

§ 4. 稳态电磁场的动量和角动量

与普通实物一样，作为一种特殊物质的电磁场也具有能量、能流、动量和角动量，即使对稳态电磁场也不例外。在通常的电磁学教科书中，对稳态电磁场的能量都作了充分的讨论，但对稳态电磁场也具有动量和角动量这一概念却很少提及。R. P. Feynman 在所著《费曼物理学讲义》^[2] 中首次提出了这一概念，引起了普遍的关注。实际上，稳态电磁场具有动量和角动量是电磁场普遍理论的重要结论，如果不理解这一结论，就很难解释许多电磁现象中出现的“矛盾”。

为了能够具体地理解稳态电磁场具有动量这一概念，试举一例。如图 11-4-1 所示，设空间有一导线环，在其附近某处放置一点电荷 q ，开始时两者都静止不动，它们的总动量为零。今用电源在导线环中建立恒定电流 I ，该电流将在空间激发磁场，在电流从零增加到恒定值 I 的变化过程中，磁场将相应地变化。磁场的变化必将在空间激发涡旋电场，该涡旋电场使点电荷 q 受到一作用力。为了使点电荷 q 保持静止不动，外界必须对 q 施以机械作用力，且使该力每时每刻都与涡旋电场力保持平衡。于是，在建立电流的整个过程中，由导线环和点电荷构成的上述系统受到了外界一定的冲量作用，但系统仍保持静止，总动量仍为零。根据动量定理，外界机械冲量的作用必然导致系统动量的增加。这里显然存在表观上的矛盾，即出现了佯谬。注意到机械冲量作用的过程也是建立磁场的过程，既然导线环和点电荷系统并未获得动量，那么一定是电磁场获得了动量，该动量是从外界通过机械冲量的作用而获得的。由此可见，只有在确立了稳态电磁场具有动量这一概念后，所产生的表观矛盾才得以解决。以上只是对此例的定性分析，根据电动力学理论可以导出计算稳态电磁场动量的严格公式。下面再举两个具体例子，并给出有关的公式，作定量的解释。

一、两个佯谬

当我们用一种方法从一个角度分析某一物理现象时会得出一个答案，而用另一种方法从另一个角度分析同一现象时可能会得出另一个答案，如何取舍如



图 11-4-1

何协调一致往往使我们陷于迷惑不解、左右为难的困境。由于这种矛盾常常是表观的，故称为佯谬。实际上，在真实的物理世界中，同一物理过程只能有一种结局，同一物理现象只能有一种正确的解释，同一物理问题只能有一个正确的答案，佯谬的产生只能来自分析者本人在概念上的混乱，在抓住本质得到澄清之后，将迎来协调一致的圆满解释。下面是两个例子。

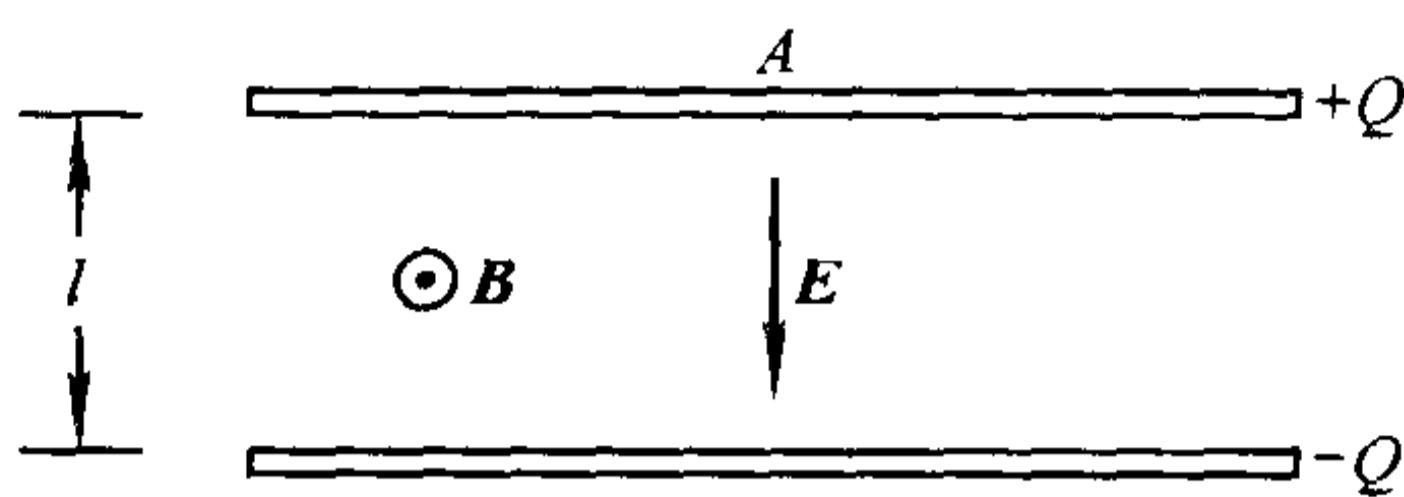


图 11-4-2

[例 1] 文献 [1] 中举了一些例子，其中之一如图 11-4-2 所示。一个静止的平板电容器，极板的面积为 A ，板距为 l ，两极板上分别带电 $\pm Q$ ，在电容器内部产生匀强电场 E ，又在整个空间存在垂直于电场的均匀恒定磁场 B 。今用一根导线小心地在电容器内部与两极板相接触（所谓“小心”是指导线与极板接触时不带任何动量）。以电容器、内部的电磁场以及所加导线作为考察对象，整个系统原先是静止的，电磁场又是恒定不变的，似乎总动量应为零。但由于导线与两极板接触后，两极板通过导线放电，导线中出现了电流，导线将受到 Ampere 力的作用，使导线产生向左的动量，系统的总动量不再等于零。然而导线所受的 Ampere 力是内力，内力的作用不会使系统的总动量发生改变，于是出现了矛盾。在上述分析中无疑漏掉了什么东西，这就是未考虑稳态电磁场本身具有的动量，因而出现的矛盾是表观上的，这是一种佯谬。

[例 2] Feynman 在《费曼物理学讲义》^[2] 中举了另一个例子。如图 11-4-3 所示，一个绝缘塑料薄圆盘被固定在有光滑轴承的同心轴上，圆盘可绕轴自由转动。圆盘上固定一个同轴螺线管，用电池提供恒定电流。在塑料圆盘的边缘处等间隔地分布着一些金属小球，每个小球带等量同号电荷 q 。上述各零件均固连在一起，而且开始时静止不动。设法将螺线管中的电流切断（切断电流的动作不致影响系统原先的静止状态）。切断电流后，圆盘是否仍保持原来的静止状态呢？在电流未切断前，螺线管内的电流产生磁场，有磁通

