

三类超越可平面图的结构及其约束数^{*}

张华强 张欣[†] 牛蓓

(西安电子科技大学数学与统计学院, 西安 710071)

([†]E-mail: xzhang@xidian.edu.cn)

摘要 如果一个图可以嵌入在平面内使得每条边最多被交叉一次, 则称该图为 1-可平面图. 如果一个图可以嵌入在平面内使得任何两个交叉不共享关联点, 则称该图为 IC-可平面图. 如果一个图可以嵌入在平面内使得任何两个交叉最多共享一个关联点, 则称该图为 NIC-可平面图. 1-可平面图, IC-可平面图与 NIC-可平面图是三类重要的超越可平面图, 它们在模块网络, 社交网络和生物网络上有着重要的应用. 图的约束数是为了使图的支配数严格增加所需要删除的最少的边数, 它是衡量网络脆弱性的一个重要参数. 本文考虑 1-可平面图, IC-可平面图与 NIC-可平面图的结构, 并利用得到的结构定理证明了它们的约束数分别最多是 13, 11 与 12.

关键词 1-可平面图; IC-可平面图; NIC-可平面图; 超越可平面图; 约束数

MR(2010) 主题分类 05C69; 05C10; 05C75

中图分类号 O157.5

1 引言

大多数现实世界的图, 如模块网络, 社交网络和生物网络等无标度网络, 都是由稀疏的非可平面图组成. 为了分析这样的现实世界网络, 首先需要解决稀疏非可平面图的基本结构和算法方面的问题. 一般而言, 可以将稀疏的非可平面图笼统地称为超越可平面图^[1], 而稀疏的非可平面图往往通过限制边上的交叉的个数, 或者图中交叉的分布情况进行具体定义.

例如, 如果一个图可以嵌入在平面内使得每条边最多被交叉 k 次, 则称该图为 k -可平面图, 该图满足此条件且交叉数最少的平面嵌入称为 k -平面图. 特别地, 0-可平面图即可平面图. 而当 $k \geq 1$ 时, k -可平面图可能就不是可平面图. 事实上, 以 1-可

本文 2020 年 2 月 25 日收到, 2020 年 5 月 24 日收到修改稿.

^{*} 国家自然科学基金面上基金资助项目 (11871055), 国家留学基金委公派留学 (访问学者) 项目 (201906965003) 和西安市科协青年人才托举计划资助项目 (2018-6) 资助.

[†] 通讯作者.

平面图为例, 它是超越可平面图中的一个非常重要的图类, 得到了很多图论学者的广泛关注, 发表的与 1-可平面图相关的文献有百余篇^[2,3], 涉及到图的判定算法与刻画, 结构性质以及几何表示等众多方面, 如 [4,5].

在当今的互联网时代, 通讯网络日益成为人们谈论的热点. 通讯网络是由固定的站点以及站点之间的通信链路构成. 一般而言, 通讯运营机构的目标是在通讯网络的站点内配置基站, 使得通讯网络中的每个站点要么配有基站, 要么与配有基站的站点之间有通信链路相连. 出于运营成本的考虑, 通讯运营机构期望配置最少数量的基站以达到预期的通讯效果.

该问题可以转换为图论的语言进行描述. 具体来说, 构造一个图 G , 其中每个顶点对应通讯网络的一个站点, 每条边对应相应两个站点之间的通信链路. 基站的最优布局问题等价于在图 G 中找一个包含顶点数最小的顶点子集 W , 使得图 G 中的每个点要么属于子集 W , 要么是 W 中某个点的邻点. 满足上述条件的子集 W 称为图 G 的最小支配集, 其包含的顶点数称为图 G 的支配数, 记为 $\gamma(G)$.

在现实中, 一个通讯网络不可能一直保持着良好的运营状态, 它可能因为黑客攻击, 过载运营等行为导致其中某些通信链路的故障. 因此, 有必要寻找一个参数来衡量通讯网络在可能存在链路故障下的脆弱性, 即探讨通讯网络在受到攻击时是否仍能保持良好的状态. 从破坏者的角度来看, 他们可能不清楚通讯网络中哪些站点配有基站, 但是知道这些配有基站的站点能有效覆盖整个网络, 那么他们需要至少切断多少条通信链路才能使得整个通讯网络的通讯性能降低. 而此处, 通讯性能的降低指的就是通讯网络(图)的支配数的增加, 因为此时如果通讯运营机构还需要保证通讯网络的通畅则势必需要增加基站的数量, 从而被迫需要有更多的投入.

