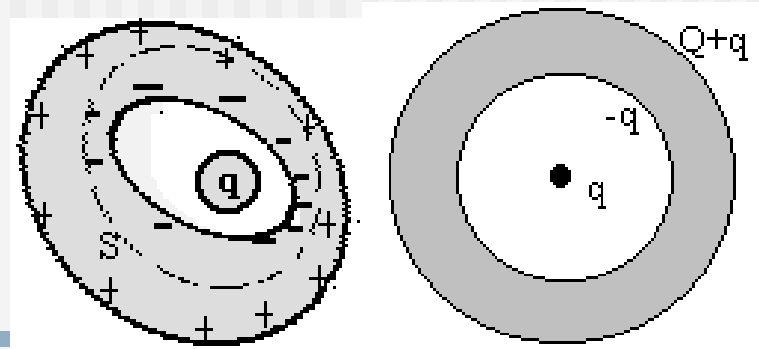


静电场边值问题的 唯一性定理

■ 典型的静电问题

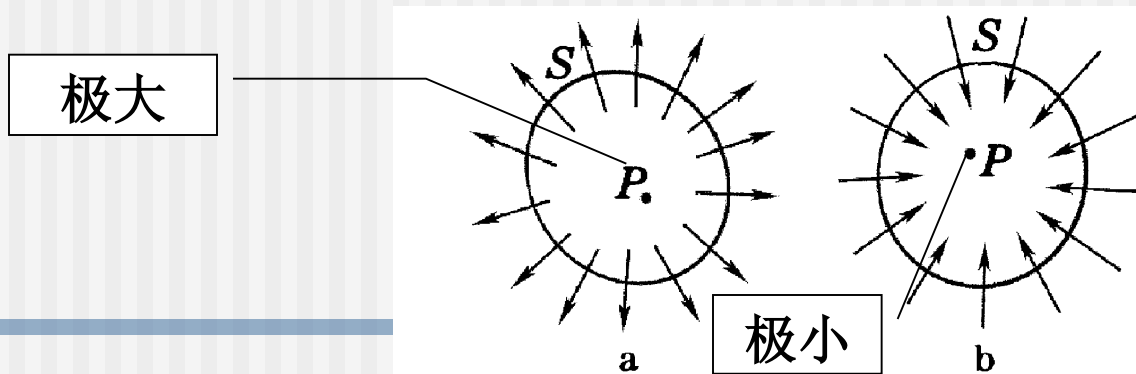
- 给定导体系中各导体的电量或电势以及各导体的形状、相对位置（统称边界条件），求空间电场分布，即在一定边界条件下求解。该类问题称为静电场的边值问题。

唯一性定理



- 对于静电场，给定一组边界条件，空间能否存在不同的恒定电场分布？——回答：否！
- 边界条件可将空间里电场的分布唯一地确定下来
- 该定理对包括静电屏蔽在内的许多静电问题的正确解释至关重要
- 论证分三步：引理——叠加原理——证明

几个引理



■ 引理一：在无电荷的空间里电势不可能有极大值和极小值

■ 证明（反证）若有极大，则

∇U 指向 P 点, $E = -\nabla U$ 背离 P 点

$$\Phi_E = \oiint_S E \cdot dS > 0, \text{但面内无电荷 矛盾}$$

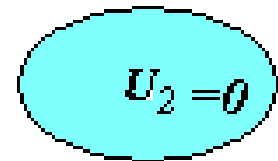
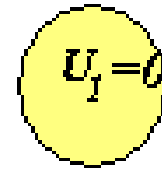
■ 若有极小，同样证明

