山东大学学报(理学版)2020 年 9 月 第 55 卷 第 9 期
Journal of Shandong University (*Natural Science*), Vol.55, No.9, 2020

E-mail:xblxb@ sdu.edu.cn
http://lxbwk.njournal.sdu.edu.cn
Tel:+86-0531-88366917

文章编号:1671-9352(2020)09-0051-03　　DOI:10.6040/j.issn.1671-9352.0.2019.089

反 d-退化图中的点不交 3-圈

牛蓓*,张欣
(西安电子科技大学数学与统计学院, 陕西 西安 710071)

摘要:如果图 G 的补图 $\overline{G}$ 是 d-退化图,则称图 G 是反 d-退化图。证明了当 $|G|=3k$ 且 $\delta(G)\geqslant k\geqslant 26d$ 时,反 d-退化图 G 包含 k 个点不交的 3-圈,其中 $d\geqslant 2$。

关键词:(反)d-退化图;独立集;点不交 3-圈;均匀染色
中图分类号:O157.5　　**文献标志码**:A
引用格式:牛蓓,张欣.反 d-退化图中的点不交 3-圈[J]. 山东大学学报(理学版),2020,55(9):51-53,61.

Vertex-disjoint triangles in anti-d-degenerate graphs

NIU Bei*, ZHANG Xin
(School of Mathematics and Statistics, Xidian University, Xi'an 710071, Shaanxi, China)

Abstract: A graph G is an anti-d-degenerate graph if its complement graph $\overline{G}$ is a d-degenerate graph. It is proved that every anti-d-degenerate graph G with $|G|=3k$ and $\delta(G)\geqslant k\geqslant 26d$ contains k vertex-disjoint triangles, where $d\geqslant 2$.

Key words: (anti)-d-degenerate graph; independent set; vertex-disjoint triangle; equitable coloring

0　引言

本文仅考虑简单的有限无向图。设 G 是一个图,用 $\Delta(G)$,$\delta(G)$,$V(G)$ 与 $E(G)$ 分别表示图 G 的最大度、最小度、点集合与边集合,令 $|E|$ 和 $|G|$ 分别表示图 G 的边数和顶点数,$\overline{G}$ 表示图 G 的补图。如果图 G 和图 H 没有公共的顶点,则称它们是点不交的,并令 $G\vee H$ 表示顶点集是 $V(G)\cup V(H)$, 边集为 $E(G)\cup E(H)$ 再添上 $V(G)$ 与 $V(H)$ 之间的所有边的图。图 G 中一个顶点 v 的度是指与该顶点相关联的边的条数,记作 $d_G(v)$。以图 G 的顶点集的非空子集 V_1 为顶点集,两端点均在 V_1 中的全体边为边集的图,称为由 V_1 导出的 G 的子图,记为 $G[V_1]$。其余定义若无特殊说明,均参考文献[1]。

如果图 G 中的每一个子图的最小度至多为 d,则称图 G 是 d-退化图。若 G 的补图 $\overline{G}$ 是 d-退化图,则称 G 是反 d-退化图。如果图 G 的一个顶点子集中任意两个点都不相邻,则称这个顶点子集为独立集,独立集的大小是它包含的顶点数。图 G 的独立数是指最大独立集的大小, 记为 $\alpha(G)$。图 G 中圈的长度是与该圈关联的边的数量。如果一个圈的长度为 k,则称其为 k-圈。Corrádi 和 Hajnal[2] 证明了 Erdös 提出以下猜想。

定理 1　设 $k\geqslant 1$ 是一个给定的整数,如果图 G 的顶点数 $n\geqslant 3k$ 且最小度 $\delta(G)\geqslant 2k$, 则 G 包含 k 个点不交的 3-圈,即 $G\supseteq kC_3$。

显然,定理 1 中关于顶点数的下界 $3k$ 和最小度的下界 $2k$ 都是紧的。实际上,如果一个图 G 包含 k 个点不交的 3-圈,则 $\alpha(G)\leqslant |G|-2k$,这是因为对于图 G 的任意的独立集 I,图中每个圈至少包含 G-I 中两个点。

收稿日期:2019-03-01; **网络出版时间**:2020-09-01 14:22:47
网络出版地址:http://kns.cnki.net/kcms/detail/37.1389.N.20200831.1302.006.html
基金项目:西安市科协青年人才托举计划项目(2018-6); 国家自然科学基金资助项目(11871055); 陕西省自然科学基础研究计划面上基金项目)2017JM1010)
第一作者简介:牛蓓(1993—),女,博士研究生,研究方向为图论及其应用. E-mail:beiniu@ stu.xidian.edu.cn
* **通信作者**

因此 $R:=\overline{K_{k+1}}\vee K_{2k-1}$ 满足顶点数 $n=3k$ 且 $\delta(R)=2k-1$。又因为 $\alpha(R)=k+1>|R|-2k$，所以 R 不包含 k 个点不交的3-圈。