基于此背景, Bauer 等人^[6]与 Fink 等人^[7]分别于 1983 年与 1990 年独立地引入了网络(图)的约束数的概念. 图 G 的约束数 $b(G)$ 是使得 $\gamma(G - M) > \gamma(G)$ 的具有最少边数的图 G 的边集合的子集 M 所包含的边数. 换句话说, 在图 G 中存在 $b(G)$ 条边, 当它们从图 G 中删除后所得到的图的支配数比图 G 的支配数严格大; 另一方面, 如果从图 G 任意删除不超过 $b(G) - 1$ 条边, 则得到的图的支配数与原图的支配数一致.

设 G 是一个图, 分别用 $V(G)$, $E(G)$, $\delta(G)$, $\Delta(G)$ 表示它的点集合, 边集合, 最小度, 最大度. 设 v 是图 G 的一个顶点, 用 $N_G(v)$ 表示顶点 v 在图 G 中的邻点的集合, 用 $d_G(v) = |N_G(v)|$ 表示顶点 v 在图 G 中的度. 设 u 与 v 是连通图 G 中的任意两个顶点, 用从顶点 u 到顶点 v 所经过的最少边的条数表示这两个点之间的距离, 记为 $d_G(u, v)$. 设 u 是图 G 的一个顶点, 与 u 距离为 2 的顶点称为 u 的 2-邻点. Bauer 等人^[6]与 Fink 等人^[7]分别独立地证明了对于任何没有孤立点的图 G 都有 $b(G) \leq \Delta(G) + \delta(G) - 1$. Kang 与 Yuan^[8]证明了 $b(G) \leq \min\{8, \Delta(G) + 2\}$ 对连通的 1-可平面图 G 成立. Huang 与 Xu^[9]证明了 $b(G) \leq 8$ 对于最多含有 3 个交叉的图 G 成立. 关于图的约束数的其余相关结果可参考 Xu^[10] 的综述论文.

在 [11] 中, Ma, Zhang 与 Wang 认为 $b(G) \leq 12$ 对连通的 1-可平面图 G 成立. 然而, 该文对于 1-可平面图的约束数的上界的证明是错误的. 注意到, [11] 的作者们在证明的过程中直接使用了如下未加证明的论断: 设 v 是 1-平面图 G 的一个度数介于

3 到 6 之间的顶点, 则可以在 $N_G(v)$ 所导出的 G 的子图中添加某些原来不存在的边, 使得得到的图 G' 依然是 1- 平面图, 并且由 $N_{G'}(v)$ 所导出的 G' 的子图是 2- 连通的. 事实上, 该论断是错误的. 例如, 在图 1 所示的 1- 平面图 G 中, 其点 1 的邻点集是 $\{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, 且点集 $\{2, 3, 4\}$ 与 $\{5, 6, 7\}$ 之间无边, 并且在这两个点集之间添加任何一条边所得到的图将不再是 1- 平面图 (因此, 如果在上述论断中取点 v 为图 1 的点 1, 则 G' 和 G 相同). 注意到由 $\{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ 导出的 G 的子图不是连通的, 故该图是上述论断的一个反例.

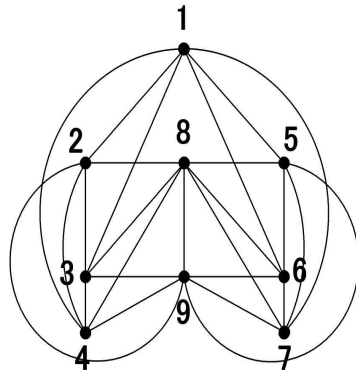


图 1 点 1 的邻点集所导出的子图不是连通的

基于此原因, 本文将从另外一个角度考虑 1- 可平面图及其相关图类 IC- 可平面图^[12]与 NIC- 可平面图^[13,14]的约束数问题. 事实上, IC- 可平面图与 NIC- 可平面图也是两类重要的超越可平面图, 其定义如下:

IC- 可平面图 可以嵌入在平面内使得任何两个交叉不共享关联点的图 (由于每个交叉是由图的两条边所生成的, 故每个交叉关联四个顶点, 称它们为该交叉的关联点), 并称其满足该条件的交叉数最少的嵌入为 IC- 平面图.

