

这里会给一些具体例子来推导一个简单的洛伦兹变换。需要说明的是，这个推导过程并不具有十分严格的意义，只是让大家能够从物理含义上看出洛伦兹变换是怎么回事。

首先，我们要给出狭义相对论的两个基本假设：

- 1、相对性原理。
- 2、光速不变原理。

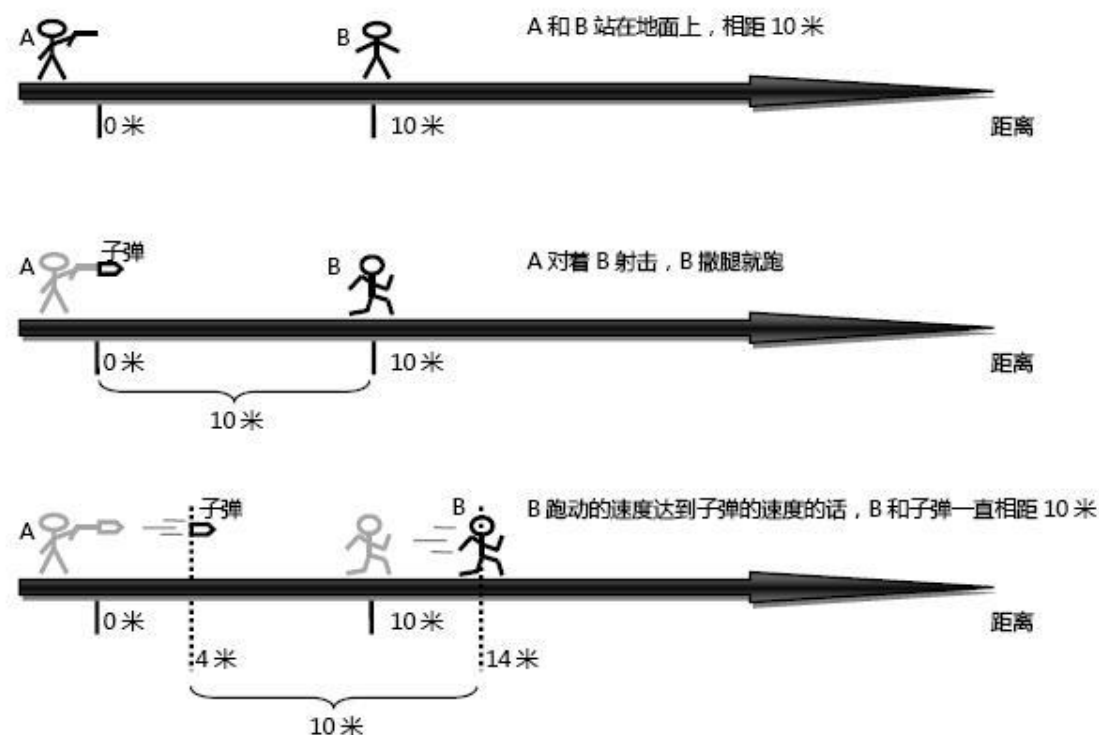
所谓相对性原理指的是一个原则，物理规律在不同的惯性参照系中，有相同的数学形式。关于这个原理，在我们这次推导过程中并没有显著地用到，这里就一笔带过吧。

