第 45 卷 第 4 期　　应 用 数 学 学 报　　Vol. 45 No. 4
2022 年 7 月　　ACTA MATHEMATICAE APPLICATAE SINICA　　July, 2022

稀疏图与系列平行图的列表动态染色 *

张 欣 †　　李 艳

(西安电子科技大学数学与统计学院，西安 710071)

(†E-mail: xzhang@xidian.edu.cn)

摘　要　图的 (列表) 动态染色模型可用于解决信道分配中的一些关键问题，是图论和理论计算机科学领域的一个重要的研究方向． Kim 和 Park (2011) 给出了任何最大平均度小于 8/3 的图的列表动态色数至多为 4 的证明．然而，由于具有 5 个顶点的圈 C_5 的最大平均度为 2 且列表动态色数为 5, 因此 Kim 和 Park 的上述结论是错误的．基于此，本文证明了任何最大平均度小于 8/3 的普通图 (每个连通分支都不与 C_5 同构的图) 的列表动态色数至多为 4, 且该上界 4 是最优的，从而对 Kim 和 Park 的结果进行了修正．与此同时，本文证明了如果图 G 是系列平行图，则当其是普通图时，其列表动态色数至多为 4, 且该上界 4 是最优的，当其不是普通图时，其列表动态色数恰好为 5, 从而将 Song 等人 (2014) 的结果 “任何系列平行图的列表动态色数至多为 6” 进行了改进.

关键词　信道分配问题；动态染色；列表染色；最大平均度；系列平行图

MR(2010) 主题分类　05C15; 05C10

中图分类　O157.5

1　引言

信道分配问题是指将信道分配给无线电发射器，以避免信道之间的相互干扰和通信链路故障．一般而言 [1], 如果两个无线电发射器是比较接近的，则它们将被分配不同的信道，而如果两个无线电发射器是非常接近的，则它们将被分配不相邻的信道．如果用图 G 的顶点表示无线电发射器，图 G 的边表示两个无线电发射器之间的通信链路，则两个比较接近的无线电发射器对应于图 G 中两个距离为 2 的顶点，两个非常接近的无线电发射器对应于图 G 中两个相邻的顶点．如果用 $0,1,\cdots,k$ 表示待分配的信道 (相邻的信道指的是具有相邻代码的两个信道，如信道 0 与信道 1), 则信道分配问题可转换

本文 2020 年 9 月 4 日收到．2021年 3 月 10 日收到修改稿.

* 国家自然科学基金面上基金 (11871055), 西安市科协青年人才托举计划 (2018-6), 国家留学基金委公派留学 (访问学者)(201906965003) 资助项目.

† 通讯作者.

为图 G 的顶点标号问题，即对于图 G 中的任何点 w, 从 $\{0,1,\cdots,k\}$ 中选择某个元素 $c(w)$ 对其进行标号，使得当 $uv\in E(G)$ 时，有 $|c(u)-c(v)|\geq 2$, 当 u 和 v 之间的距离是 2 时，有 $|c(u)-c(v)|\geq 1$. Yeh [2] 将这种顶点标号问题称为图的 $L(2,1)$- 标号问题. 之后，Griggs 和 Yeh[3] 又将此问题扩展为图的 $L(p,q)$- 标号问题. 其中，当 $p=q=1$ 时，它对应的是要求比较接近或者非常接近的两个无线电发射器被分配不同的信道的 $L(1,1)$- 标号问题，而此类问题在无线网络通信中也有着广泛的应用. 事实上， $L(1,1)$- 标号问题的要求比 $L(2,1)$- 标号问题中的要求要弱，这也是出于节约成本考虑的. 基于同样的考虑，可以继续弱化 $L(1,1)$- 标号问题中的要求，即将 “比较接近的两个无线电发射器被分配不同的信道 “这个要求弱化为 “允许比较接近的两个无线电发射器被分配相同的信道，但是禁止与无线电发射器非常接近的若干无线电发射器被分配相同的信道 (以避免信道封锁)”. 有意思的是，这个新要求可以用理论计算机科学中的动态染色模型进行刻画 [4], 而图的动态染色也是本文研究的主要内容.