NIC- 可平面图 可以嵌入在平面内使得任何两个交叉共享最多一个关联点的图, 并称其满足该条件的交叉数最少的嵌入为 NIC- 平面图.

本文首先在第 2 节中考虑 1- 可平面图, IC- 可平面图与 NIC- 可平面图这三类超越可平面图的结构问题 (定理 1, 定理 2 与定理 3), 然后将在第 3 节应用这些结果得到有关这三类超越可平面图的约束数的结论 (定理 4).

2 三类超越可平面图的结构

设 G 是一个 1- 平面图, 如果将图 G 中的所有交叉都转化为度数为 4 的顶点, 则得到了一个平面图 G^\times , 称其为 1- 平面图 G 的关联平面图. G^\times 中那些由图 G 中转换而来的新的度数为 4 的点称为图 G^\times 中的假点, 其余点称为图 G^\times 中的真点. 图 G^\times 中关联假点的面称为假面, 其余面称为真面. 用 $F(G^\times)$ 表示平面图 G^\times 的所有面的集合,

$d_{G^\times}(f)$ 表示图 G^\times 中面 f 的度数, 即 f 在图 G^\times 中关联的边的数量 (割边计算两次). 如果图 G^\times 中的某点 (面) 的度数为 k , 或至少为 k , 或至多为 k , 则称其为 k^- 点 (面)、或 k^+ 点 (面)、或 k^- 点 (面). 本文其余定义若无特殊说明, 均参考 [15].

定理 1 任意 1- 可平面图 G 都存在一条路径 uvw 使得

$$\min\{d_G(u) + d_G(v), d_G(u) + d_G(w), d_G(v) + d_G(w)\} \leq 14.$$

证 不妨设 G 是连通的 1- 可平面图, 并假设图 G 的任何一条路径 uvw 都满足

$$\min\{d_G(u) + d_G(v), d_G(u) + d_G(w), d_G(v) + d_G(w)\} \geq 15. \quad (1)$$

对于图 G 的关联平面图 G^\times 中的每个点 v 与每个面 f , 分别赋予初始权值 $ch(v) = d_{G^\times}(v) - 4$ 与 $ch(f) = d_{G^\times}(f) - 4$, 则由欧拉公式可知 $\sum_{x \in V(G^\times) \cup F(G^\times)} ch(x) = -8$. 下面对 $V(G^\times) \cup F(G^\times)$ 中各元素 x 的权值依据如下的权转移规则进行调整, 并用 $ch'(x)$ 表示元素 x 的最终权值.

R1. 图 G^\times 的每个 6^- 点 (假点除外) 或 8^+ 点向它相关联的每个 3- 面转移权值 $\frac{1}{2}$;

R2. 图 G^\times 的每个 7- 点向它相关联的每个假 3- 面转移权值 $\frac{1}{2}$;

R3. 设 uvw 是图 G 的一条路径, 如果 $d_{G^\times}(u) \leq 6$, 则 v 向点 u 转移 $\frac{1}{2} - \frac{4}{d_{G^\times}(v)}$, 且 w 通过 v 向点 u 转移 $\frac{1}{2} - \frac{4}{d_{G^\times}(w)}$.

由于权值只在 $V(G^\times) \cup F(G^\times)$ 中的元素间进行转移, 从而权值的总和保持不变, 即

$$\sum_{x \in V(G^\times) \cup F(G^\times)} ch'(x) = \sum_{x \in V(G^\times) \cup F(G^\times)} ch(x) = -8 < 0.$$

下证 $ch'(x) \geq 0$ 对于每个 $x \in V(G^\times) \cup F(G^\times)$ 成立, 从而与上式矛盾.

如果 f 是 4^+ 面, 则由于 f 不参与权转移规则, 从而有 $ch'(f) = ch(f) = d_{G^\times}(f) - 4 \geq 0$.

如果 f 是真 3- 面, 则由 (1) 可知其不可能同时关联两个 7- 点, 从而由 R1 可知 $ch'(f) \geq 3 - 4 + 2 \times \frac{1}{2} = 0$.

如果 f 是假 3- 面, 则由 R1 与 R2 可知其关联的两个真点中的每一个都将向 f 转移 $\frac{1}{2}$, 从而有 $ch'(f) = 3 - 4 + 2 \times \frac{1}{2} = 0$.

