\cos\theta = j_n dS$

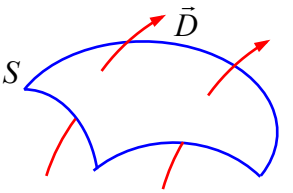
$dI = \vec{j}\cdot d\vec{S}$

$I = \int dI = \int_S \vec{j}\cdot d\vec{S}$




电流强度等于电流密度的通量

## 二、位移电流




$\Phi_D = \int_S \vec{D}\cdot d\vec{S}$

$\vec{D}$，$C/m^2$；$\Phi_D$，$C$

曲面固定，电场随时间变化

$$\frac{d\Phi_D}{dt} = \frac{d}{dt}\int_S \vec{D}\cdot d\vec{S} \underline{\underline{\text{曲面固定}}} \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$$

$\dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t}$：$C/(m^2 s) = A/m^2$，　位移电流密度：$\vec{j}_D = \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

$\dfrac{d\Phi_D}{dt}$：$C/s = A$，　位移电流：$I_D = \dfrac{d\Phi_D}{dt}$

$I_D = \int_S \vec{j}_D \cdot d\vec{S}$

$\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$，$\vec{j}_D = \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \varepsilon\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$，真空中，$\vec{j}_D = \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \varepsilon_0\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

位移电流的本质是变化的电场

## 三、静电场和稳恒磁场

静电场，
$$\oint_S \vec{D}^{(1)}\cdot d\vec{S} = \sum_{内} q_f$$
$$\oint_L \vec{E}^{(1)}\cdot d\vec{l} = 0$$

稳恒磁场，
$$\oint_S \vec{B}^{(1)}\cdot d\vec{S} = 0$$
$$\oint_L \vec{H}^{(1)}\cdot d\vec{l} = \sum_{内} I_{传}$$

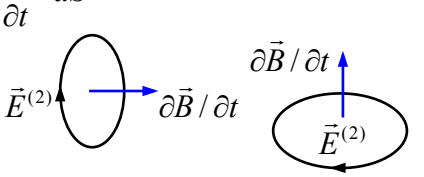
## 四、两个假说

**1、涡旋电场假说：**变化的磁场产生涡旋电场

$$\oint_L \vec{E}^{(2)}\cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_m}{dt} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$$

涡旋电力线的环绕方向

与 $\partial\vec{B}/\partial t$ 满足左手定则




$$\oint_S \vec{D}^{(2)}\cdot d\vec{S} = 0$$

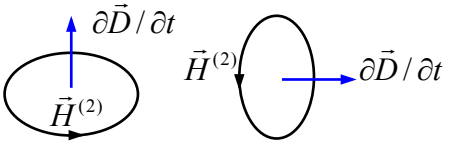
**2、位移电流假说**

$$\oint_L \vec{H}^{(2)} \cdot d\vec{l} = I_D = \frac{d\Phi_D}{dt} = \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

$\vec{H}^{(2)}$ 线的环绕方向

与 $\partial \vec{D} / \partial t$ 满足右手定则

$$\oint_S \vec{B}^{(2)} \cdot d\vec{S} = 0$$




变化的电场产生磁场

电荷 → 电场

↓↑

运动电荷 → 磁场

} 电磁场

五、麦克斯韦方程组的积分形式

静电场： $\vec{E}^{(1)}$、$\vec{D}^{(1)}$，　　传导电流的磁场：$\vec{B}^{(1)}$、$\vec{H}^{(1)}$

涡旋电场：$\vec{E}^{(2)}$、$\vec{D}^{(2)}$，　　位移电流的磁场：$\vec{B}^{(2)}$、$\vec{H}^{(2)}$

$\vec{D} = \vec{D}^{(1)} + \vec{D}^{(2)}$，$\vec{E} = \vec{E}^{(1)} + \vec{E}^{(2)}$，$\vec{B} = \vec{B}^{(1)} + \vec{B}^{(2)}$，$\vec{H} = \vec{H}^{(1)} + \vec{H}^{(2)}$

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \oint_S \vec{D}^{(1)} \cdot d\vec{S} + \oint_S \vec{D}^{(2)} \cdot d\vec{S} = \sum_{内} q_f$$

——— 电场的高斯定理

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = \oint_L \vec{E}^{(1)} \cdot d\vec{l} + \oint_L \vec{E}^{(2)} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_m}{dt}$$

——— 法拉第电磁感应定律

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \oint_S \vec{B}^{(1)} \cdot d\vec{S} + \oint_S \vec{B}^{(2)} \cdot d\vec{S} = 0$$

——— 磁场的高斯定理

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \oint_L \vec{H}^{(1)} \cdot d\vec{l} + \oint_L \vec{H}^{(2)} \cdot d\vec{l} = \sum_{内} I_{传} + \frac{d\Phi_D}{dt} = I_{全}$$