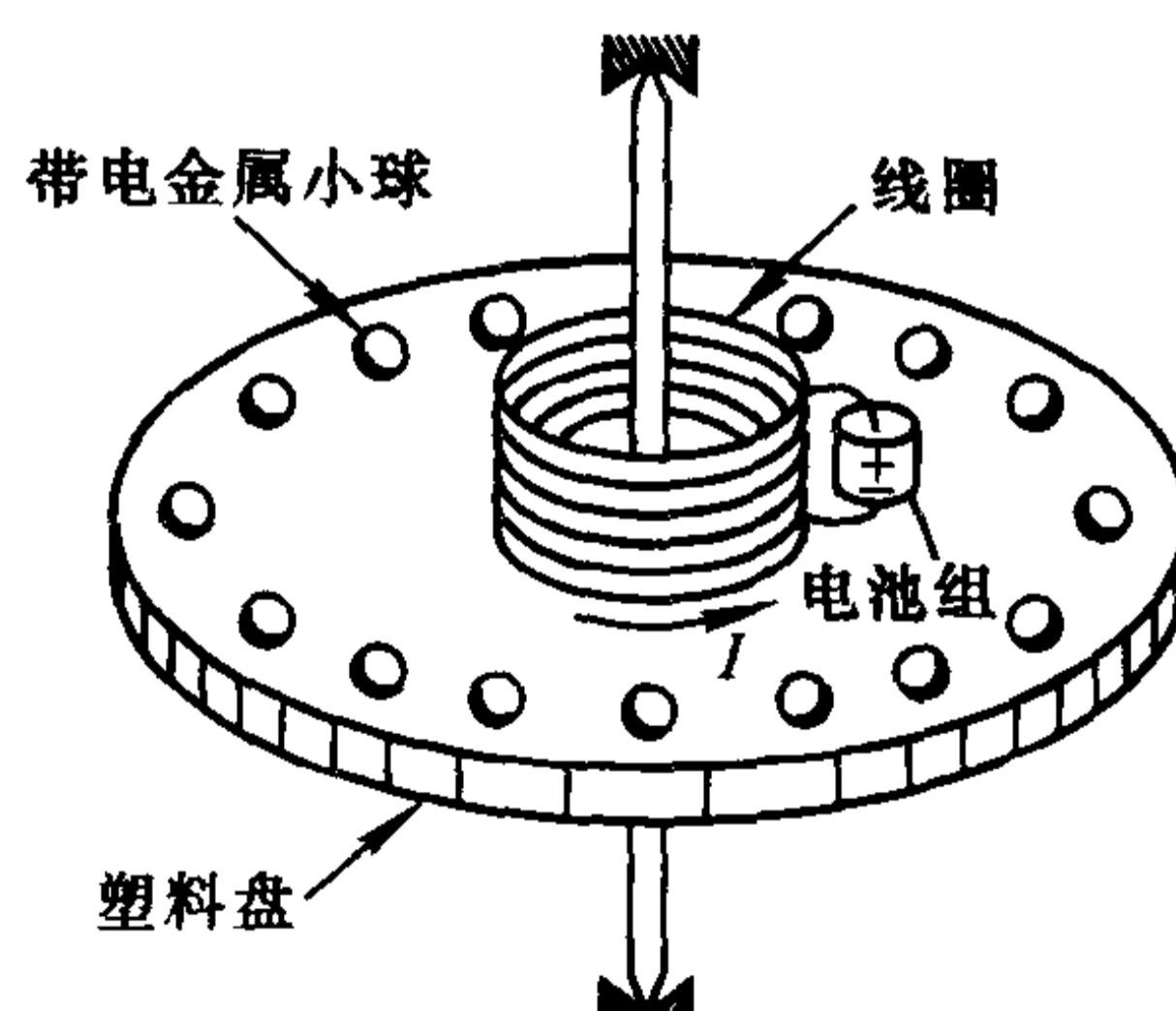


图 11-4-3

量通过圆盘面；在电流被切断后，磁场消失，磁通量变为零。在此过程中，因磁场变化产生相应的涡旋电场，该涡旋电场沿圆盘边缘的切线方向，各带电金属小球将受到切向涡旋电场力的作用，使圆盘产生转动。从另一角度分析，由于整个圆盘系统在切断电流前后未受到任何外界机械力的干扰（作用），切断电流前后系统的角动量应保持不变，始终为零，即切断电流后圆盘不会转动，如果圆盘转动将违背角动量守恒规律。以上两种解释和论证，结果刚好相反，究竟哪一种正确呢？这又是一个佯谬。Feynman 在书中写道：“当你把它想出来时，你已发现了一个重要的电磁学原理。”

普通的实物具有动量和角动量，同样，作为特殊物质的电磁场也具有动量和角动量，只有掌握了这一电磁学基本原理后，以上两个佯谬（以及类似的其他佯谬）才能得到协调一致的正确解释。

根据 Maxwell 方程和 Lorentz 力公式可以证明，电磁场的能流密度（Poynting 矢量） S 以及电磁场的动量密度 g 为

$$S = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \quad (1)$$

$$g = \frac{1}{c^2} S \quad (2)$$

式中 c 为真空光速。以上两式可在任何一本电动力学教材中找到。值得注意的是，以上两式是电磁场理论的普遍结论，对电磁场的类型未加任何限制，因此，同样适用于稳态电磁场的情形。

对于[例 1]，由于电容器内部同时存在静电场和恒定磁场，根据公式(1)，电容器内部存在能流，其方向是从电容器的右端流向左端（实际上是整个空间中存在的能量环流的一部分），其大小为

$$\begin{aligned} S &= EH = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \cdot \frac{B}{\mu_0} \\ &= \frac{QB}{\epsilon_0 \mu_0 A} \end{aligned}$$

式中 A 为电容器极板面积， Q 为电容器极板上的电量。由公式(2)式，电容器内的电磁动量密度为

$$\begin{aligned} g &= \frac{S}{c^2} = \frac{QB}{c^2 \epsilon_0 \mu_0 A} \\ &= \frac{QB}{A} \end{aligned}$$

上式中用到真空光速 $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$ 。故电容器两极板之间包含的总电磁动量为

$$G = gAl = QBl$$

电磁动量的时间变化率为

$$\frac{dG}{dt} = Bl \frac{dQ}{dt} = Bli$$

式中 $i = \frac{dQ}{dt}$ 就是当导线与两极板接触后在导线中产生的电流， $Bl i$ 则正好等于导线中有电流 i 时导线受到的 Ampere 力。上式表明，导线因受 Ampere 力而获得的动量来源于电磁场的动量，这种动量转移同样遵守动量守恒原理。至此，[例 1] 的佯谬得到了正确的解释。

在 [例 2] 中，空间同时存在由带电小球激发的电场 E 以及螺线管电流产生的磁场 B ，因而空间存在能流 S 。如图 11-4-4 所示，从图的上方看，能流逆时针流动。按公式(2)，有能流也就有电磁动量，相应的电磁角动量为沿轴线向上。故当螺线管中的电流未切断时，空间电磁场已具有了沿轴线向上的角动量。当切断电流后，电磁场角动量消失，转化为圆盘的同方向的机械角动量，从图 11-4-4 的上方看，圆盘将作逆时针转动。由此可见，考虑了电磁场的角动量后，圆盘的转动并不违背角动量守恒规律，恰恰相反，圆盘的转动正是角动量守恒的必然结果。这就是对 [例 2] 佯谬的定性解释，下面给出定量的论证。