这里要详细说一下光速不变原理。

光速不变原理的一个通俗的解释就是：光在任何惯性系中都有相同的速率。

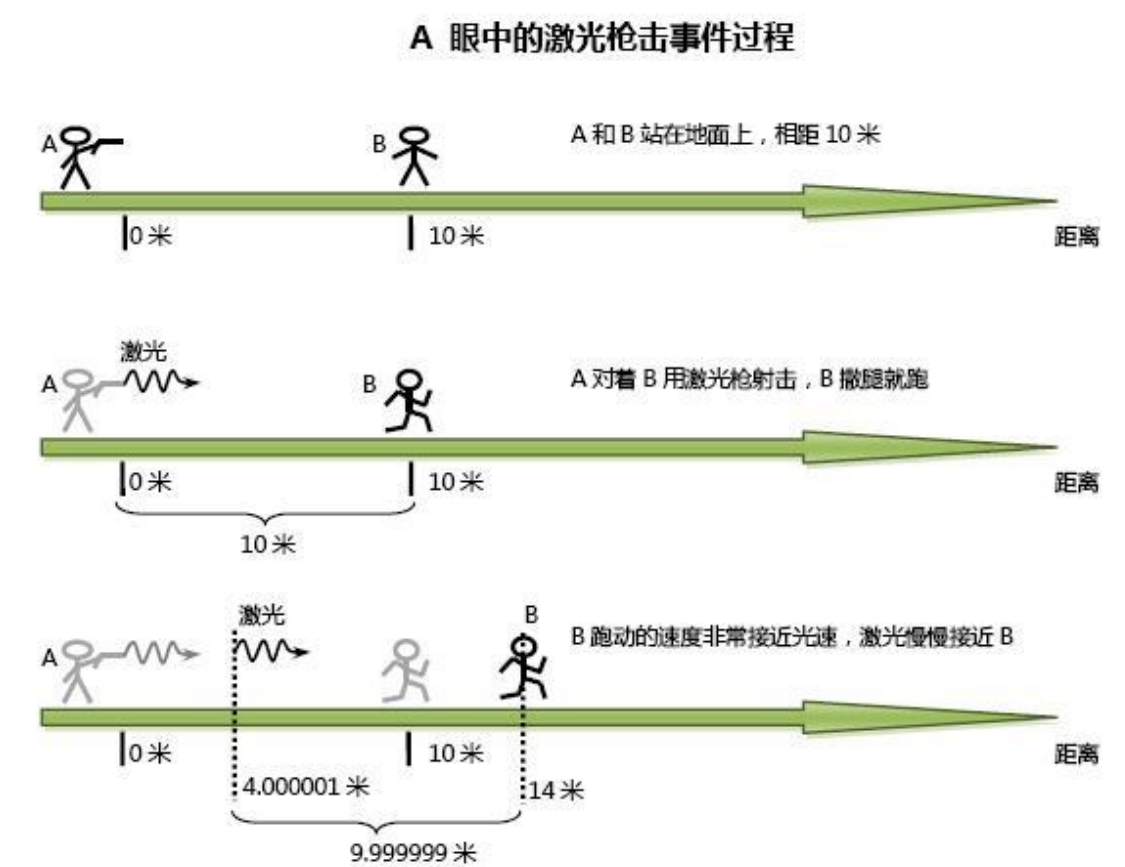
这个解释其实和我们的日常生活是有尖锐矛盾的，下面我们通过例子来详细体会一下这种矛盾到底尖锐到什么程度。

我们设想一个场景：A 和 B 两个人，A 静止在地面上，A 用一把枪瞄准了 B，在某时刻开了一枪，B 在子弹出膛的瞬间以一个恒定的速度逃跑。我们知道，如果 B 逃跑的速度非常快，要是和子弹速度一样的话，子弹是追不上 B 的，看下图。



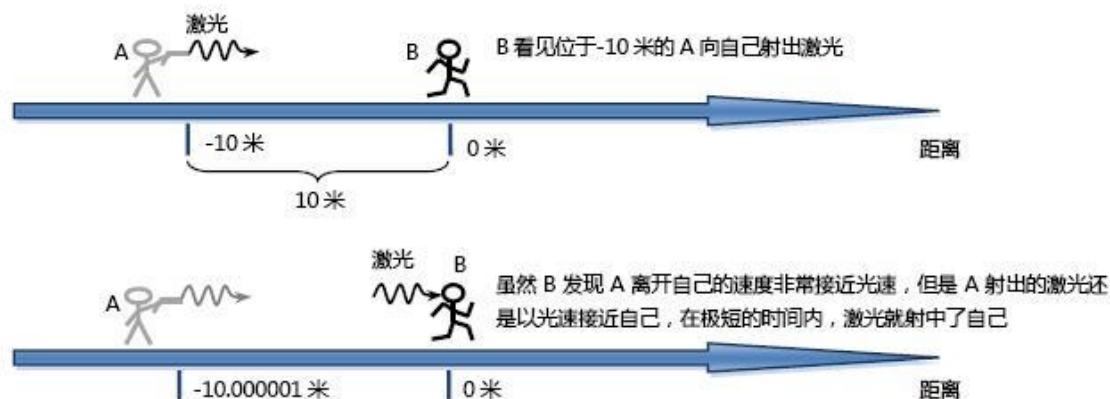
详细地考察这个过程，我们会看到是这样的：在子弹射出枪膛后的一段时间里，子弹以一个大的速度前进了一段距离（比如前进了 4 米）。而 B 则以相同的速度也前进了一段相同的距离（也前进了 4 米），子弹与 B 的间距并没有减小（一直是 10 米）。无论子弹飞了多久，子弹和 B 的间距仍然是相同的（10 米），子弹是追不上 B 的。这是我们熟悉的常识。