本文用 $V(G),E(G),\Delta(G)$ 和 $\delta(G)$ 分别表示图 G 的顶点集，边集，最大度和最小度，用 $d_G(x)$ 表示顶点 $x\in V(G)$ 在图 G 中的度 (在不引起歧义的前提下，一般简写为 $d(x)$), 用 C_n 和 K_n 分别表示具有 n 个顶点的圈和完全图. 图 G 的 最大平均度$\mathrm{mad}\,(G)$ 为图 G 的所有子图的平均度的最大值，即

$$\mathrm{mad}\,(G)=\max\{2|E(H)|/|V(H)|\ \big|\ G\supseteq H\neq\emptyset\}.$$

如果图 H 可以通过从图 G 中删除点，删除边或者收缩边 (将图的一条边两个端点收缩为一个点) 的方式得到，则称图 H 是图 G 的一个 子式. 本文出现的其余定义或符号均参照 [5,6].

图 G 的 正常 k- 染色 是指使用 k 种颜色对图 G 的顶点进行染色，使得图 G 中任意两个相邻的点所使用的颜色不相同. 图 G 的 动态 k- 染色 是满足以下两个条件的染色： (1) 它是图 G 的正常 k- 染色 (2) 对于任意度数至少为 2 的点 v, 其邻点集至少关联两种颜色. 图 G 的 色数$\chi(G)$ 或 动态色数$\chi_d(G)$ 分别是使得图 G 具有正常 k- 染色或动态 k- 染色的最小整数 k. 显然， $\chi(G)\leq\chi_d(G)$. 在完全图 K_n 中的每条边上插入一个点 (即将每条边用一条长度为 2 的路代替) 所得到的图称为 K_n 的 2- 细分图. 容易验证，K_n 的 2- 细分图的色数为 2, 但是其动态色数为 n. 这表明 $\chi_d(G)$ 和 $\chi(G)$ 之间的差值可以任意大.

著名的四色定理表明任何平面图的色数最多为 4. 利用四色定理， Kim, Lee 和 Park[7] 证明了任何异于 C_5 的平面图的动态色数最多为 4 (注： $\chi_d(C_5)=5$). 该结果又被 Kim, Lee 和 Oum[8] 推广至不含 K_5- 子式的图，即任何异于 C_5 的不含 K_5- 子式的图的动态色数最多为 4.

2009 年，Akbari, Ghanbari 和 Jahanbekam[9] 提出了列表动态染色的概念. 首先，对于图 G 的任意顶点 v, 赋予其一个以颜色为元素的集合，称为顶点 v 的 颜色列表, 记为 $L(v)$. 如果图 G 存在一个动态染色 c, 使得 $c(v)\in L(v)$, 则称图 G 是 动态 L- 可染 的，同时称 c 为图 G 是 动态 L- 染色. 如果对于任意 长度为 k 的列表L(即对于任意 $v\in V(G)$, 都有 $|L(v)|=k$), 图 G 都是动态 L- 可染的，则称图 G 是 动态 k- 可选 的. 图 G 的 列表

动态色数$ch_d(G)$ 是使得图 G 是动态 k- 可选的的最小整数 k.

2011 年， Kim 和 Park[10] 证明了平面图的列表动态色数最多为 6, 之后该上界被 Kim, Lee 和 Park [7] 降为 5. Kim 和 Park[10] 还证明了如果图 G 满足 $\mathrm{mad}\,(G) < 8/3$, 或者图 G 是围长至少为 7 的平面图，则其列表动态色数最多为 4, 并说明了该结论中所涉及的两个界 8/3 和 7 都是最优的的. 然而，由于 C_5 的最大平均度为 2 且列表动态色数为 5[9], 因此 Kim 和 Park 的上述第一个结论是错误的.

如果一个图的每个连通分支都是异于C_5 的 (即与 C_5 不同构), 则称其为 普通图, 否则称其为 特殊图. 本文证明如下结论，其说明了特殊图是 Kim 和 Park 的上述结果中仅有的一系列反例.