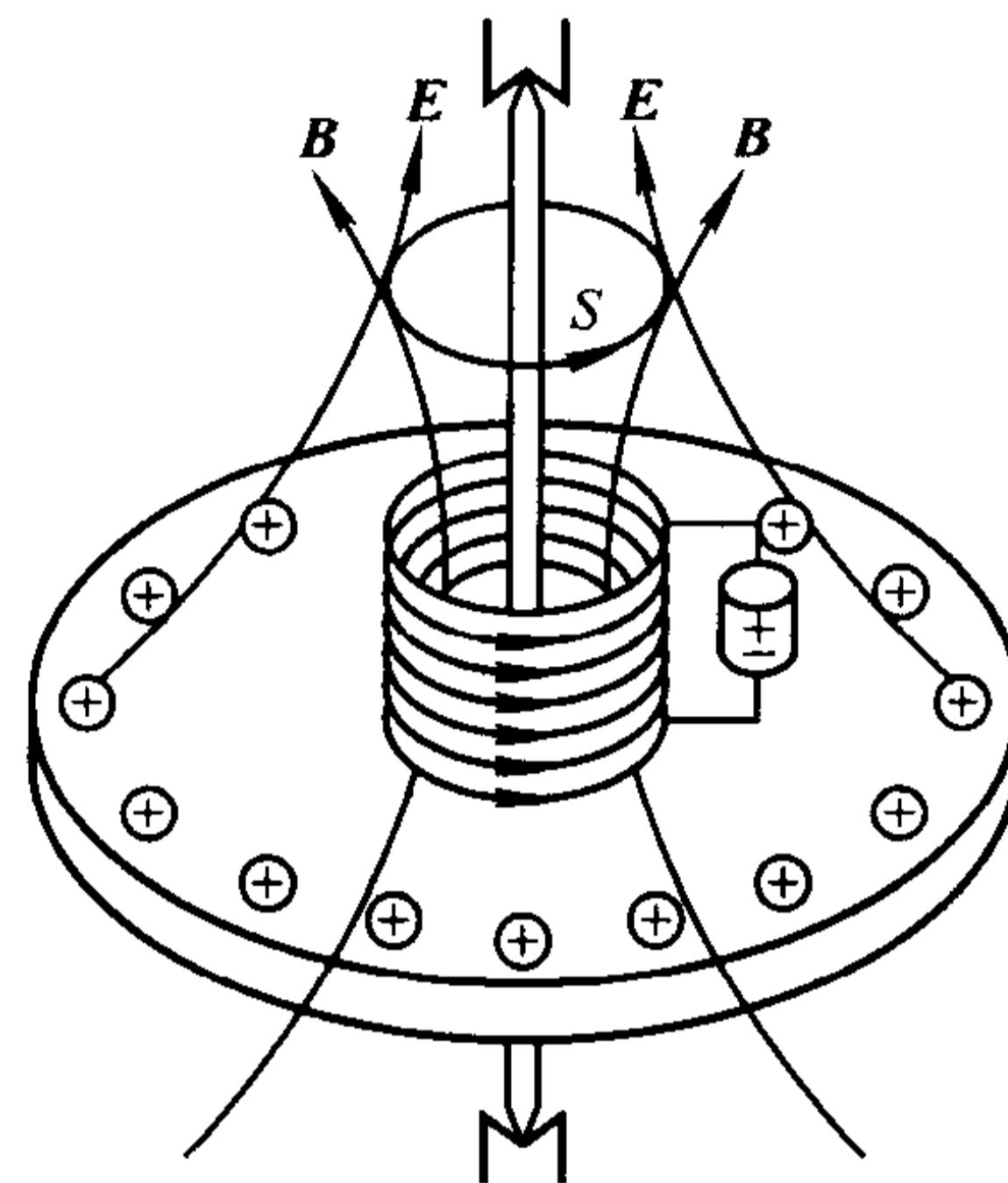


图 11-4-4

二、稳态电磁场的动量和角动量

为了进一步计算 [例 2] 中切断电流后圆盘所获得的角动量，只需计算通电流时电磁场的总角动量即可，因为根据角动量守恒定律，两者是相同的。由公式(2)，在真空情形，电磁场的动量密度为

$$\begin{aligned} g &= \epsilon_0 \mu_0 S = \epsilon_0 \mu_0 \mathbf{E} \times \mathbf{H} \\ &= \epsilon_0 \mathbf{E} \times \mathbf{B} \end{aligned}$$

在体积为 V 的空间内，电磁场的总动量为

$$G = \int_V g dV = \epsilon_0 \int_V (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) dV \quad (3)$$

上式表明，电磁场的动量储存在 \mathbf{E} 和 \mathbf{B} 不为零的空间内。用(3)式计算电磁场总动量 G 时，必须先求出 \mathbf{E} 和 \mathbf{B} 的空间分布，然后在整个空间积分，一般情况下计算比较复杂。M. G. Calkin 的文章^[3]给出了另一种等价的计算方法(也可参看文献[4])。

磁场可用矢势 \mathbf{A} 表示，并有

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

对稳态场又有

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

式中 ρ 为电荷体密度. (3)式中的被积函数可写成如下对称形式:

$$\begin{aligned}\mathbf{E} \times \mathbf{B} &= \mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{A}) + \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{E}) \\ &= \nabla(\mathbf{E}_c \cdot \mathbf{A}) - (\mathbf{E} \cdot \nabla)\mathbf{A} + \nabla(\mathbf{A}_c \cdot \mathbf{E}) - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{E}\end{aligned}$$

式中脚标 c 表示在进行微分运算时相应量当作常量. 所以

$$\mathbf{E} \times \mathbf{B} = \nabla(\mathbf{E} \cdot \mathbf{A}) - (\mathbf{E} \cdot \nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{E} \quad (4)$$

根据张量公式,

$$\nabla \cdot (\varphi \overrightarrow{T}) = (\nabla \varphi) \cdot \overrightarrow{T} + \varphi \nabla \cdot \overrightarrow{T}$$

式中 \overrightarrow{T} 为张量, φ 为标量, 利用上式, 有^①

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (\overrightarrow{I} \mathbf{E} \cdot \mathbf{A}) &= \nabla(\mathbf{E} \cdot \mathbf{A}) \cdot \overrightarrow{I} + (\mathbf{E} \cdot \mathbf{A}) \nabla \cdot \overrightarrow{I} \\ &= \nabla(\mathbf{E} \cdot \mathbf{A})\end{aligned}$$

式中 \overrightarrow{I} 为单位张量. 又, 由并矢的散度公式, 有

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (\mathbf{EA}) &= (\nabla \cdot \mathbf{E})\mathbf{A} + (\mathbf{E} \cdot \nabla)\mathbf{A} \\ \nabla \cdot (\mathbf{AE}) &= (\nabla \cdot \mathbf{A})\mathbf{E} + (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{E} \\ &= (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{E}\end{aligned}$$

所以

$$\nabla \cdot (\overrightarrow{I} \mathbf{E} \cdot \mathbf{A} - \mathbf{EA} - \mathbf{AE}) = \nabla(\mathbf{E} \cdot \mathbf{A}) - (\nabla \cdot \mathbf{E})\mathbf{A} - (\mathbf{E} \cdot \nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{E}$$

利用上式, (4)式可写成

① 张量 \overrightarrow{T} 的散度的定义为

$$\nabla \cdot \overrightarrow{T} = \frac{\partial}{\partial x}(i \cdot \overrightarrow{T}) + \frac{\partial}{\partial y}(j \cdot \overrightarrow{T}) + \frac{\partial}{\partial z}(k \cdot \overrightarrow{T})$$

式中 i, j, k 为 x, y, z 轴方向的单位矢量, 均为恒矢量. 对单位张量 \overrightarrow{I} , 有

$$\nabla \cdot \overrightarrow{I} = \frac{\partial}{\partial x}(i \cdot \overrightarrow{I}) + \frac{\partial}{\partial y}(j \cdot \overrightarrow{I}) + \frac{\partial}{\partial z}(k \cdot \overrightarrow{I})$$