现在这个例子中，我们假定 A 开的是激光枪，射出的不是子弹，而是一束激光。再假定 B 逃跑的速度十分接近光速（不设 B 逃跑速度为光速，是为了避免一个混乱）。那么在地面上的 A 看来，在一段时间内，激光和 B 由于速度十分相近，所以激光慢慢地接近 B，而追上 B 则会花大量的时间。



而在 B 看来会怎么样？B 也是一个惯性系，而光速不变原理指出，激光在 B 惯性系里也是以光速前进的，所以 B 会惊恐地发现，激光在极短的时间内就击中了他。

## B 眼中的激光枪击事件过程



如果仔细对比 A 和 B 这两人对同一个过程（A 向 B 射击激光束，最后 B 被激光束击中）的观察，会发现俩人的看法具有很大的差异，在这里的巨大差异体现在两人对激光自射出枪膛到击中 B 所用的时间是完全不同的：A 发现激光束击中 B 发生在激光束被射出后的很长的一段时间后（比如 1 小时之后），而 B 却发现激光束自被射出到射中自己，花了连 1 微妙都不到的时间。这是多么不可思议的事情？对于同一个过程，两个处在不同运动状态的观察者，居然会有截然不同的描述。

我们现在把这个例子中的 AB 初始间距拉得长一点，比如 300 万公里。于是在 B 的眼里，自激光发射到击中 B 的过程中，B 竟然还享受了人生最后的一根烟。他抽这根烟，花了 10 秒钟。那么 A 怎么看呢？很明显，A 发现激光击中 B，和 B 抽完那根烟是同时同地发生的事情。而 A 发现激光束追到 B 花了 1 个小时的时间，那也就是说，A 发现 B 的这根烟，抽了 1 个小时。A 发现 B 抽烟的速度很慢，不但如此，A 还发现 B 做任何事情的速度都很慢，比如点烟、心跳、呼吸等，都极其缓慢。同样，A 也发现 B 手上的手表指针也走得很慢很慢。这是什么？这就是“时间膨胀”：A 发现 B 惯性系中的时间，走得比 A 自己要慢。

这在我们日常经验中是不可思议的，然而光速不变原理指出，事情就是这样的。

现在的情况是这样的：我们假设光速不变是正确的，而这个假设成立，则意味着传统的关于空间距离和时间间隔的关系（两者独立无关）再也不能成立了，否则就会出现上述这种百思不得其解的结果。那么也就是说，假设光速不变成立，那么我们就必须寻找一种新的空间距离和时间间隔之间的关系，使得在这种新的关系下，光速不变成立。

原有的空间距离和时间间隔的关系就是牛顿力学中的那一套：同一个空间距离在不同的观察者眼里都是相同的；同一个时间间隔在不同观察者眼里也是相同的。也就是说，任何空间距离和时间间隔都是不变量，与观察者的位置、时间和运动速度都无关。

很显然，按照这套我们熟知的关系，对上面这个例子是完全无法解释的，也就是说，牛顿的那套时空关系，与光速不变假设是你死我活地彻底对立的。

爱因斯坦在他的一篇论文《相对性原理及其结论》中有这么一句话：“现在我们假设，在坐标系没有加速的前提下，这些钟可以这样来校准，使得真空中任何光线的传播速度 -- 用这些钟来量度 -- 总是等于一个普适常数  $c$ ”。