定理 1 如果图 G 是满足 $\mathrm{mad}\,(G) < 8/3$ 的普通图，则 $ch_d(G) \le 4$, 并且此处的两个上界 8/3 与 4 都是最优的.

另一方面， Song 等人 [11] 于 2014 年证明了系列平行图 (即不含 K_4- 子式的图) 的列表动态色数最多为 6. 本文将证明如下结果，改进 Song 等人的结果.

定理 2 如果图 G 是系列平行图且是普通图，则 $ch_d(G) \le 4$, 并且此处的上界 4 是最优的.

由于特殊图是以 C_5 为连通分支的，并且 C_5 的列表动态色数为 5, 从而结合定理 1 与定理 2 可得到如下更加完善的结论：

定理 3 如果图 G 是满足 $\mathrm{mad}\,(G) < 8/3$ 的图或者系列平行图，则

$$ch_d(G)\begin{cases} \le 4, & \text{如果图 } G \text{ 是普通图;} \\ = 5, & \text{如果图 } G \text{ 是特殊图.} \end{cases}$$

2 定理 1 与定理 2 的证明

引理 1[9]

$$ch_d(C_n) = \begin{cases} 3, & n \equiv 0 \ (\mathrm{mod}3); \\ 4, & n \not\equiv 0 \ (\mathrm{mod}3) \text{ and } n \neq 5; \\ 5, & n = 5. \end{cases}$$

引理 2 如果图 G 的最小度至少为 2 且图 G 中度数为 2 的顶点的邻点的度数至少为 4, 则 $\mathrm{mad}\,(G) \ge 8/3$.

证 假如该结论不成立，即 $\mathrm{mad}\,(G) < 8/3$, 则

$$\sum_{v \in V(G)} (d(v) - 8/3) < 0. \tag{1}$$

对于图 G 的任意点 v, 赋予其初始权值 $\omega(v) = d(v) - 8/3$. 设 $\omega'(v)$ 为点 v 在执行如下权转移规则后的最终权值.

(R) 如果 $uv \in E(G)$ 且 $d(u) = 2$, 则点 v 给点 u 值 1/3.

如果 $d(v) = 2$, 则由 (R) 知 $\omega'(v) = 2 - 8/3 + 2/3 = 0$. 如果 $d(v) = 3$, 则 v 与度数为 2 的顶点不相邻，从而 $\omega'(v) = \omega(v) = 3 - 8/3 = 1/3$. 如果 $d(v) \ge 4$, 则 v 最多与 $d(v)$ 个

度数为 2 的顶点相邻，从而由 (R) 知 $\omega'(v) \geq d(v) - 8/3 - d(v)/3 = (2d(v)-8)/3 \geq 0$. 综上所述，

$$\sum_{v \in V(G)} \omega(v) = \sum_{v \in V(G)} \omega'(v) \geq 0, \tag{2}$$

与 (1) 矛盾．证毕.

引理 3[12] 任何系列平行图 G 都含有以下构型之一：

(a) 度数最多为 1 的顶点；

(b) 边 $uv \in E(G)$, 其中 $d(u)=2, 2 \leq d(v) \leq 3$;

(c) 长度为 4 的圈 $uxvyu$, 其中 $d(v)=d(u)=2$;

(d) 具有公共顶点的的两个三角形 $uwxu$ 和 $vwyv$, 其中 $d(v)=d(u)=2,\ d(w)=4$.

引理 4 设图 G 是一个普通图且存在一个长度为 4 的列表 L, 使得图 G 不是动态 L-可染的，但是图 G 的任何普通的真子图都是动态 L- 可染的，则：

(1) G 是连通图；

(2) $\delta(G) \geq 2$;

(3) G 不是一个圈；

(4) G 中任何两个度数为 2 的顶点不相邻；

(5) 若图 G 包含一个 4 圈 $uxvyu$ 且 $d(u)=2$, 则 $d(v) \geq 3$;

(6) 若 $uv \in E(G)$ 且 $d(u)=2$, 则 $d(v) \geq 4$;

(7) G 不包含具有公共顶点的的两个三角形 $uwxu$ 和 $vwyv$, 其中 $d(v)=d(u)=2,\ d(w)=4$.