因任意矢量与单位张量点乘后得其自身, 即

$$i \cdot \overrightarrow{I} = i, j \cdot \overrightarrow{I} = j, k \cdot \overrightarrow{I} = k$$

所以

$$\nabla \cdot \overrightarrow{I} = \frac{\partial i}{\partial x} + \frac{\partial j}{\partial y} + \frac{\partial k}{\partial z} = 0$$

$$\begin{aligned}\mathbf{E} \times \mathbf{B} &= \nabla \cdot (\vec{\mathbf{I}} \mathbf{E} \cdot \mathbf{A} - \mathbf{E} \mathbf{A} - \mathbf{A} \mathbf{E}) + (\nabla \cdot \mathbf{E}) \mathbf{A} \\ &= \nabla \cdot (\vec{\mathbf{I}} \mathbf{E} \cdot \mathbf{A} - \mathbf{E} \mathbf{A} - \mathbf{A} \mathbf{E}) + \frac{\rho}{\epsilon_0} \mathbf{A}\end{aligned}$$

于是(3)式可改写为

$$\mathbf{G} = \epsilon_0 \int_V \nabla \cdot (\vec{\mathbf{I}} \mathbf{E} \cdot \mathbf{A} - \mathbf{E} \mathbf{A} - \mathbf{A} \mathbf{E}) dV + \int_V \rho \mathbf{A} dV$$

令

$$\vec{\mathbf{T}} = \vec{\mathbf{I}} \mathbf{E} \cdot \mathbf{A} - \mathbf{E} \mathbf{A} - \mathbf{A} \mathbf{E}$$

则

$$\mathbf{G} = \epsilon_0 \int_V (\nabla \cdot \vec{\mathbf{T}}) dV + \int_V \rho \mathbf{A} dV \quad (5)$$

利用张量的下述积分变换式：

$$\int_V dV (\nabla \cdot \vec{\mathbf{T}}) = \oint_S d\mathbf{S} \cdot \vec{\mathbf{T}}$$

式中 S 是包围体积 V 的封闭曲面，(5)式可写为

$$\mathbf{G} = \epsilon_0 \oint_S d\mathbf{S} \cdot \vec{\mathbf{T}} + \int_V \rho \mathbf{A} dV$$

上式右端第一项是在封闭曲面上的积分。因电磁场充满整个无穷大空间，当求电磁场的总动量时，上述曲面 S 应扩展到无穷远，积分结果必为零（因场源均在观察者所在的区域，在无穷远处场已衰减为零）。故得出，电磁场的总动量为

$$\mathbf{G} = \int_V \rho \mathbf{A} dV \quad (6a)$$

上面从电磁场的动量密度计算了稳态电磁场的总动量，下面进一步论证，该动量来自建立电流-电荷系统时外界所施的冲量作用。为此，考虑如图 11-4-5 所示的系统：若干个导电环 L_1, L_2, \dots 和带电体 Q ，带电体的电荷密度为 ρ ，上述系统始终保持静止不动。今在各导电环中建立恒定电流，则各电流环之间将以 Ampere 力相互作用，为了使各导电环仍保持静止，外界必须对各电流环施以一定的机械力。由于各电流环之间的相互作用力是一对对的反平行力，作用在各导电环上的合外力为零，对系统的动量不产生影响。然而，在建立各电流的过程中，空间的磁场发生了变化，因而要产生涡旋电场 $\mathbf{E}_{\text{涡旋}}$ ， $\mathbf{E}_{\text{涡旋}}$ 又作用于带电体上的电荷。由 Maxwell 方程的积分形式，

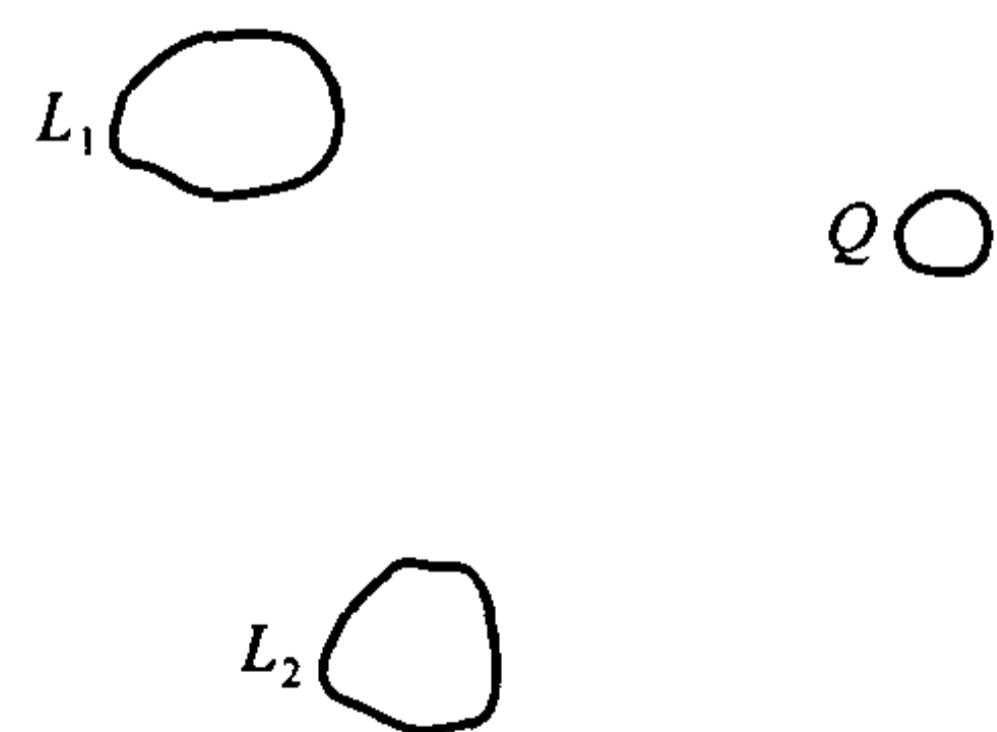


图 11-4-5

$$\oint \mathbf{E}_{\text{涡旋}} \cdot d\mathbf{l} = - \frac{d}{dt} \iint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

$$= - \frac{d}{dt} \iint (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S}$$

根据 Stokes 定理, 上式可改写为

$$\oint \mathbf{E}_{\text{涡旋}} \cdot d\mathbf{l} = - \frac{d}{dt} \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$$

故有

$$\mathbf{E}_{\text{涡旋}} = - \frac{d\mathbf{A}}{dt}$$

带电体的体积元 dV 中的电荷所受涡旋电场力为

$$\mathbf{E}_{\text{涡旋}} \rho dV = - \rho \frac{d\mathbf{A}}{dt} dV$$

带电体 Q 受到的总作用力为

$$\mathbf{F}_{\text{涡旋}} = - \int \rho \frac{d\mathbf{A}}{dt} dV$$

上述积分遍及全部带电体. 为了维持力的平衡, 确保静止, 外界对带电体所施的机械力应为

$$\mathbf{F}_{\text{机械}} = - \mathbf{F}_{\text{涡旋}} = \int \rho \frac{d\mathbf{A}}{dt} dV$$

$$= \frac{d}{dt} \int \rho \mathbf{A} dV$$

根据动量定理, $\mathbf{F}_{\text{机械}}$ 的作用使上述电流 - 电荷系统的动量 \mathbf{G} 发生变化, 即

$$\mathbf{F}_{\text{机械}} = \frac{d\mathbf{G}}{dt} = \frac{d}{dt} \int \rho \mathbf{A} dV$$

注意到系统开始时的动量为零, 故有

$$\mathbf{G} = \int \rho \mathbf{A} dV \quad (6b)$$

上述结果表明, 在导电环中建立电流的过程中, 原来静止的系统从外界获得的动量恰好等于电磁场具有的动量[比较(6a)和(6b)两式即可确定].