设 H 是定理1中所提及的图 G（此处设图 G 的顶点数恰好为 $3k$）的补图，则由 $\Delta(H)+\delta(G)=|G|-1$ 可得 $\Delta(H)\leqslant k-1$。由于 $G\supseteq kC_3$，因此 $H\supseteq k\overline{C_3}$，即 H 的点集可以划分成 k 个两两不交的独立集，其中每个独立集的大小恰好为3。事实上，这个结论可以通过染色的语言进行描述。

图 G 的正常 k-染色是一个从图的点集 $V(G)$ 到自然数集 $\{1,2,\cdots,k\}$ 的映射 φ，使得对于图 G 的任何两个相邻的顶点 u,v 满足 $\varphi(u)\neq\varphi(v)$，使得图 G 有正常 k-染色的最小整数 k 称为图 G 的点色数，记为 $\chi(G)$。如果图 G 有正常 k-染色 φ 满足 $|\varphi^{-1}(i)-\varphi^{-1}(j)|\leqslant 1,\ 1\leqslant i<j\leqslant k$，则称其是图 G 的均匀 k-染色，使得图 G 有均匀 k-染色的最小整数 k 称为图 G 的均匀点色数，记为 $\chi_{\mathrm{eq}}(G)$。

至此，由定理1得到的上述推论可概括如下。

定理 2 设 $k\geqslant 1$ 是一个给定的整数，如果图 G 的顶点数 $n=3k$ 且最大度 $\Delta(G)\leqslant k-1$，则 G 存在均匀 k-染色。

事实上，定理2亦可推出定理1在 $n=3k$ 时的对应结论。Erdös[3] 猜想上述定理2中的条件 $n=3k$ 是可去的，即对于任意整数 $k\geqslant 1$，每一个具有最大度 $\Delta(G)\leqslant k-1$ 的图 G 都是均匀 k-可染的。这一猜想在1970年被 Hajnal 和 Szemerédi[4] 所证明，即有如下定理。

定理 3 设 $k\geqslant 1$ 是一个给定的整数，如果图 G 的最大度 $\Delta(G)\leqslant k-1$，则 G 存在均匀 k-染色。

定理3的较短证明参阅文献[5]，相关算法见参考文献[6]。

本文主要考虑反 d-退化图中点不交3-圈的存在性问题，并通过引入均匀染色与算法分析的研究思想，针对顶点数 $n=3k$ 的反 d-退化图改进定理1中关于最小度的下界。具体来说，证明了以下结论。

定理 4 设 $k\geqslant 1,\ d\geqslant 2$ 是给定的整数，G 是一个顶点数 $n=3k$ 的反 d-退化图，如果 $\delta(G)\geqslant k$ 且 $k\geqslant 26d$，则 $G\supseteq kC_3$。

1 定理4的证明

由于 G 是一个顶点数 $n=3k$ 的反 d-退化图，因此 $H:=\overline{G}$ 是 d-退化图。由定理1可知，当 $\delta(G)\geqslant 2k$ 时，有 $G\supseteq kC_3$，因此只需再考虑 $k\leqslant\delta(G)\leqslant 2k-1$ 的情况。此时，由 $\Delta(H)+\delta(G)=|G|-1=3k-1$ 可得 $2k-1\geqslant\Delta(H)\geqslant k$，注意到 $G\supseteq kC_3$ 当且仅当 $H\supseteq k\overline{C_3}$，因此仅需证明当 $2k-1\geqslant\Delta(H)\geqslant k$ 时有 $H\supseteq k\overline{C_3}$。为了方便起见，现列举3个在接下来的证明中经常用到的条件，即：

(a) $n=3k$；

(b) $2k-1\geqslant\Delta(H)$；

(c) $\Delta(H)\geqslant 26d$。

如果图 H 中存在 k 个独立集使得每个集合都包含3个顶点，则得证。否则，考虑如下算法。

步骤 0 令 $H_0=H$；

步骤 $i(i=1,2,\cdots)$ 如果 H_{i-1} 包含3个互不相邻且度数至少为 $6d+1$ 的点 $v_{i,1},v_{i,2}$ 和 $v_{i,3}$，则令

$$M_i=\{v_{i,1},v_{i,2},v_{i,3}\},\ H_i=H_{i-1}-M_i,$$

并转到步骤 $i+1$，否则停止。

如果上述算法进行到了步骤 $k+1$，则已经找到了至少 k 个两两不交的独立集 $M_1,M_2,\cdots,M_k$，继而有 $H\supseteq k\overline{C_3}$，得证。

假设上述算法在步骤 $q(q\leqslant k)$ 停止。令 S 是 H_q 中度数至少为 $6d+1$ 的顶点的集合且 $s=|S|$，因为 H 是 d-退化图，所以

$$|E(H_q)|\geqslant\sum_{v\in S}d_{H_q}(v)-|E(H[S])|\geqslant(6d+1)s-ds=(5d+1)。$$