证 (1) 假设图 G 至少包含两个连通分支．由于 G 是普通图，它的任一连通分支均不是 C_5, 因此它的任一连通分支动态 L- 可染的．将图 G 的每个连通分支的动态 L- 染色合并起来即可得到图 G 的动态 L- 染色，矛盾．因此，在接下来的证明中都将承认 G 是连通的.

(2) 假设存在 $uv \in E(G)$ 且 $d(u)=1$. 如果 $G-\{u\}$ 是普通图，则其具有一个动态 L- 染色 c. 如果 $d(v) \leq 1$, 则图 G 即为 K_2, 显然是动态 L- 可染的，矛盾，从而 $d(v) \geq 2$. 此时，令 $c(u) \in L(u) \setminus \{c(v), c(w)\}$ (这里 w 为 v 的不同于 u 的另一个邻点), 则将 c 扩充到了图 G 的动态 L- 染色，矛盾．如果 $G-\{u\}$ 是特殊图，则由 G 的连通性可知， $G-u$ 是一个长度为 5 的圈，记其为 $vwxyzv$. 因此，图 G 是一个具有 6 个顶点的图，其中 $d(w)=d(x)=d(y)=d(z)=2$. 依次取 $c(w) \in L(w)$, $c(x) \in L(x) \setminus \{c(w)\}$, $c(y) \in L(y) \setminus \{c(w), c(x)\}$, $c(v) \in L(v) \setminus \{c(w), c(x), c(y)\}$, $c(z) \in L(z) \setminus \{c(v), c(x), c(y)\}$, $c(u) \in L(u) \setminus \{c(v), c(z)\}$, 则构建了图 G 为动态 L- 染色 c, 矛盾.

(3) 假设 G 是一个长度为 n 的圈，则 $n \neq 5$, 从而由引理 1 可知，其列表动态色数至多为 4, 因此图 G 的动态 L- 可染的，矛盾.

(4) 假设存在 $uv \in E(G)$ 且 $d(u)=d(v)=2$. 令 u_1 与 v_1 分别为 u 与 v 的另一个邻点．如果 $u_1=v_1$, 则 u_1 的度数至少为 3 (否则 G 是一个长度为 3 的圈，与 (2) 矛盾). 如果 $u_1 \neq v_1$, 则选择一条关联 u 和 v 的，且内点 (一条路上除去两个端点外的所有顶点均称为内点) 的度数全为 2 的最长路 P. 因为 $\delta(G) \geq 2$ 且 G 不是一个圈，则 P 的两个端

点中至少有一个的度数至少为 3. 因此，无论上述何种情况，总能在图 G 中找到一条路 xyy_1 使得 $d(x)=d(y)=2$ 且 $d(y_1)\ge 3$. 令 $G'=G-\{x,y\}$.

首先假设 G' 为普通图，则 G' 具有一个动态 L- 染色 c. 设 x_1 是 x 的一个异于 y 的邻点 (x_1 与 y_1 可能相同), x_2 为 x_1 的不同于 x 和 y 的邻点 (注意，即使 $x_1\ne y_1$, x_2 与 y_1 也可能相同). 如果 $d_{G'}(y_1)\ge 2$, 则 y_1 在 G' 中的邻点集至少使用了 2 种颜色. 因此, 依次取 $c(x)\in L(x)\setminus\{c(x_1),c(x_2),c(y_1)\}$, $c(y)\in L(y)\setminus\{c(x),c(x_1),c(y_1)\}$, 则将 c 扩充到了图 G 的动态 L- 染色，矛盾. 如果 $d_{G'}(y_1)\le 1$, 则 x 与 y_1 相邻. 依次取 $c(x)\in L(x)\setminus\{c(y_1)\}$, $c(y)\in L(y)\setminus\{c(x),c(y_1)\}$, 则将 c 扩充到了图 G 的动态 L- 染色，矛盾.