如果 u 是 1- 点, 则其不关联 3- 面, 且由 (1) 可知, 其在 G 中的邻点 v 是 14^+ 点, 且 v 的其余邻点均为 14^+ 点, 从而由 R3 可知 $ch'(u) \geq 1 - 4 + 14 \times (\frac{1}{2} - \frac{4}{14}) = 0$.

如果 u 是 k^- 点 ($2 \leq k \leq 6$), 则其最多关联 k 个 3- 面, 且由 (1) 可知, 其在 G 中的邻点与 2- 邻点都是 $(15-k)^+$ 点, 从而由 R1 与 R3 可知 $ch'(u) \geq k - 4 - \frac{k}{2} + k(15-k)(\frac{1}{2} - \frac{4}{15-k}) = \frac{-k^2 + 8k - 8}{2} > 0$.

如果 u 是 7- 点, 则其最多关联 6 个假 3- 面, 且由 (1) 可知其不是任何 6^- 点的邻点或者 2- 邻点, 从而由 R2 可知 $ch'(u) \geq 7 - 4 - 6 \times \frac{1}{2} = 0$.

如果 u 是 k^- 点 ($k \geq 8$), 则其最多关联 k 个 3- 面. 对于 u 的任何一个邻点 v , 由 (1) 可知, 在 $\{v\} \cup N_G(v) \setminus \{u\}$ 中最多有一个 6^- 点, 从而由 R1 与 R3 可知 $ch'(u) \geq k - 4 - \frac{k}{2} - k(\frac{1}{2} - \frac{4}{k}) = 0$.

证毕.

注 1 由于存在 7- 正则的 1- 可平面图^[16], 从而定理 1 中的上界 14 是最优的.

引理 1 设 v 是 IC- 可平面图 G 的一个顶点, 则 v 在 G^\times 中最多关联两个假 3- 面.

证 根据是 IC- 可平面图的定义可知, v 在 G^\times 中最多与一个假点相邻, 因此其最多关联两个假 3- 面. 证毕.

定理 2 任意 IC- 可平面图 G 都存在一条路径 uvw 使得

$$\min\{d_G(u) + d_G(v), d_G(u) + d_G(w), d_G(v) + d_G(w)\} \leq 12.$$

证 不妨设 G 是连通的 IC- 可平面图, 并假设图 G 的任何一条路径 uvw 都满足

$$\min\{d_G(u) + d_G(v), d_G(u) + d_G(w), d_G(v) + d_G(w)\} \geq 13. \quad (2)$$

对于图 G 的关联平面图 G^\times 中的每个点 v 与每个面 f , 分别赋予初始权值 $ch(v) = d_{G^\times}(v) - 4$ 与 $ch(f) = d_{G^\times}(f) - 4$, 则由欧拉公式可知 $\sum_{x \in V(G^\times) \cup F(G^\times)} ch(x) = -8$. 下面对 $V(G^\times) \cup F(G^\times)$ 中各元素 x 的权值依据如下的权转移规则进行调整, 并用 $ch'(x)$ 表示元素 x 的最终权值.

R1. 图 G^\times 的每个真点向它相关联的每个真 3- 面转移权值 $\frac{1}{3}$;

R2. 图 G^\times 的每个真点向它相关联的每个假 3- 面转移权值 $\frac{1}{2}$;

R3. 设 uvw 是图 G 的一条路径, 如果 $d_{G^\times}(u) \leq 6$, 则 v 向点 u 转移 $\frac{2}{3} - \frac{13}{3d_{G^\times}(v)}$, 且 w 通过 v 向点 u 转移 $\frac{2}{3} - \frac{13}{3d_{G^\times}(w)}$.

由于权值只在 $V(G^\times) \cup F(G^\times)$ 中的元素间进行转移, 从而权值的总和保持不变, 即

$$\sum_{x \in V(G^\times) \cup F(G^\times)} ch'(x) = \sum_{x \in V(G^\times) \cup F(G^\times)} ch(x) = -8 < 0.$$

下证 $ch'(x) \geq 0$ 对于每个 $x \in V(G^\times) \cup F(G^\times)$ 成立, 从而与上式矛盾.

如果 f 是 4^+ - 面, 则由于 f 不参与权转移规则, 从而有 $ch'(f) = ch(f) = d_{G^\times}(f) - 4 \geq 0$.