■ 引理二：若所有导体的电势为0，则导体以外空间的电势处处为0

即意味着空间电势有极大值，违背引理一

■ 证明（反证）

在**无电荷**空间里电势分布连续变化，若空间有电势大于0（或小于0）的点，而边界上电势又处处等于零——必出现极大值或极小值——矛盾



若 $U_p > 0$
* P

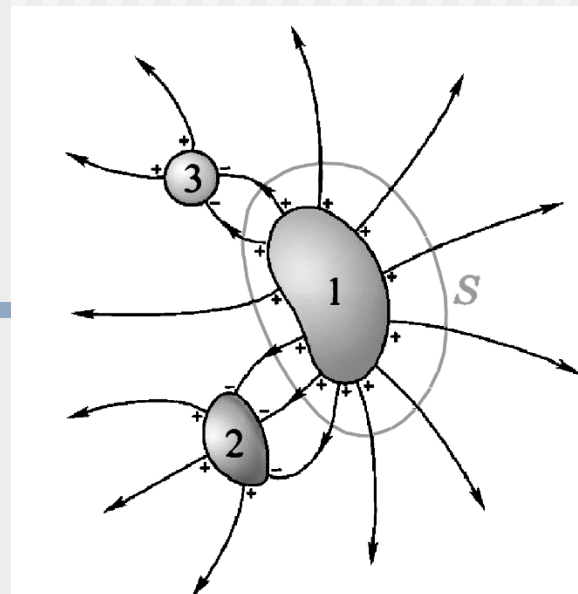
■ 推广：若完全由导体所包围的空间里各导体的电势都相等（设为 U_0 ），则空间电势等于常量 U_0

引理三：若所有导体都不带电， 则各导体的电势都相等

■ 证明（反证）

- 若不相等，必有一个最高，如图设 $U_1 > U_2$ 、 U_3 ，——导体1是电场线的起点——其表面只有正电荷——导体1上的总电量不为0——与前提矛盾

■ 引理二（+）引理三可推论：所有导体都不带电的情况下空间各处的电势也和导体一样，等于同一常量



叠加原理

- 在给定各带电导体的几何形状、相对位置后，赋予两组边界条件：
 - 1: 给定每个导体的电势 U_{Ik} (或总电量 Q_{Ik})
 - 2: 给定每个导体的电势 U_{IIk} (或总电量 Q_{IIk})
 - 设 U_I 、 U_{II} 满足上述两条件，则它们的线性组合 $U = a U_I + b U_{II}$ 必满足条件3:
 - 3: 给定每个导体的电势 $U_k = a U_{Ik} + b U_{IIk}$
(或总电量 $Q_k = Q_{Ik} a_k + b Q_{IIk}$)
- 特例：取 $U_{Ik} = U_{IIk}$ ，则 $U = U_I - U_{II}$ ($a=1, b=-1$) 对应的边界条件为，每个导体的电势为0