这句话是在 100 年前说的，其中的一些用词与现在的用词有一些差异。这里我尝试下用现在的用词重复一遍：“现在我们假设，在参考系没有加速的前提下，这些钟可以这样来校准，使得真空中任何光束的传播速度——用这些钟来测量——总是等于一个恒定的常数  $c$ ”。在这里，没有被加速的参考系就是惯性系。而句中的“钟”十分耐人寻味，在这里其实就代表了“对时间的测量”。

这句话的意思就是：原有的校准钟的方式是无效的，因为用按照原有的校准方式的钟，我们无法让光束在任何惯性系中的传播速度保持一个恒定的常数。我们要寻找一种新的校准方式，也就是新的空间距离和时间间隔的关系。

而新的关系下，上面这个例子应该是十分标准的一种现象了：在一个观察者眼里具有极其漫长的过程，而在另一个观察者眼里却是一瞬间完成。从这里可以看出，时间在不同观察者中不再有统一的测量了，不同观察者可以有不同的时间。

现在的问题就成为了一个“解答题”：已知存在一种时空关系，可以使得上述这个按照寻常思维会感到匪夷所思的光速不变例子合理地成立，求这个时空关系。

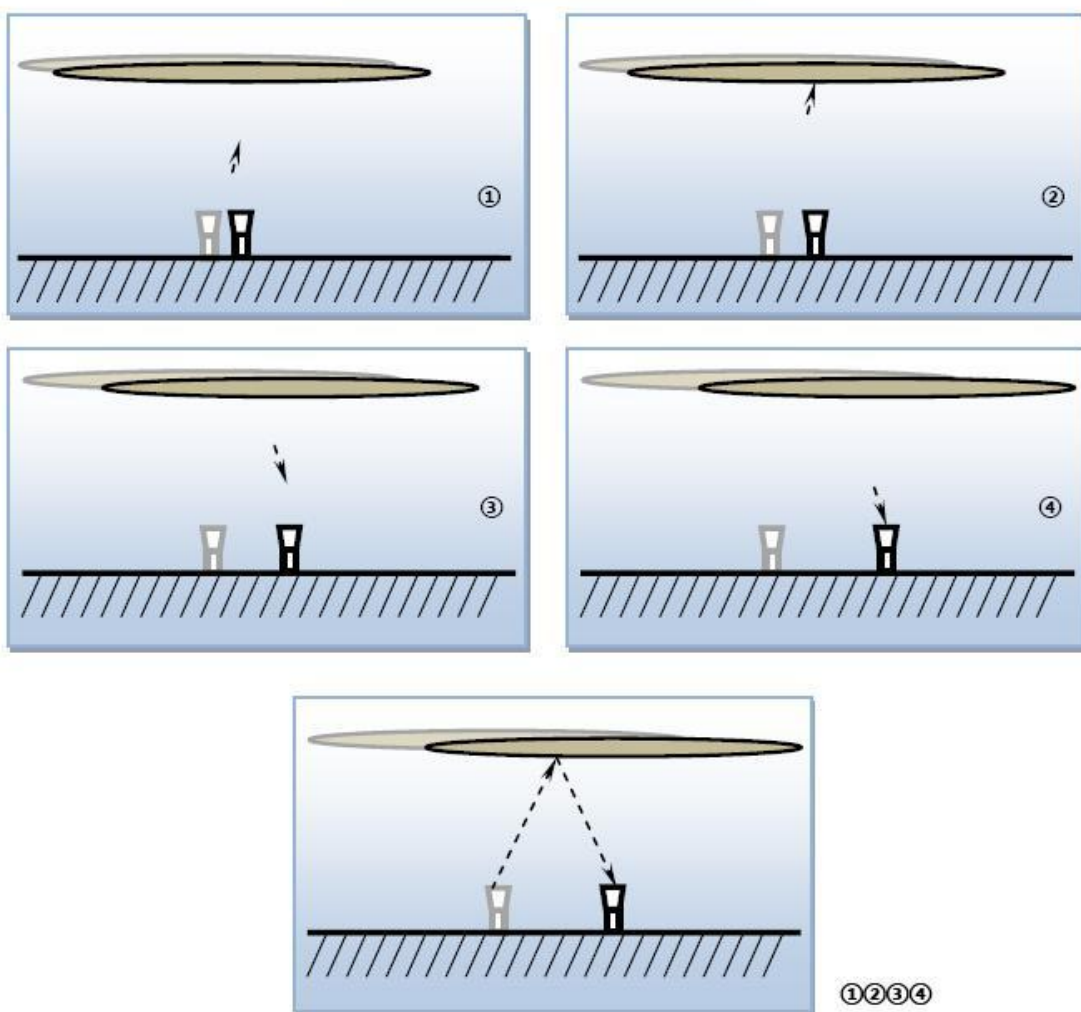
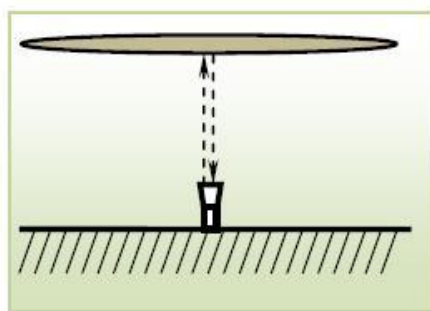
答案很明显，新的时空关系就是洛伦兹变换方程组。