另一方面，假设 G' 包含一个长度为 5 的圈 C 作为它的一个连通分支，则 C 必关联 x_1 或 y_1. 不妨假设 C 关联 x_1 (C 关联 y_1 时的证明是类似的). 此时， C 含有两个相邻的度数为 2 的点 x', y' 使得 $y'x_1\in E(G)$ 并且 $G-\{x',y'\}$ 是普通图. 因此，如果分别将前一段落中的 x,y,y_1 用 x',y',x_1 代替，则可划归为与之前相同的讨论.

(5) 假设 $d(v)\le 2$, 则由 (2) 知 $d(v)=2$. 首先，如果 $G'=G-\{u\}$ 为普通图，则 G' 具有一个动态 L- 染色 c. 由于 x 与 y 是 u 在 G' 中的仅有的两个邻点，故 $c(x)\ne c(y)$. 取 $c(u)\in L(u)\setminus\{c(x),c(y),c(v)\}$, 则将 c 扩充到了图 G 的动态 L- 染色，矛盾. 另一方面，如果 G' 是特殊图，则它是一个长度为 5 的圈 $xvyy_1x_1x$. 由于 x_1 与 y_1 是 G 中相邻的两个度数为 2 的点，故该结论与 (4) 矛盾.

(6) 假设 $d(v)\le 3$, 则由 (4) 知 $d(v)=3$. 令 u_1 为 u 的除 v 之外的另一个邻点， v_1 和 v_2 为 v 的除 u 之外的邻点且 $d(v_1)\le d(v_2)$, 其中， u_1 可能与 v_1 或 v_2 相同. 令 u_2 为 u_1 的除 u 和 v 外的另一邻点. 由 (4) 知， $d(u_1)\ge 3$.

情况 1 $d(v_1)=d(v_2)=2$.

由 (4) 知 $u_1\notin\{v_1,v_2\}$. 用 v_3 与 v_4 分别表示 v_1 与 v_2 的除 v 之外的另一个邻点. 由 (5) 知， $u_1\notin\{v_3,v_4\}$. 令 $G'=G-\{u,v,v_1,v_2\}$.

如果 G' 是普通图, 则 G' 具有一个动态 L- 染色 c. 如果 $v_3\ne v_4$, 则由 $d(v_3),d(v_4)\ge 3$ (此结论由 (4) 即得) 可知 v_3 与 v_4 在 G' 中的度数至少为 2, 从而 v_3 与 v_4 在 G' 中的邻点集至少包含 2 种颜色. 下面依次对 v,v_1,v_2 和 u 进行染色，即取 $c(v)\in L(v)\setminus\{c(u_1),c(v_3),c(v_4)\}$, $c(v_1)\in L(v_1)\setminus\{c(v),c(v_3)\}$, $c(v_2)\in L(v_2)\setminus\{c(v),c(v_1),c(v_4)\}$ $c(u)\in L(u)\setminus\{c(v),c(u_1),c(u_2)\}$, 则将 c 扩充到了图 G 的动态 L- 染色，矛盾.

如果 G' 是特殊图，则 G' 中含有一个 C_5 作为连通分支. 由 (1) 与 (4) 知， u_1, v_3 与 v_4 均是这个 C_5 连通分支的顶点，否则在 G 必定存在两个相邻的度数为 2 的顶点 x',y', 且它们不同于 u_1, v_3 与 v_4, 这与 (4) 矛盾. 这表明 u_1, v_3 与 v_4 中至少有一个与 3 个度数为 2 的顶点相邻，根据这三个顶点的对称性可不妨设该点为 u_1. 此时，进一步设上述提及的 C_5 连通分支为 $u_1xv_3v_4yu_1$, 其中 x 和 y 均为度数为 2 的顶点. 因此， G 是一个由 9 个顶点构成的图. 从而通过给 G 中的 9 个顶点 $v_3,v_4,x,u_1,v,v_1,v_2,y$ 和 u 依次进行染色，即取 $c(v_3)\in L(v_3)$, $c(v_4)\in L(v_4)\setminus c(v_3)$, $c(x)\in L(x)\setminus\{c(v_3),c(v_4)\}$, $c(u_1)\in L(u_1)\setminus\{c(v_3),c(v_4),c(x)\}$, $c(v)\in L(v)\setminus\{c(u_1),c(v_3),c(v_4)\}$, $c(v_1)\in L(v_1)\setminus\{c(v),c(v_3)\}$, $c(v_2)\in L(v_2)\setminus\{c(v),c(v_4),c(v_1)\}$, $c(y)\in L(y)\setminus\{c(u_1),c(v_3),c(v_4)\}$, $c(u)\in L(u)\setminus\{c(u_1),c(v),c(y)\}$, 则得到了图 G 的一个动态 L- 染色，矛盾.