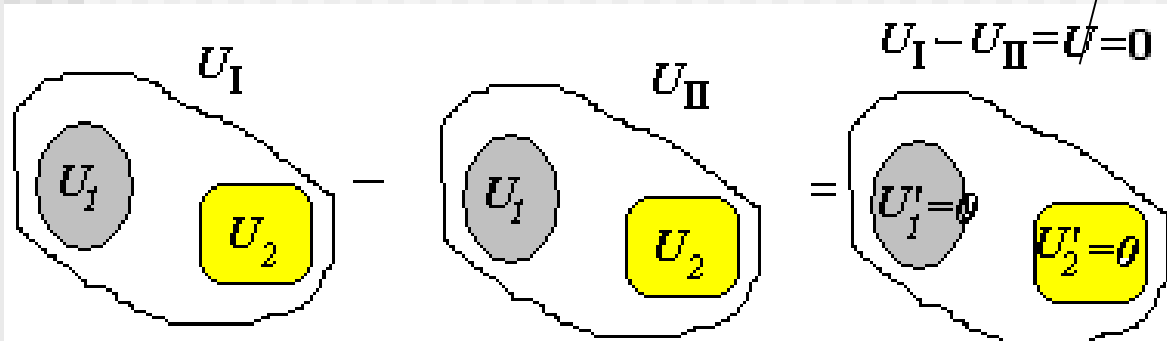
唯一性定理

■ 给定每个导体电势的情形

- 设对应同一组边值 $U_k (k=1,2,\dots)$

有两种恒定的电势分布 U_I 和 U_{II}

相当于所有导体上电势为0时的恒定电势分布



每一个导体上电势是给定的

由引理2

$$U_I = U_{II} \\ \Rightarrow E_I = E_{II}$$

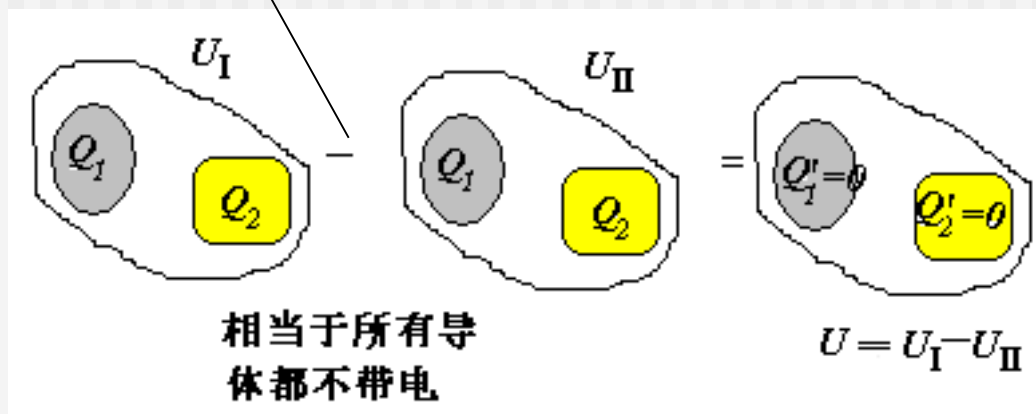
说明场分布是唯一的

■ 给定每个导体上总电量的情形

■ 第k个导体上的电量

设对
应同
一组
边值
有
两
种
恒
定
电
势
分
布

$$Q_k = \oiint_{S_k} \sigma_e dS = \varepsilon_0 \oiint_{S_k} E_n dS = -\varepsilon_0 \oiint_{S_k} \frac{\partial U}{\partial n} dS$$

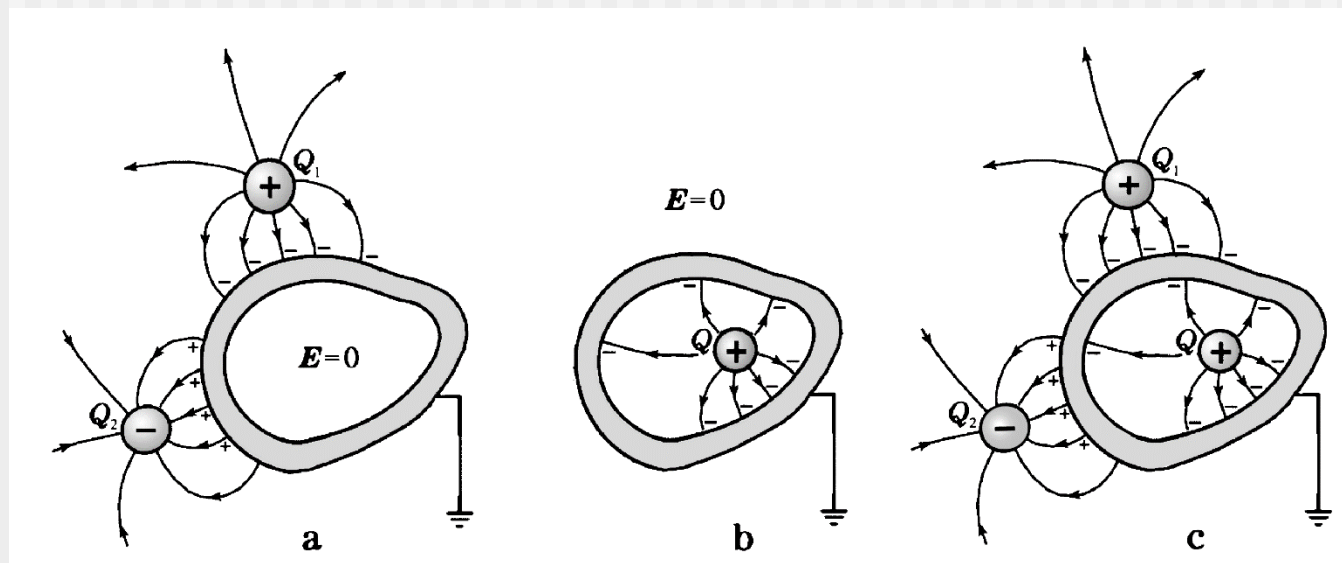


$$-\varepsilon_0 \oiint_{S_k} \frac{\partial U}{\partial n} dS = 0 \Rightarrow U = U_I - U_{II} = \text{常量} \Rightarrow E_I = E_{II}$$

说明场分布是唯一的

解释静电屏蔽

- 唯一性定理表明：一旦找到某种电荷分布，既不违背导体平衡特性，又是物理实在，则这种电荷分布就是**唯一**可能的分布。



- 图中是根据导体内场强处处为零判断存在两种实在的电荷分布的迭加就是唯一的分布