如果 f 是真 3- 面, 则其关联 3 个真点, 从而由 R1 可知 $ch'(f) = 3 - 4 + 3 \times \frac{1}{3} = 0$.

如果 f 是假 3- 面, 则其关联 2 个真点, 从而由 R2 可知 $ch'(f) = 3 - 4 + 2 \times \frac{1}{2} = 0$.

如果 u 是 1- 点, 则其不关联 3- 面, 且由 (2) 可知, 其在 G 中的邻点 v 是 12^+ - 点, 且 v 的其余邻点均为 12^+ - 点, 从而由 R3 可知 $ch'(v) \geq 1 - 4 + 12 \times (\frac{2}{3} - \frac{13}{3 \times 12}) = \frac{2}{3} > 0$.

如果 u 是 k - 点 ($2 \leq k \leq 6$), 则由引理 1 可知其最多关联 2 个假 3- 面, 且由 (2) 可知, 其在 G 中的邻点与 2- 邻点都是 $(13 - k)^+$ - 点, 从而由 R1-R3 可知 $ch'(u) \geq k - 4 - \frac{1}{2} \times 2 - \frac{1}{3} \times (k - 2) + k(13 - k)(\frac{2}{3} - \frac{13}{3(13 - k)}) = \frac{-2k^2 + 15k - 15}{3} > 0$.

如果 u 是 k - 点 ($k \geq 7$), 则其最多关联 2 个假 3- 面且对于 u 的任何一个邻点 v , 由 (2) 可知, 在 $\{v\} \cup N_G(v) \setminus \{u\}$ 中最多有一个 6^- - 点, 从而由 R1-R3 可知 $ch'(u) \geq k - 4 - \frac{1}{2} \times 2 - \frac{1}{3} \times (k - 2) - k(\frac{2}{3} - \frac{13}{3k}) = 0$. 证毕.

注 2 由于存在 6- 正则的 IC- 可平面图^[12], 从而定理 2 中的上界 12 是最优的.

引理 2 设 v 是 NIC- 平面图 G 的一个顶点, 则 v 在 G^\times 中最多关联 $\lfloor \frac{2d_{G^\times}(v)}{3} \rfloor$ 个假 3- 面.

证 只需证明: 如果 f_1, f_2, f_3 是 v 在 G^\times 中连续关联的三个 3- 面, 则它们不可能同时是假 3- 面. 否则, 设 $f_1 = vv_1v_2, f_2 = vv_2v_3, f_3 = vv_3v_4$ 均为假 3- 面. 由 NIC- 可平面图的定义可知, 在 G^\times 中任何两个假点不相邻, 从而 v_1 与 v_3 同时是假点, 或者 v_2 与 v_4 同时是假点. 根据对称性, 只考虑 v_1 与 v_3 同时是假点的情况. 此时, v 与 v_2 都是 G 中的交叉 v_1 的关联点, 也都是 G 中的交叉 v_3 的关联点, 此与 NIC- 平面图的定义矛盾. 证毕.

定理 3 任意 NIC- 可平面图 G 都存在一条路径 uvw 使得

$$\min\{d_G(u) + d_G(v), d_G(u) + d_G(w), d_G(v) + d_G(w)\} \leq 13.$$

证 不妨设 G 是连通的 NIC- 平面图, 并假设图 G 的任何一条路径 uvw 都满足

$$\min\{d_G(u) + d_G(v), d_G(u) + d_G(w), d_G(v) + d_G(w)\} \geq 14. \quad (3)$$

对于图 G 的关联平面图 G^\times 中的每个点 v 与每个面 f , 分别赋予初始权值 $ch(v) = d_{G^\times}(v) - 4$ 与 $ch(f) = d_{G^\times}(f) - 4$, 则由欧拉公式可知 $\sum_{x \in V(G^\times) \cup F(G^\times)} ch(x) = -8$. 下面对 $V(G^\times) \cup F(G^\times)$ 中各元素 x 的权值依据如下的权转移规则进行调整, 并用 $ch'(x)$ 表示元素 x 的最终权值.

R1. 图 G^\times 的每个真点向它相关联的每个真 3- 面转移权值 $\frac{1}{3}$;

R2. 图 G^\times 的每个真点向它相关联的每个假 3- 面转移权值 $\frac{1}{2}$;

R3. 设 uvw 是图 G 的一条路径, 如果 $d_{G^\times}(u) \leq 6$, 则 v 向点 u 转移 $\frac{5}{9} - \frac{4}{d_{G^\times}(v)}$, 且 w 通过 v 向点 u 转移 $\frac{5}{9} - \frac{4}{d_{G^\times}(w)}$.