我们接着看下面这个例子：

在一个地面上竖着放着一个手电筒，地面上方有一个水平放置的镜子。在某一时刻打开手电筒，光束从手电筒出发，到达镜子后反射，最后回到手电筒。整个过程中，光束的运动轨迹位于同一直线上。这个过程很清晰，但我们要指出的是，这是一个站在地面上与手电筒相对静止的观察者的观察结果。

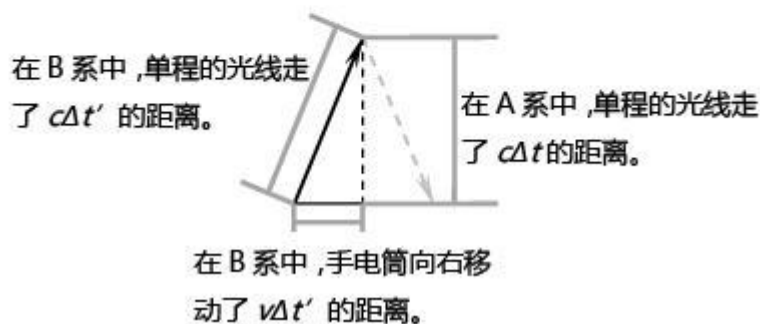
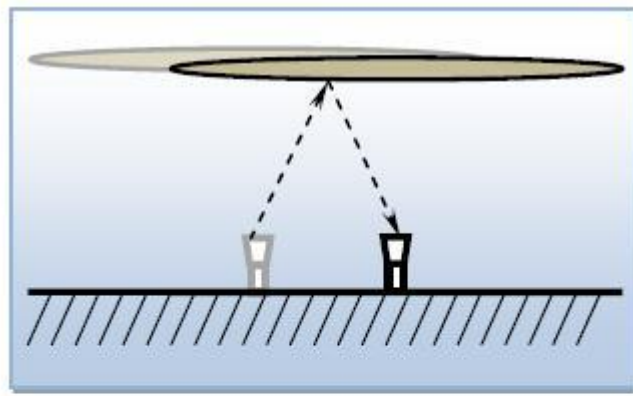
如果有一个以一定速度向左边运动的观察者，他会发现什么呢？

他会发现，地面、手电筒和镜子全部以一个速度向右边运动，手电筒发射出去的光线也同样有一个向右边的运动分量。最终这束光线的运动轨迹为一个三角形，如下图①②③④。



仔细观察①②③④这个过程，会很有意思的。在这里要运用光速不变原理，也就是说，在一个运动观察者眼里，走三角形长边轨迹的光束，其速度还是光速。想一想，在地面静止观察者眼里，垂直上下的光线速度是光速  $c$ ；在运动观察者眼里，多了一个水平分量后的光的“合速度”，还是光速  $c$ ，而垂直方面的速度，显然比光速  $c$  要小一些！产生这个奇怪现象的原因是什么？就是“时间膨胀”：向左运动的观察者发现，地面惯性系的时间走得慢了，光线在垂直方面的速度也变慢了。可是光线的整体速度，由于还存在一个水平速度，还是保持着原来的光速  $c$ 。