情况 2 $d(v_1), d(v_2) \geq 3$.

如果 $G' = G - \{u, v\}$ 是普通图，则 G' 具有一个动态 L- 染色 c. 依次取 $c(v) \in L(v) \setminus \{c(u_1), c(v_1), c(v_2)\}$, $c(u) \in L(u) \setminus \{c(v), c(u_1), c(u_2)\}$, 则将 c 扩充到了图 G 的动态 L- 染色，矛盾. 注意上述讨论中可能会出现 $u_1 \in \{v_1, v_2\}$ 的情况，但是它并不影响上述证明的表述与最终的结果.

另一方面，如果 $G' = G - \{u, v\}$ 是特殊图，则 G' 中含有一个 C_5 作为连通分支. 由 (4) 知，u_1, v_1 与 v_2 均是这个 C_5 连通分支的顶点 (此 $u_1 \notin \{v_1, v_2\}$ 时), 否则在 G 必定存在两个相邻的度数为 2 的顶点 x', y', 且它们不同于 u_1, v_1 与 v_2, 这与 (4) 矛盾. 因此，根据 G 的连通性可知它是一个由 7 个顶点构成的图. 如果 u_1 与 3 个度数为 2 的顶点相邻, 则回到了情况 1 (用 u_2 取代情况 1 中点 v 的地位). 于是根据对称性, 只需考虑一种情况，即上述提及的 C_5 连通分支为 $u_1xv_1yv_2u_1$, 其中 $d(x) = d(y) = 2$. 从而通过给 G 中的 7 个顶点 v_1, v_2, x, y, u_1, v 与 u 依次进行染色，即取 $c(v_1) \in L(v_1)$, $c(v_2) \in L(v_2) \setminus \{c(v_1)\}$, $c(x) \in L(x) \setminus \{c(v_1)\}$, $c(y) \in L(y) \setminus \{c(v_1), c(v_2), c(x)\}$, $c(u_1) \in L(u_1) \setminus \{c(x), c(v_1), c(v_2)\}$, $c(v) \in L(v) \setminus \{c(v_1), c(v_2), c(u_1)\}$, $c(u) \in L(u) \setminus \{c(u_1), c(v), c(v_2)\}$, 则得到了图 G 的一个动态 L- 染色，矛盾.

情况 3 $d(v_1) = 2$ 且 $d(v_2) \geq 3$.

设 v_3 为 v_1 的除 v 之外的邻点. 由 (5) 知， $u_1 \neq v_3$. 由于 $d(v_3) \geq 3$ (由 (4) 即得), v_3 在 $G' = G - \{u, v, v_1\}$ 中的度数至少为 2.

如果 G' 为普通图，则 v_3 在 G' 中的邻点集至少使用了 2 种颜色. 从而依次取 $c(v) \in L(v) \setminus \{c(u_1), c(v_2), c(v_3)\}$, $c(v_1) \in L(v_1) \setminus \{c(v), c(v_2), c(v_3)\}$, $c(u) \in L(u) \setminus \{c(v), c(u_1), c(u_2)\}$, 则将 c 扩充到了图 G 的动态 L- 染色，矛盾. 注意上述讨论中可能会出现 $u_1 = v_2$ 的情况，但是它并不影响上述证明的表述与最终的结果.