由于权值只在 $V(G^\times) \cup F(G^\times)$ 中的元素间进行转移, 从而权值的总和保持不变, 即

$$\sum_{x \in V(G^\times) \cup F(G^\times)} ch'(x) = \sum_{x \in V(G^\times) \cup F(G^\times)} ch(x) = -8 < 0.$$

下证 $ch'(x) \geq 0$ 对于每个 $x \in V(G^\times) \cup F(G^\times)$ 成立, 从而与上式矛盾.

如果 f 是 4^+ - 面, 则由于 f 不参与权转移规则, 从而有 $ch'(f) = ch(f) = d_{G^\times}(f) - 4 \geq 0$.

如果 f 是真 3- 面, 则其关联 3 个真点, 从而由 R1 可知 $ch'(f) = 3 - 4 + 3 \times \frac{1}{3} = 0$.

如果 f 是假 3- 面, 则其关联 2 个真点, 从而由 R2 可知 $ch'(f) = 3 - 4 + 2 \times \frac{1}{2} = 0$.

如果 u 是 1- 点, 则其不关联 3- 面, 且由 (3) 可知, 其在 G 中的邻点 v 是 13^+ - 点, 且 v 的其余邻点均为 13^+ - 点, 从而由 R3 可知 $ch'(v) \geq 1 - 4 + 13 \times (\frac{5}{9} - \frac{4}{13}) = \frac{2}{9} > 0$.

如果 u 是 k - 点 ($2 \leq k \leq 6$), 则由引理 2 可知其最多关联 $\lfloor \frac{2k}{3} \rfloor$ 个假 3- 面, 且由 (3) 可知, 其在 G 中的邻点与 2- 邻点都是 $(14 - k)^+$ - 点, 从而由 R1-R3 可知 $ch'(u) \geq k - 4 - \frac{1}{2} \lfloor \frac{2k}{3} \rfloor - \frac{1}{3}(k - \lfloor \frac{2k}{3} \rfloor) + k(14 - k)(\frac{5}{9} - \frac{4}{14 - k}) \geq \frac{-5k^2 + 39k - 36}{9} > 0$.

如果 u 是 k -点 ($k \geq 7$), 则由引理 2 可知其最多关联 $\lfloor \frac{2k}{3} \rfloor$ 个假 3-面且对于 u 的任何一个邻点 v , 由 (3) 可知, 在 $\{v\} \cup N_G(v) \setminus \{u\}$ 中最多有一个 6-点, 从而由 R1-R3 可知 $ch'(u) \geq k - 4 - \frac{1}{2} \lfloor \frac{2k}{3} \rfloor - \frac{1}{3}(k - \lfloor \frac{2k}{3} \rfloor) - k(\frac{5}{9} - \frac{4}{k}) \geq 0$. 证毕.

3 三类超越可平面图的约束数

Hartnell 与 Rall^[17] 证明了如下结论:

引理 3 $b(G) \leq d_G(x) + d_G(y) - 1$ 对于图 G 中任何一对距离最多为 2 的顶点 x 与 y 都成立.

分别根据定理 1, 定理 2 与定理 3 可知:

如果 G 是 1-可平面图, 则图 G 存在距离最多为 2 的顶点 x 与 y 使得 $d_G(x) + d_G(y) \leq 14$.

如果 G 是 IC-可平面图, 则图 G 存在距离最多为 2 的顶点 x 与 y 使得 $d_G(x) + d_G(y) \leq 12$.

如果 G 是 NIC-可平面图, 则图 G 存在距离最多为 2 的顶点 x 与 y 使得 $d_G(x) + d_G(y) \leq 13$.