现在来定量地看看，这其中的一系列因素之间的关系是什么。在这里设  $A$  系中光线从手电筒到达镜子经过了  $\Delta t$  时间，在  $B$  系中光线从手电筒到达镜子经过了  $\Delta t'$  时间。



这就是一个关于俩惯性系中各自时间的变换公式。根据这个求出的变换公式，可以保证光速在两个惯性系中保持同一个恒定的数值  $c$ 。很显然，这就是一个符合要求的关于时间的变换公式。

让我们仔细看看这个公式。 $\Delta t$  指的是地面观察者所计量的光束从手电筒到镜子这个过程所花费的时间； $\Delta t'$  是向左运动观察者所计量的这个过程的时间。等号右边分母的值永远是一个小于 1 的正数，所以等号右边的数值总比  $t$  要来得大。这意味着的相同一个过程，相对静止的观察者所测量到的时间间隔，总比相对运动观察者所测量到的时间间隔要小一点。或者反过来说，运动观察者对一个静止过程的时间间隔的计数，总比相对静止观察者对这个过程的时间计数要大，也就是运动观察者的时间膨胀了。

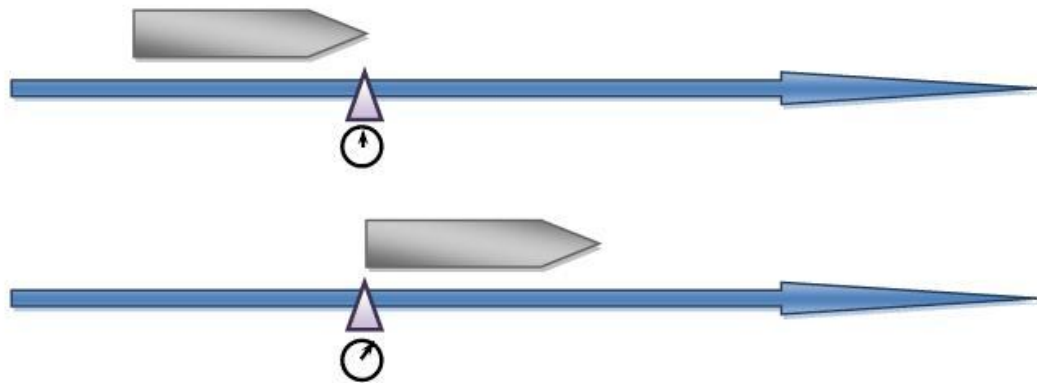
需要注意的是，在这个推导的模型中，我们对两个观察者有很多的约定，比如：我们约定在手电筒发射光束的瞬间，两个观察者都位于手电筒的位置。我们还约定在这个瞬间，两人手表的指针都指着同一个刻度（在去掉  $\Delta$  的模型中，都指着 0 时刻）。我们还约定，运动观察者向左运动，而没有垂直方向上的运动。这些约定都导致了我們得到的这个变换公式具有最最简单的形式。如果我们放宽其中的一个约定，比如第一个约定，也就是说我们假设手电筒与地面观察者有一个距离，并假设向左运动观察者在手电筒发射光束的瞬间，与地面观察者在同一个位置，那么我们得到的变换公式要稍微复杂一些，等号右边的分子部分不再是简单的  $t$ ，而是一个稍微复杂点的与距离  $x$  有关的算式。

为了了解洛伦兹变换的本质，我们忽略了这些非本质的因素，也就是假定了那些约定，使得时间变换关系的导出显得更接近题意。从这个推导过程可以看出，为了满足光速不变这个假设，我们必须抛弃原来的那种时间观念。原来我们总认为，时间与距离是没有关系的，任何距离，对时间的测量都是可以保证统一的（这个我们称之为“绝对时间观”）。但现在看来，这个结论是无法保证光速不变的。只有改变我们对绝对时间的观念，才能保证光速不变。