——— 全电流安培环路定律

$I_{全} = \sum_{内} I_{传} + I_D$：全电流，不包括磁化电流

$$\left.\begin{aligned} &\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \sum_{内} q_f \\ &\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_m}{dt} \\ &\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \\ &\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum_{内} I_{传} + \frac{d\Phi_D}{dt} \end{aligned}\right\} \text{——— 麦克斯韦方程组}$$

$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$，$\vec{B} = \mu \vec{H}$，$\vec{j} = \sigma \vec{E}$ → 电导率

洛仑兹力公式 $\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{V} \times \vec{B}$

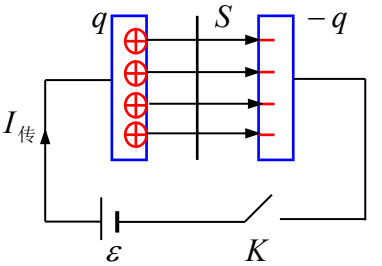
变化的电磁场在空间传播 $\Rightarrow$ 电磁波

真空中电磁波的波速 $c = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \approx 3 \times 10^8 m/s$ =真空光速

光是电磁波，（麦克斯韦 1865），1888，赫兹实验

例：证明平板电容器充电过程中，两极板间的位移电流

$$I_D = C\frac{dU}{dt}$$




证明：$t$，$q = CU$

$$I_{传} = \frac{dq}{dt} = C\frac{dU}{dt}$$

$$\Phi_D = \int_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = DS = \sigma S = q = CU$$

$$I_D = \frac{d\Phi_D}{dt} = C\frac{dU}{dt} = I_{传}$$

讨论：（1）$\Phi_D = q$：$S$ 上没有电荷分布

（2）$I_D = I_{传}$，$I_{全} = I_{传} + I_D$ 连续

全电流永远是连续的

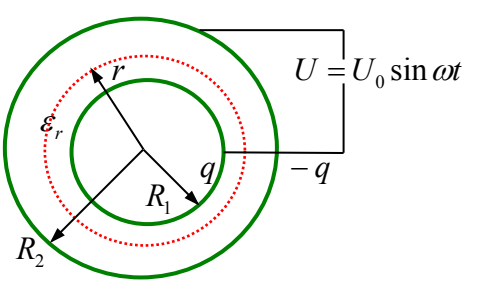
| 传导电流 $I_{传}$ | 位移电流 $I_D$ |
|---|---|
| 载流子定向移动形成的 | 变化的电场 |
| $\vec{j} = nq\vec{v}$ | $\vec{j}_D = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ |
| $I_{传} = \int_S \vec{j}\cdot d\vec{S} = \frac{dq}{dt}$， | $I_D = \int_S \vec{j}_D \cdot d\vec{S} = \frac{d\Phi_D}{dt}$ |
| 焦耳热，焦耳定律 | 不产生焦耳热 |
| $\oint_L \vec{H}^{(1)}\cdot d\vec{l} = \sum_{内} I_{传}$ | $\oint_L \vec{H}^{(2)}\cdot d\vec{l} = I_D = \frac{d\Phi_D}{dt}$ |

例：球形电容器与交流电源相连

求：（1）介质中的 $\vec{j}_D$

（2）通过半径为 $r$ 的球面的 $I_D$

（$R_1 < r < R_2$）




解：（1）$\vec{j}_D = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$，$q = CU = CU_0 \sin\omega t$

$$\vec{D} = \frac{q}{4\pi r^2}\cdot\frac{\vec{r}}{r} = \frac{CU_0\sin\omega t}{4\pi r^2}\cdot\frac{\vec{r}}{r}，\left(C = \frac{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r R_1 R_2}{R_2 - R_1}\right)$$

$$\vec{j}_D = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{CU_0\omega\cos\omega t}{4\pi r^2}\cdot\frac{\vec{r}}{r}$$

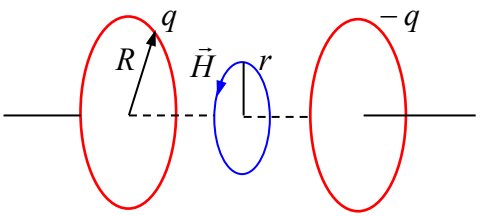
（2）$I_D = \int_S \vec{j}_D \cdot d\vec{S} = \int_S j_D \cos\theta dS = j_D 4\pi r^2$

$$= CU_0\omega\cos\omega t$$

$$I_{传} = \frac{dq}{dt} = C\frac{dU}{dt} = CU_0\omega\cos\omega t = I_D$$

例：圆片平板电容器

$q = q_0 \sin \omega t$




求：（1）板间 $j_D$、$I_D$

（2）$r(<R)$ 处的

$H$、$B$、$w$

解：（1）$j_D = \dfrac{\partial D}{\partial t}$，$D = \sigma = \dfrac{q}{S} = \dfrac{q_0 \sin \omega t}{\pi R^2}$，$j_D = \dfrac{\partial D}{\partial t} = \dfrac{q_0 \omega \cos \omega t}{\pi R^2}$

$$I_D = \int_S \vec{j}_D \cdot d\vec{S} = \int_S j_D \cos\theta dS = j_D S = q_0 \omega \cos \omega t$$