如果 G' 是特殊图，则 G' 中含有一个 C_5 作为连通分支. 由 (4) 知， $u_1 \neq v_2$. 从而 u_1, v_2 与 v_3 均是这个 C_5 连通分支的顶点 (此 $u_1 \notin \{v_1, v_2\}$ 时), 否则在 G 必定存在两个相邻的度数为 2 的顶点 x', y', 且它们不同于 u_1, v_2 和 v_3, 这与 (4) 矛盾. 因此，根据 G 的连通性可知它是一个由 8 个顶点构成的图. 如果 u_1 或 v_3 与 3 个度数为 2 的顶点相邻，则回到了情况 1(用 u_1 或 v_3 取代情况 1 中点 v 的地位). 因此此时仅剩下一种情况，即上述提及的 C_5 连通分支为 $u_1xv_2yv_3u_1$, 其中 $d(x) = d(y) = 2$. 从而通过给 G 中的 8 个顶点 $v_2, v_3, x, y, u_1, v, v_1$ 与 u 依次进行染色，即取 $c(v_2) \in L(v_2)$, $c(v_3) \in L(v_2) \setminus \{c(v_2)\}$, $c(x) \in L(x) \setminus \{c(v_2), c(v_3)\}$, $c(y) \in L(y) \setminus \{c(v_2), c(v_3), c(x)\}$, $c(u_1) \in L(u_1) \setminus \{c(x), c(y), c(v_2)\}$, $c(v) \in L(v) \setminus \{c(u_1), c(v_2), c(v_3)\}$, $c(v_1) \in L(v_1) \setminus \{c(v), c(v_2), c(v_3)\}$, $c(u) \in L(u) \setminus \{c(u_1), c(v)\}$, 则得到了图 G 的一个动态 L- 染色，矛盾.

(7) 假设 G 包含具有公共顶点的的两个三角形 $uwxu$ 和 $vwyv$, 其中 $d(v) = d(u) = 2, d(w) = 4$. 由 (6) 可知，$d(x), d(y) \geq 4$. 从而说明了 $G' = G - \{u, v\}$ 是普通图. 因此，G' 具有一个动态 L- 染色 c. 因为 x 或 y 在 G' 中的度数至少为 3, 从而 x 或 y 在 G' 中的邻点集至少关联 2 种颜色. 于是依次取 $c(u) \in L(u) \setminus \{c(x), c(w)\}$, $c(v) \in L(v) \setminus \{c(y), c(w)\}$, 则将 c 扩充到了图 G 的动态 L- 染色，矛盾. 证毕.

定理 1 的证明 假设图 G 是定理 1 的一个顶点数最少的反例，即存在一个长度为

4 的列表 L, 使得图 G 不是动态 L- 可染的，但是图 G 的任何普通的真子图都是动态 L-可染的．由引理 4 的 (2) 和 (6) 知，$\delta(G) \geq 2$ 且图 G 中度数为 2 的顶点的邻点的度数至少为 4. 从而由引理 2 可得 $\mathrm{mad}\,(G) \geq 8/3$, 矛盾．由于当 $n \not\equiv 0 \pmod 3$ 且 $n \neq 5$ 时，根据引理 1 可知 C_n 的动态列表色数为 4, 因此定理 1 中关于动态列表色数的上界 4 是最优的．另一方面，由于完全图 K_5 的 2- 细分是最大平均度为 8/3 的普通图且其列表动态色数 5, 故定理 1 中关于最大平均度的上界 8/3 也是最优的．证毕．

定理 2 的证明 假设图 G 是定理 2 的一个顶点数最少的反例，即存在一个长度为 4 的列表 L, 使得图 G 不是动态 L- 可染的，但是图 G 的任何普通的真子图都是动态 L- 可染的．由引理 4 的 (2), (5), (6) 与 (7) 知，引理 3 中所提到的系列平行图的四种构形都不存在，因此得到矛盾．关于定理 2 中动态列表色数的上界 4 的最优性说明同上．证毕．