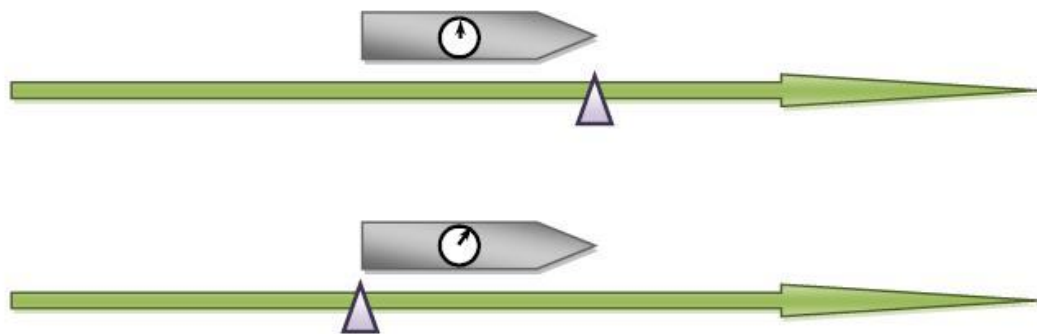
好，现在我们继续看看空间距离会不会也有这样的变换？

这里要说说如何测量一个物体的长度。

测量一个物体的长度有很多方法，其中有一个非常简单的方法，如下：我们在这个物体经过的方向上设立一个地面静止观察者，在物体的前端到达观察者的时候，观察者按下秒表，秒表开始计数。在这个物体的尾端到达观察者的时候，观察者再次按下秒表，秒表停止计数。这样我们就得到了这个物体经过观察者所需要的时间。把这个时间乘以这个物体的速度，就得到了这个物体的长度。



同样，我们以这个物体为参照系，就会发现这个地面观察者和他手中的秒表，以一个速度从车头向车尾方向运动。



这时候，物体上的观察者也可以根据地面观察者到达车头和车尾分别计时，以此来乘以速度来得到物体的长度。

按照牛顿时空观，这两种方法测量出来的长度是完全相同的。然而，如果用满足光速不变的新的时空关系来看，这两个长度是不相等的。为什么？因为地面观察者的时间，和物体观察者的时间是不同的，而两者所观察到的相对速度，数值上是相等的（方向相反）。

我们设以地面为参照系的时候，物体的头、尾相继经过地面观察者的时刻差为  $\Delta t$ 。那么地面观察者得到该物体的长度就是  $l = v \times \Delta t$ 。可是那个物体上的时间变慢了，这段过程对应的时间间隔，在物体上是  $\Delta t'$ ，并满足  $\Delta t' = \gamma \times \Delta t$  的关系，其中  $\gamma = 1 / \sqrt{1 - v^2 / c^2}$ 。就如上面所说的， $\Delta t'$ 总是比  $\Delta t$  要大一些，也就是说，物体上的观察者所测量到的该物体的长度  $l' = v \times \Delta t' = v \times \gamma \Delta t = \gamma \times l$ ，总比地面观察者测量的长度要大一些。反过来说，地面上测量到的该物体的长度，总比该物体上所测量到该物体的长度要短一些。总结这个结论，就有：测量相对运动物体的长度，总比测量相对静止的相应物体的长度要短一些。

如果我们把参照系的原点放在该物体的尾部，那么该物体头部的位置就是该物体的长度值。这样我们就可以把公式中的  $\Delta$  去掉了： $x' = vx$ 。这样做的意义就是我们得到了一个空间距离的变换公式，这个公式和时间变换公式一起，构成了一个新的时空关系，这个新的时空关系可以保证光速不变成立。

同样需要说明的是，这个推导过程中所用到的模型，也有那些特定的约束。所以得到的变换公式只适用于满足那些特定约束的参考系。而那些放宽了约束的参考系之间的变换关系，比如假设物体的运动方向并不是水平的，而是与水平有一个角度，那么变换方程式将复杂一些。但这并不影响我们理解“为何空间距离会在不同惯性系中有不同的测量值”这个问题。