前面已经证明, 在稳态条件下计算电磁场总动量的公式(3)和公式(6)是等价的. (6)式表明, 电磁场的动量储存在 $\rho \neq 0$ 的地方, 即动量体现在电荷上. 这种情形是有例可循的, 例如, 在计算静电场的能量时, 既可应用场能密度的公式:

$$W = \frac{1}{2} \int_V \epsilon_0 E^2 dV$$

也可应用电荷相互作用能的公式:

$$W = \frac{1}{2} \int \rho U dV$$

前者的观点是场能分布在整个场强 E 不为零的空间，后者的观点是场能集中在电荷上。对磁场能量分布也有相仿的结果。根据(6)式，若电荷分布已知，设法求出磁场的势矢 A ，就可以求出电磁场的总动量，计算起来要比用公式(3)方便得多。对于点电荷 q ，若已知磁场的势矢 A ，由公式(6)，电磁场的总动量为

$$\mathbf{G} = q\mathbf{A}(\mathbf{r}) \quad (7)$$

式中 \mathbf{r} 是点电荷的位矢。对于坐标原点的电磁场角动量为

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{G} = \mathbf{r} \times q\mathbf{A}(\mathbf{r}) \quad (8)$$

三、Feynman 圆盘实验的解释

当切断 Feynman 圆盘实验中的线圈电流时，圆盘将获得机械角动量，它是由电磁场角动量转换而来的，该电磁场角动量是当线圈中存在电流时本已在空间中存在的，可以利用公式(8)来计算。在 Feynman 圆盘实验中，电量 q 的分布是已知的，即圆盘边缘镶嵌的 N 个带电小球，每个小球的带电量为 q ，可以看作点电荷；另外， \mathbf{A} 是中央线圈产生的磁场的势矢。计算任意线圈产生的 \mathbf{A} 是困难的，为此，一些作者对线圈产生的磁场作了不同的近似。

文献[4]假定线圈又短又小，在较远处可以把它看成是一个磁偶极子，其磁矩为

$$\mathbf{m} = nI \cdot \pi a^2 \mathbf{k} \quad (9)$$

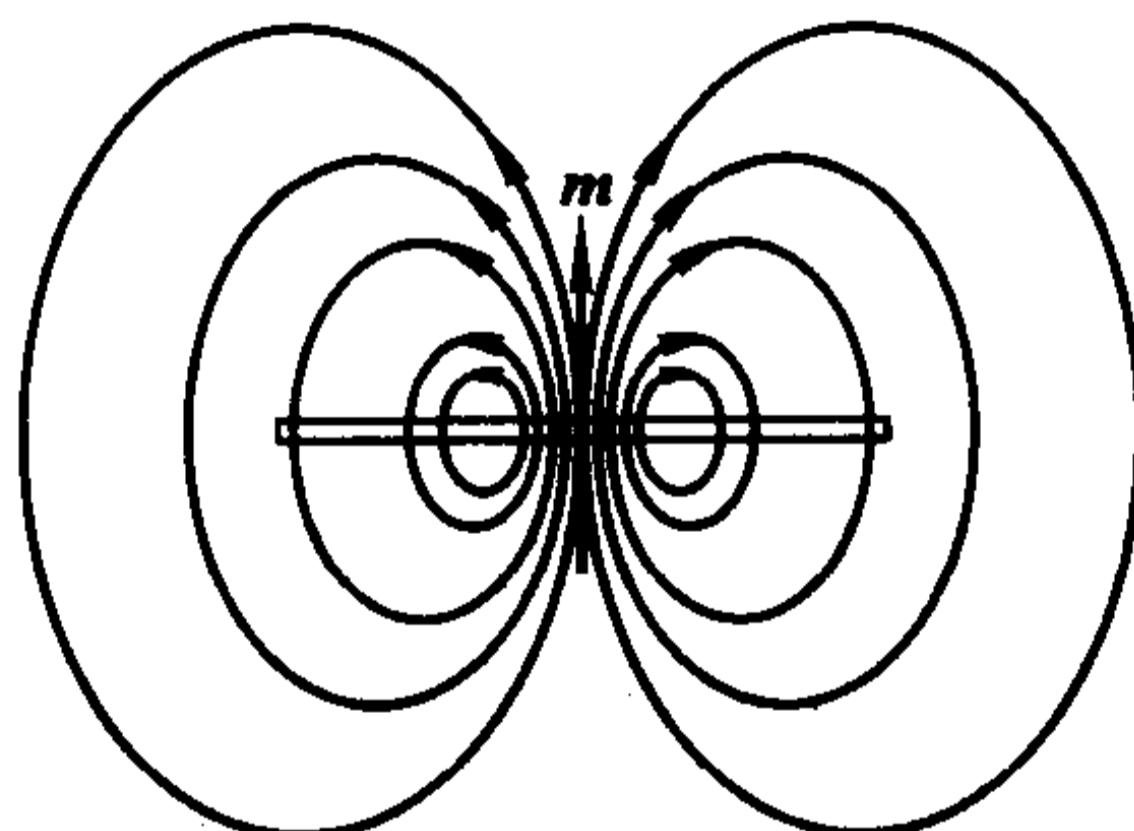
式中 n 为线圈的总圈数， a 为其半径， I 为线圈中的电流强度， \mathbf{k} 为圆盘面的单位法向矢量。设圆盘的半径为 R （即带电小球到轴的距离），并假定 $a \ll R$ ，则线圈产生的磁场的磁力线分布如图 11-4-6 所示。由于磁力线的闭合性，通过圆盘面的磁通量的大小应等于通过圆盘外平面的磁通量，但符号相反。磁矩 \mathbf{m} 在圆盘平面处产生的磁场的磁感应强度为^[5]

$$\mathbf{B} = -\frac{\mu_0 \mathbf{m}}{4\pi r^3}$$

图 11-4-6

式中 r 为场点到圆盘中心的距离。故通过圆盘的磁通量为

$$\Phi = \iint_{(\text{圆盘平面})} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = - \iint_{(\text{盘外平面})} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$



$$\begin{aligned}
 &= \frac{\mu_0 m}{4\pi} \int_R^\infty 2\pi r \frac{dr}{r^3} = \frac{\mu_0 m}{2} \int_R^\infty \frac{dr}{r^2} \\
 &= \frac{\mu_0 m}{2R}
 \end{aligned} \tag{10}$$

根据 Stokes 定理及 $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, 有

$$\oint_l \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \Phi \tag{11}$$

即

$$\oint_l \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \frac{\mu_0 m}{2R}$$