3 开放性问题

正如在第 1 节中所提到， Kim, Lee 和 Park [7] 证明了 $ch_d(G) \leq 5$ 对于任何平面图 G 成立．著名的 Wagner 定理指出，一个图是平面图当且仅当其既没有 K_5- 子式也没有 $K_{3,3}$- 子式．因此，本文提出如下问题：

问题 1 $ch_d(G) \leq 5$ 是否对于任何不含有 K_5- 子式的图或者不含有 $K_{3,3}$- 子式的图成立？

注意到本文的定理 2 的研究对象是系列平行图，即不含有 K_4- 子式的图，因此如下问题也值得进一步考虑：

问题 2 是否存在介于 K_4 与 K_5 之间的连通图 H (即 $K_4 \subset H \subset K_5$), 使得当 G 不含有 H- 子式且为普通图时，有 $ch_d(G) \leq 4$?

参 考 文 献

[1] Niu B, Zhang X. On $(p,1)$-total labelling of some 1-planar graphs. *Discuss. Math. Graph Theory*, 2021, 41(2): 531–558

[2] Yeh R K. Labelling graphs with a condition at distance two. Ph.D Thesis, Dept. of Math.,Univ. of South Carolina, Columbia, SC, USA, 1990

[3] Griggs J R, Yeh R K. Labeling graphs with a condition at distance two. *SIAM J. Discrete Math.*, 1992, 5: 586–595

[4] Zhu J, Bu Y. List r-dynamic coloring of sparse graphs. *Theoret. Comput. Sci.*, 2020, 817: 1–11

[5] Diestel R. Graph Theory (5th edition). Berlin: Springer, 2016

[6] 徐俊明．图论及其应用 (第 4 版)．合肥：中国科学技术大学出版社， 2019
(Xu J M. Graph Theory with Applications (Fourth edition). Hefei: University of Science and Technology of China Press, 2019)

[7] Kim S J, Lee S J, Park W J. Dynamic coloring and list dynamic coloring of planar graphs. *Discrete Appl. Math.*, 2013, 161: 2207–2212

[8] Kim Y, Lee S J, Oum S. Dynamic coloring of graphs having no K_5 minor. *Discrete Appl. Math.*, 2016, 206: 81–89

[9] Akbari S, Ghanbari M, Jahanbekam S. On the list dynamic coloring of graphs. *Discrete Appl. Math.*, 2009, 157: 3005–3007

[10] Kim S J, Park W J. List dynamic coloring of sparse graphs. *Lecture Notes in Comput. Sci.*, 2011, 6831: 156–162

[11] Song H, Fan S, Chen Y, Sun L, et al. On r-hued coloring of K_4-minor free graphs. *Discrete Math.*, 2014, 315–316: 47–52

[12] Juvan M, Mohar B, Thomas R. List edge-colorings of series-parallel graphs. *Electron. J. Combin.*, 1999, 6: R42

List Dynamic Coloring of Sparse Graphs and Series-Parallel Graphs

ZHANG Xin† LI Yan

(*School of Mathematics and Statistics, Xidian University, Xi'an* 710071*, China*)

(† *E-mail: xzhang@xidian.edu.cn*)

Abstract The (list) dynamic coloring, an important research direction in graph theory and theoretical computer science, can be used to solve some critical problems on the channel assignment problem. Kim and Park (2011) announced that the list dynamic chromatic number of every graph with maximum average degree less than 8/3 is at most 4. However, this result is incorrect since the cycle C_5 on five vertices has maximum average degree 2 and list dynamic chromatic number 5. In this paper, we correct this flaw by proving that the list dynamic chromatic number of every graph with maximum average degree less than 8/3 is at most 4 (being sharp) if it is a normal graph, which is a graph having no component isomorphic to C_5. Meanwhile, we prove that every series-parallel graph has list dynamic chromatic number at most 4 if it is a normal graph, and exactly 5 otherwise, which improves a result of Song *et al.* (2014) that states that the list dynamic chromatic number of every series-parallel graph is at most 6.

Key words channel assignment problem; dynamic coloring; list coloring; maximum average degree; series-parallel graph

MR(2010) Subject Classification 05C15; 05C10

Chinese Library Classification O157.5