（2）$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_D$，$H 2\pi r = j_D \pi r^2 = \dfrac{q_0 \omega \cos \omega t}{\pi R^2} \pi r^2$

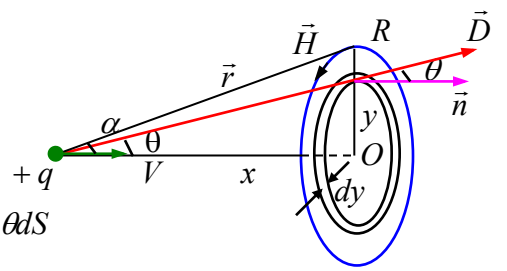
$$H = \frac{q_0 \omega \cos \omega t}{2\pi R^2} r，\quad B = \mu_0 H = \frac{\mu_0 q_0 \omega \cos \omega t}{2\pi R^2} r$$

$$w = \frac{1}{2}\vec{D} \cdot \vec{E} + \frac{1}{2}\vec{B} \cdot \vec{H} = \frac{1}{2}\frac{D^2}{\varepsilon_0} + \frac{1}{2}\mu_0 H^2$$

$$= \frac{q_0^2}{2\pi^2 \varepsilon_0 R^4}(\sin^2 \omega t + \frac{1}{4}\varepsilon_0 \mu_0 \omega^2 r^2 \cos^2 \omega t)$$

例：$+q$ 以速率 $V$ 朝 $O$ 点运动

$t$ 时刻 $+q$ 与 $O$ 点相距 $x$




求：（1）通过圆面的 $I_D$

（2）圆周上的 $\vec{B}$

解：（1）$\Phi_D = \int_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_S D \cos\theta dS$

$$= \int_S \frac{q}{4\pi(x^2+y^2)} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} 2\pi y dy$$

$$= \frac{1}{2} q x \int_0^R \frac{y dy}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \frac{1}{2} q x (-\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}})\Big|_0^R$$

$$= \frac{1}{2} q (1 - \frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}})$$

$$I_D = \frac{d\Phi_D}{dt} = \frac{d\Phi_D}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2} q V \frac{R^2}{(x^2+R^2)^{3/2}}，\quad (V = -\frac{dx}{dt})$$

（2）$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_D$，$H 2\pi R = \dfrac{1}{2} q V \dfrac{R^2}{(x^2+R^2)^{3/2}}$

$$H = \frac{qVR}{4\pi(x^2+R^2)^{3/2}}，\quad B = \mu_0 H = \frac{\mu_0 qVR}{4\pi(x^2+R^2)^{3/2}}$$

$$\sin\alpha = \frac{R}{r}，\quad r = \sqrt{x^2+R^2}$$

$B = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{qV\sin\alpha}{r^2}$，$\vec{B} = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{q\vec{V} \times \vec{r}}{r^3}$：运动电荷的磁场！

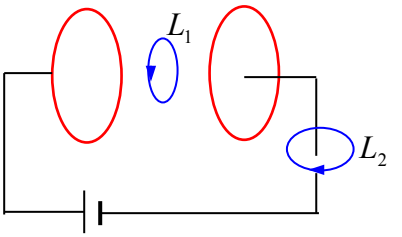
例：电容器充电过程中

（1）$\oint_{L1}\vec{H}\cdot d\vec{l} > \oint_{L2}\vec{H}\cdot d\vec{l}$

（2）$\oint_{L1}\vec{H}\cdot d\vec{l} = \oint_{L2}\vec{H}\cdot d\vec{l}$

（3）$\oint_{L1}\vec{H}\cdot d\vec{l} < \oint_{L2}\vec{H}\cdot d\vec{l}$

（4）$\oint_{L1}\vec{H}\cdot d\vec{l} = 0$




例：在无自由电荷与传导电流的空间区域，
变化的电磁场遵循的规律？

$\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = ?$，$\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l} = ?$，$\oint_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = ?$，$\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l} = ?$

$\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = 0$，$\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\dfrac{d\Phi_m}{dt}$，$\oint_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0$，$\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l} = \dfrac{d\Phi_D}{dt}$