式中 \mathbf{A} 为圆盘边缘处的势矢, 它指向盘缘切向, 且大小恒定(详见本节附录), 故有

$$\begin{aligned}
 2\pi R A &= \frac{\mu_0 m}{2R} \\
 A &= \frac{\mu_0 m}{4\pi R^2}
 \end{aligned} \tag{12}$$

以上用间接方法求出了小球所在处的势矢, 也可以由 A 的定义式直接求出圆电流环的势矢分布(详见本节附录). 圆电流环在远场点的势矢为

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 \mathbf{m} \times \mathbf{r}}{4\pi r^3}$$

由公式(7), 与第 i 个点电荷 q 相应的电磁场动量为

$$G_i = qA = \frac{\mu_0 mq}{4\pi R^2}$$

由(8)式, 对圆盘中心的电磁场角动量为

$$\mathbf{L}_i = RqA = \frac{\mu_0 mq}{4\pi R}$$

或写成矢量式, 为

$$\mathbf{L}_i = \frac{\mu_0 q}{4\pi R} \mathbf{m}$$

与 N 个点电荷相应的总电磁场角动量为

$$\begin{aligned}
 \mathbf{L} &= N\mathbf{L}_i \\
 &= \frac{\mu_0 Nq}{4\pi R} \mathbf{m}
 \end{aligned}$$

把磁矩 \mathbf{m} 的公式(9)代入, 得

$$\mathbf{L} = \frac{\mu_0 N n q I a^2}{4R} \mathbf{k}$$

当切断线圈中的电流时, 上述电磁场角动量消失, 转换成圆盘的机械角动量

\mathbf{L}_M , 由角动量守恒定律,

$$\mathbf{L}_M = \mathbf{L} = \frac{\mu_0 N n q I a^2}{4R} \mathbf{k} \quad (13)$$

上述(13)式也可以用另一方法得到。当线圈电流被切断后，在磁场消失的过程中，空间激发出涡旋电场 $\mathbf{E}_{\text{涡旋}}$ ，它满足

$$\oint \mathbf{E}_{\text{涡旋}} \cdot d\mathbf{l} = - \frac{d\Phi}{dt}$$

上式的线积分沿圆盘边缘，绕行方向如图 11-4-7 所示。由上式可得

$$2\pi R E_{\text{涡旋}} = - \frac{d\Phi}{dt}$$

把(10)式代入，

$$E_{\text{涡旋}} = - \frac{1}{2\pi R} \frac{d\Phi}{dt} = - \frac{\mu_0}{4\pi R^2} \frac{dm}{dt}$$

涡旋电场作用于第 i 个小球上的力矩为

$$\mathbf{M}_i = RqE_{\text{涡旋}}\mathbf{k} = - \frac{\mu_0 q}{4\pi R} \frac{dm}{dt} \mathbf{k} = - \frac{\mu_0 qna^2}{4R} \frac{dI}{dt} \mathbf{k}$$

在电流消失过程中，在 dt 时间内涡旋电场作用在小球上的冲量矩为

$$\mathbf{M}_i dt = - \frac{\mu_0 qna^2}{4R} dI \mathbf{k}$$

由角动量定理，小球获得的角动量为

$$d\mathbf{L}_i = \mathbf{M}_i dt = - \frac{\mu_0 qna^2}{4R} dI \mathbf{k}$$

在电流消失的全过程中，小球获得的角动量为

$$\mathbf{L}_i = \int \mathbf{M}_i dt = - \frac{\mu_0 qna^2}{4R} \mathbf{k} \int_0^0 dI = \frac{\mu_0 qna^2 I}{4R} \mathbf{k}$$

圆盘获得的总角动量为

$$\mathbf{L} = N\mathbf{L}_i = \frac{\mu_0 q N n a^2 I}{4R} \mathbf{k} \quad (14)$$

此结果与(13)式相符。

(13)式是先计算电磁场角动量，再由角动量守恒定律转换成圆盘的机械角动量。(14)式是直接计算涡旋电场作用于小球(圆盘)所产生的角动量。两者的一致表明，稳态电磁场确实具有角动量，并在角动量转换过程中遵循角动量守恒定律。

设圆盘系统的转动惯量为 J ，则在切断线圈中的电流时，圆盘获得的角速

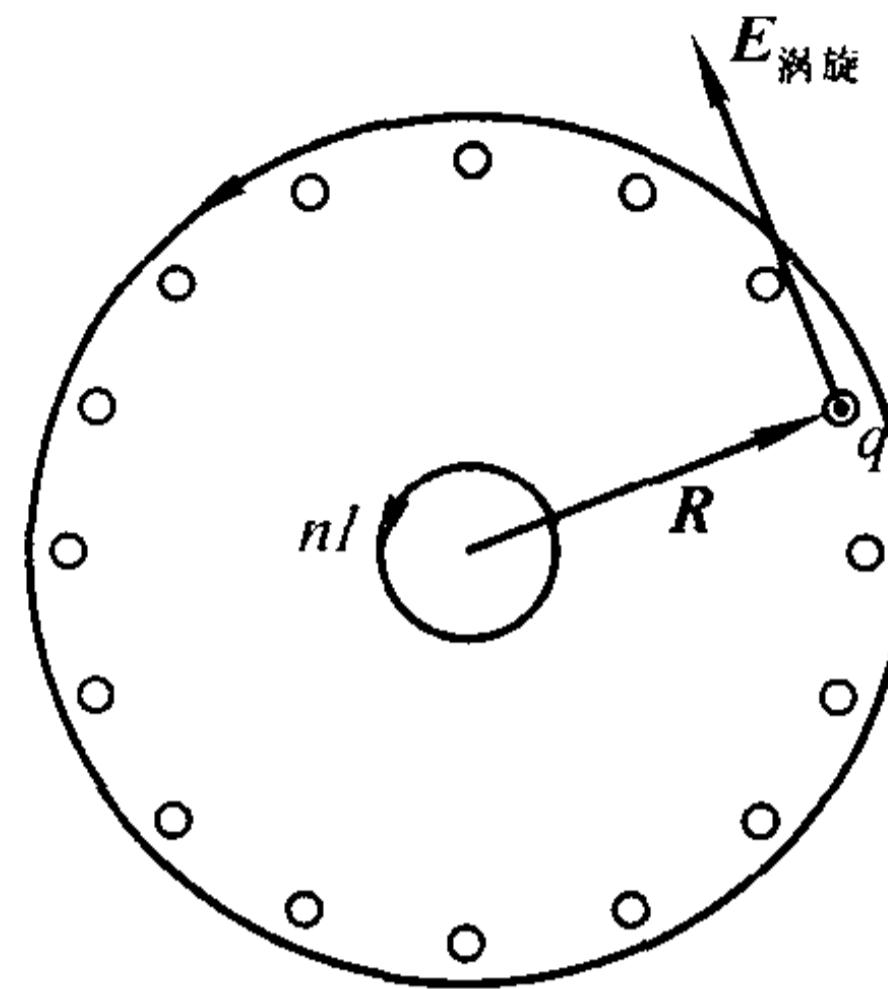


图 11-4-7

度为

$$\omega = \frac{\mathbf{L}}{J} = \frac{\mu_0 N n a^2 q I}{4 R J} \mathbf{k}$$

从圆盘上方看，圆盘将作逆时针转动。

文献[6]的作者对线圈磁场作了另一种近似。如图 11-4-8 所示，假定线圈又细又长，其半径为 a ，管内磁感应强度近似为

$$B = \mu_0 n I$$

式中 n 为线圈单位长度的匝数。管外磁场通过圆盘面的磁通量可以忽略，故通过圆盘面的磁通量为

$$\Phi = \pi a^2 B = \mu_0 n \pi a^2 I$$

根据(11)式，

$$\oint_l \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \Phi = \mu_0 n \pi a^2 I$$