在这里给出稍微比上面那些例子放宽了约束条件的新的时空变换方程。惯性系之间的约束条件为：

- 1、我们有两个惯性系 K 和 K'，两者的 x 轴和 x' 轴是重合的，y 和 y' 轴、z 和 z' 轴相互平行。
- 2、惯性系 K' 相对于惯性系 K 有一个速度，这个速度的方向平行于 K 和 K' 的 x 轴，并指向 x 增大的方向。
- 3、在某时刻，K 系原点 O，和 K' 系原点 O' 相互重合，同时两个各自位于各自原点的钟表的读数都为 0 时刻。
- 4、考察的事件位于 x 轴或者 x' 轴上，但并不一定是原点。（就放宽了这个条件）

这时的新时空变换关系是：

$$\begin{cases} x' = \frac{x + vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \frac{t + \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{cases} \quad \text{以及} \quad \begin{cases} x = \frac{x' - vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \frac{t' + \frac{vx'}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{cases}$$

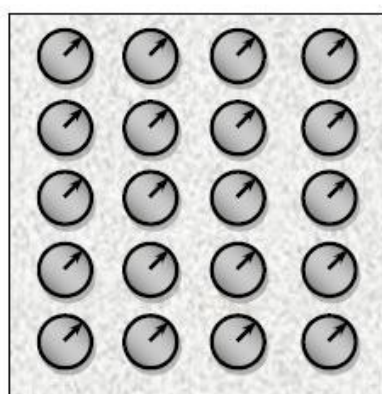
这套时空变换称作“洛伦兹变换”。

作为对比，在这里也给出老式的“伽利略变换”：

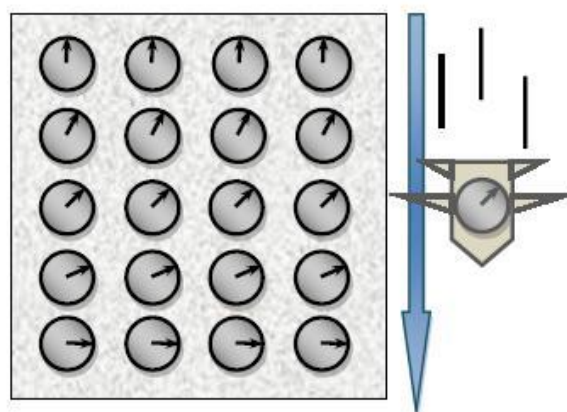
$$\begin{cases} x' = x + vt \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases} \quad \text{以及} \quad \begin{cases} x = x' - vt \\ y = y' \\ z = z' \\ t = t' \end{cases}$$

到这里我们可以知道，洛伦兹变换是一个为了保证光速不变成立而求得的时空变换。这个变换与我们日常所熟悉的时空观最大不同点在于：时间的变换居然与空间坐标有关，而我们的常识是：时间的变换与空间坐标无关（老式的时间变换是： $t'=t$ ）。

这意味着不同地点的运动惯性系的时间值是不一致的。比如在地面惯性系中，我们可以让不同地点的钟表始终同步、同值地走动；而在一个飞机上看这些钟表，会发现与飞机距离越近的钟表，与飞机自身的钟表读数相差越小，相反，离开飞机越大的地面钟表的读数，与飞机上的钟表读数相差越大。下图是一个俯视示意图：



漂浮在大地上空的观察者发现大地上的时钟同步、同值地走动着。



而飞经该大地的飞机上的观察者，发现大地上的时钟不再同步同值地走动着。在飞行速度方向上，离开飞机越近的时钟，读数与飞机上时钟读数越靠近；越远，差异越大。

最后说一句：造成时间膨胀、长度缩短的根本原因在于，新的时空变换意味着同时发生的事情不再是所有惯性系中的共识了。一个惯性系认为是同时发生的两件事情，另一个惯性系中并不这么认为。这就是“同时的相对性”。只有某惯性系中发现“同一地点同时发生”的两个事件，才能够在所有的惯性系中都认为是同时同地发生的。