因此由引理 3 立刻可推出如下结论:

定理 4

$$b(G) \leq \begin{cases} 13, & \text{如果 } G \text{ 是 1-可平面图;} \\ 11, & \text{如果 } G \text{ 是 IC-可平面图;} \\ 12, & \text{如果 } G \text{ 是 NIC-可平面图.} \end{cases}$$

参 考 文 献

- [1] Didimo W, Liotta G, Montecchiani F. A survey on graph drawing beyond planarity. *ACM Computing Surveys*, 52(1): 1-37
- [2] Kobourov S G, Liotta G, Montecchiani F. An annotated bibliography on 1-planarity. *Computer Science Review*, 2017, 25: 49-67
- [3] 张欣, 刘维婵. 1-平面图及其子类的染色. *运筹学学报*, 2017, 21(4): 135-152
(Zhang X, Liu W C. The coloring of the class of 1-planar graphs and its subclasses. *Operations Research Transactions*, 2017, 21(4): 135-152)
- [4] Zhang X, Wang H J, Xu L. Equitable coloring of three classes of 1-planar graphs. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica, English Series*, 2018, 34(2): 362-372
- [5] 张欣, 刘桂真, 吴建良. 1-平面图的结构性质及其在无圈边染色上的应用. *中国科学: 数学*, 2010, 40(10): 1025-1032
(Zhang X, Liu G Z, Wu J L. Structural properties of 1-planar graphs and an application to acyclic edge coloring. *SCIENTIA SINICA: Mathematica*, 2010, 40(10): 1025-1032)

- [6] Bauer D, Harary F, Nieminen J, Suffel C L. Domination alteration sets in graphs. *Discrete Mathematics*, 1983, 47(C): 153–161
- [7] Fink J F, Jacobson M S, Kinch L F, Roberts J. The bondage number of a graph. *Discrete Mathematics*, 1990, 86(1): 47–57
- [8] Kang L, Yuan J. Bondage number of planar graphs. *Discrete Mathematics*, 2000, 222(1-3): 191–198
- [9] Huang J, Xu J M. The bondage numbers of graphs with small crossing numbers. *Discrete Mathematics*, 2007, 307(15): 1881–1897
- [10] Xu J M. On bondage numbers of graphs: A survey with some comments. *International Journal of Combinatorics*, 2013:#595210
- [11] Ma Q, Zhang S, Wang J. Bondage number of 1-planar graph. *Applied Mathematics*, 2010, 1: 101–103
- [12] Zhang X, Liu G. The structure of plane graphs with independent crossings and its applications to coloring problems. *Central European Journal of Mathematics*, 2013, 11(2): 308–321
- [13] Niu B, Zhang X. Linear arboricity of NIC-planar graphs. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica, English Series*, 2019, 35(4): 924–934
- [14] Zhang X. Drawing complete multipartite graphs on the plane with restrictions on crossings. *Acta Mathematica Sinica, English Series* 2014, 30(12): 2045–2053
- [15] 徐俊明. 图论及其应用 (第 4 版). 合肥: 中国科学技术大学出版社, 2019
(Xu J M. Graph Theory with Applications (Fourth edition). Hefei: University of Science and Technology of China Press, 2019)
- [16] Fabrici I, Madaras T. The structure of 1-planar graphs. *Discrete Mathematics*, 2007, 307(7-8): 854–865
- [17] Hartnell B L, Rall D F. A bound on the size of a graph with given order and bondage number. *Discrete Mathematics*, 1999, 197–198: 409–413

The Structure and the Bondage Number of Three Classes of Beyond-planar Graphs

ZHANG HUAQIANG ZHANG XIN[†] NIU BEI

(School of Mathematics and Statistics, Xidian University, Xi'an 710071, China)

([†]E-mail: xzhang@xidian.edu.cn)

Abstract A graph that can be drawn in the plane so that each edge is crossed at most once, or any two crossings do not share a common incident vertex, or any two crossings share at most one common incident vertex is 1-planar, or IC-planar, or NIC-planar, respectively. 1-planar graphs, IC-planar graphs, and NIC-planar graphs are three famous classes among beyond-planar graphs, which have many applications to the modular networks, social networks and bio-networks. The bondage number of a graph is the minimum number of edges such that the removal of them from the graph makes the domination number increases. It

is an useful parameter to measure the vulnerability of the network. In this paper, the structures of 1-planar graphs, IC-planar graphs, and NIC-planar graphs are described, which are later applied to prove that the bondage number of every 1-planar graph, IC-planar graph, and NIC-planar graph is at most 13, 11, and 12, respectively.

Key words 1-planar graph; IC-planar graph; NIC-planar graph; beyond-planar graph; bondage number

MR(2010) Subject Classification 05C69; 05C10; 05C75

Chinese Library Classification O157.5