线积分沿圆盘边缘。由上式得

$$2\pi R A = \mu_0 n \pi a^2 I$$

故线圈磁场的势矢为

$$A = \frac{\mu_0 n \pi a^2 I}{2R}$$

或写成矢量式，有

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 n \pi a^2 I}{2R} \mathbf{e}_\theta$$

图 11-4-8

式中 \mathbf{e}_θ 是盘缘切向单位矢量。根据(8)式，与第 i 个点电荷 q 相对应的电磁场角动量为

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_i &= \mathbf{R} \times q \mathbf{A} \\ &= \frac{1}{2} \mu_0 n \pi a^2 I q \mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_\theta \\ &= \frac{1}{2} \mu_0 n \pi a^2 I q \mathbf{k} \end{aligned}$$

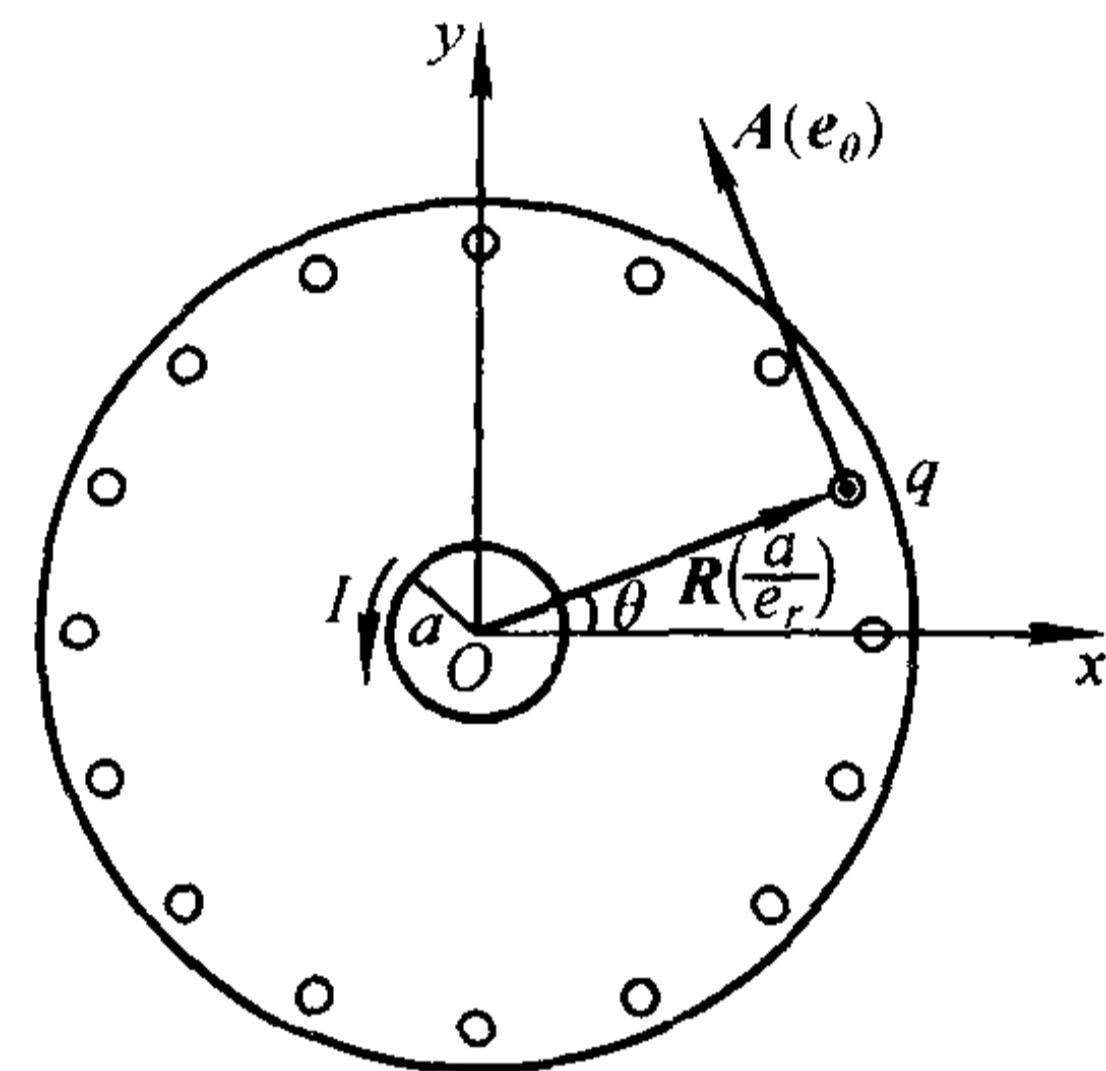
式中 \mathbf{R} 是点电荷的位矢， \mathbf{e}_r 是径向单位矢量， \mathbf{k} 为 z 轴单位矢量。与 N 个点电荷对应的电磁场总角动量为

$$\mathbf{L} = N \mathbf{L}_i = \frac{1}{2} \mu_0 N n \pi a^2 I q \mathbf{k}$$

切断线圈电流后，电磁场角动量消失，由角动量守恒定律，圆盘获得的机械角动量为

$$\mathbf{L}_M = \mathbf{L} = \frac{1}{2} \mu_0 N n \pi a^2 I q \mathbf{k} \quad (15)$$

与前述近似相仿，也可以直接计算涡旋电场施予圆盘的力矩，进而求得圆盘的



机械角动量，可以期望其结果与(15)式一致。

附录 圆电流环的势矢分布

势矢 \mathbf{A} 的定义式为

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}}{r'} dV'$$

式中 \mathbf{r} 为场点的位矢， r' 为电流密度 \mathbf{j} 所在处到场点的距离，积分遍及电流分布的区域。若电流限制在闭合导线回路中，电流强度为 I ，则

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{dl}{r'} \quad (1)$$

式中 dl 是与电流方向一致的导线线元，积分沿闭合的导线回路。

如附录图 1 所示，一圆电流环，半径为 a ，电流强度为 I ，试求远场区域势矢 \mathbf{A} 的分布。在

附录图 1 中， P 为远场点，其位矢为 \mathbf{r} ，从 P 点作直线与电流环平面垂直，连结环心 O 与垂足的直线作为 x 轴， y 轴与 x 轴均在电流环平面内， z 轴与电流环平面垂直。在电流环上 x 轴的两侧取对称的两个导线线元 dl 和 dl' ，大小相等，它们的 x 分量互相抵消， y 分量则相加，因而积分时只需考虑 dl 的 y 分量的求和即可，设线元 dl 所在处的方位角为 φ ，则

$$dl = -(ad\varphi)\sin\varphi i + (ad\varphi)\cos\varphi j$$

式中右端第一项为 x 分量，对积分结果无贡献。故 P 点的势矢为

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(a\cos\varphi d\varphi)j}{r'} \quad (2)$$

式中 r' 是线元 dl 到 P 点的距离。现将 r' 用 r 和 φ 来表示，根据余弦定理，

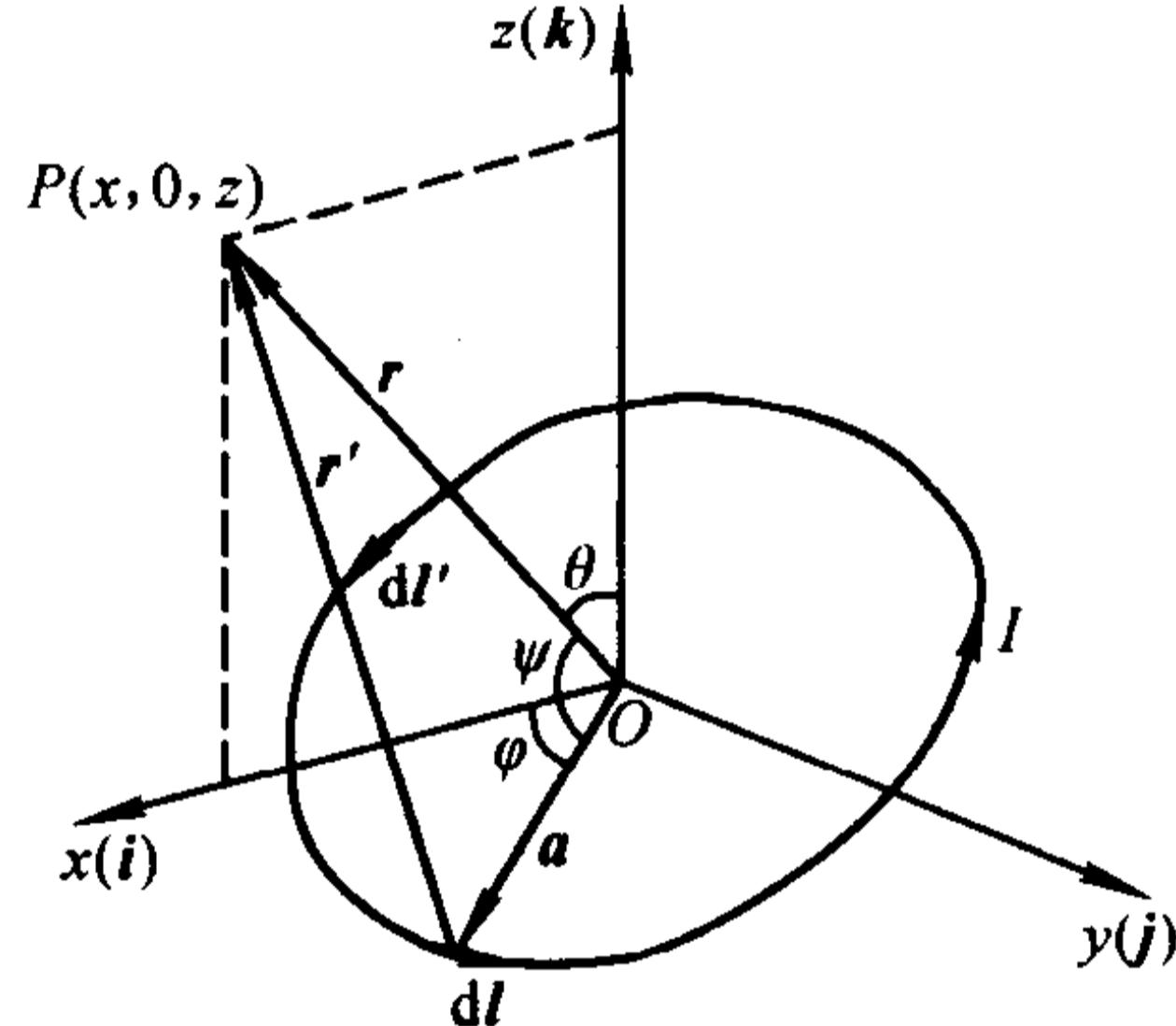
$$r'^2 = r^2 + a^2 - 2ar\cos\psi$$

式中 ψ 是 a 与 r 之间的夹角。上式可写为

$$\frac{r}{r'} = \left(1 - \frac{a^2}{r'^2} + \frac{2ar}{r'^2} \cos\psi \right)^{\frac{1}{2}}$$

因 P 是远场点，故有 $a \ll r'$, $r' \approx r$ ，上式可简化为

$$\begin{aligned} \frac{r}{r'} &\approx \left(1 - \frac{a^2}{r^2} + \frac{2a}{r} \cos\psi \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\approx 1 - \frac{a^2}{2r^2} + \frac{a}{r} \cos\psi \end{aligned}$$



附录图 1

进一步把 $\cos \psi$ 用 φ 的函数表示, 因

$$\begin{aligned}\mathbf{r} \cdot \mathbf{a} &= (xi + zk) \cdot (a \cos \varphi i + a \sin \varphi j) \\ &= xa \cos \varphi \\ \mathbf{r} \cdot \mathbf{a} &= ra \cos \psi\end{aligned}$$

故有

$$\begin{aligned}\cos \psi &= \frac{x}{r} \cos \varphi \\ \frac{r}{r'} &\approx 1 - \frac{a^2}{2r^2} + \frac{ax}{r^2} \cos \varphi\end{aligned}$$

代入(A-2)式, 得

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} a \cos \varphi \left(1 - \frac{a^2}{2r^2} + \frac{ax}{r^2} \cos \varphi \right) d\varphi \mathbf{j} \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left[\int_0^{2\pi} a \left(1 - \frac{a^2}{2r} \right) \cos \varphi d\varphi + \int_0^{2\pi} \frac{a^2 x}{r^2} \cos^2 \varphi d\varphi \right] \mathbf{j}\end{aligned}$$

上式中第一项积分为零, 第二项积分中的 x 是场点 P 的坐标, 是固定的, 故得

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= \frac{\mu_0 I \pi a^2}{4\pi r^3} x \mathbf{j} = \frac{\mu_0 I \pi a^2}{4\pi r^2} \sin \theta \mathbf{j} \\ &= \frac{\mu_0 m \times \mathbf{r}}{4\pi r^3}\end{aligned}\tag{3}$$

式中

$$\mathbf{m} = I\pi a^2 \mathbf{k}$$

为圆电流环的磁矩, \mathbf{r} 是场点 P 的位矢. (3)式就是圆电流环在远场点的势矢公式. 应用到 Feynman 圆盘实验中时, 圆盘面上位矢为 \mathbf{R} 的金属小球所在处的矢势为

$$\mathbf{A}(\mathbf{R}) = \frac{\mu_0 m \times \mathbf{R}}{4\pi R^3}$$

因 \mathbf{m} 与 \mathbf{R} 垂直, 故 \mathbf{A} 在圆盘面内并与盘缘相切, 其大小为

$$A = \frac{\mu_0 m}{4\pi R^2}$$

这就是本节三正文中的公式(12).

参 考 文 献

- [1] 陈熙谋. 大学物理, 1982 (4)
- [2] Feynman R P. 费曼物理学讲义(第二卷). 上海: 上海科学技术出版社, 1981.
§ 17-4
- [3] Calkin M G. Linear Momentum of Quasistatic Electro-magnetic Fields. Am. J. Phys., 1966 (34): 921
- [4] 丁成文. 大学物理, 1987 (10)
- [5] 赵凯华, 陈熙谋. 电磁学. 北京: 高等教育出版社, 1986. 第六章 § 2