由于 H_i 是由 H_{i-1} 删去3个度数至少为 $6d+1$ 的点得到，故

$$|E(H_i)|\leqslant|E(H_{i-1})|-3(6d+1),$$

因此

$$\sum_{i=1}^{q}|E(H_i)|\leqslant\sum_{i=1}^{q}|E(H_{i-1})|-3q(6d+1),$$

化简得到

$$|E(H_q)|\leqslant|E(H_0)|-3q(6d+1)<3kd-3q(6d+1),$$

再结合之前得到的$|E(H_q)|$的下界，有

$$(5d+1)s<3kd-3q(6d+1),$$

即

$$q+\frac{5s}{18}<\frac{k}{6}\text{。}\tag{1}$$

由于 S 中不存在 3 个顶点所构成的独立集（否则算法将持续，矛盾），故 $\alpha(H[S])\leqslant2$。由于 H 是 d-退化的，故 $H[S]$亦是 d-退化的，从而$\chi(H[S])\leqslant d+1$，因此

$$s=|H[S]|\leqslant\alpha(H[S])\cdot\chi(H[S])=2(d+1)\text{。}\tag{2}$$

现按如下算法构造 H_q 中 s 个两两不交的独立集 $M_{q+1},M_{q+2},\cdots,M_{q+s}$，使得每个独立集只包含 S 中一个顶点。

步骤 $j(1\leqslant j\leqslant s)$　选取 H_{q+j-1}中一个点 $w_j\in S$ 和 $V(H_{q+j-1})$中另外两个点，使得它们组成一个独立集 M_{q+j}，然后令 $H_{q+j}=H_{q+j-1}-M_{q+j}$。

下证该算法可以成功地做完步骤 s，即得到图 H_{q+s}。更一般地，证明对于任意的 $1\leqslant j\leqslant s$，图 H_{q+j}存在。

注意到 H_{q+j}是由 H_{q+j-1}删去 3 个点所得，而$|H_q|=3k-3q$，故

$$|H_{q+j}|=|H_q|-3(j-1)=3k-3(q+j-1)\text{。}$$

设 $V(H_{q+j-1})$中与选定点$w_j\in S$ 不相邻的顶点的集合为 Λ，则

$$|\Lambda|\geqslant3k-3(q+j-1)-\Delta(H)-1:=\rho\text{。}$$

如果$\rho\geqslant d+2$，则 Λ 中必有两个不相邻的顶点（否则 $H[\Lambda]$是一个至少有 $d+2$ 的顶点的完全图，从而其最小度至少为 $d+1$，这与图 H 是 d-退化的矛盾），从而它们与点 w_j 组成独立集 M_{q+j}，继而图 H_{q+j}存在。

如果 $\rho\leqslant d+1$，则

$$3k-3(q+s-1)-\Delta(H)-1\leqslant d+1\text{。}$$

代入条件(b)，即 $\Delta(H)\leqslant2k+1$ 后计算可得

$$k\leqslant3q+3s+d-2,$$

再结合不等式(1)，可得

$$\frac{k}{2}<\frac{13s}{6}+d-2,$$

再由式(2)有

$$\frac{\Delta(H)+1}{4}<\frac{13(d+1)}{6}+d-2=\frac{16d}{3}+\frac{7}{3},$$

因此

$$\Delta(H)<\frac{64d}{3}+\frac{25}{3}<26d,$$

与条件(c)矛盾。

至此，证明了图 H_{q+s}是存在的，并已经构造了 $q+s$ 个包含 3 个顶点的独立集

$$M_1,M_2\cdots,M_q,M_{q+1},M_{q+2},\cdots,M_{q+s}\text{。}$$

注意到现在已经有 $H_{q+s}\cap S=\varnothing$（这是因为 S 中的所有点在第二个算法中依次被移除），故图 H_{q+s}的最大度至多为 $6d$。此时由定理 3 可知，对于任意的 $l\geqslant6d+1$，H_{q+s}中都存在均匀 l-染色。

当 $k-q-s\geqslant6d+1$ 时，H_{q+s}中存在均匀$(k-q-s)$-染色。由于

$$|H_{q+s}|=3k-3(q+s)=3(k-q-s),$$

因此 H_{q+s}的均匀$(k-q-s)$-染色中每种颜色恰好被使用了 3 次，即 H_{q+s}的点集可以划分为 $k-q-s$ 个两两不交的含有 3 个顶点的独立集。这些独立集和之前得到的 $q+s$ 个独立集合在一起表明 $H\supseteq k\overline{C_3}$，得证。

（下转第 61 页）

[13] BEUCHAT J L, JORGE E, MITSUNARI S, et al. High-speed software implementation of the optimal ate pairing over BN curves [M]. Yamanaka: Springer, 2010:12-13.
[14] COSTELLO C, LANGE T, NAEHRIG M. Faster pairing computations on curves with high-degree twists[C]//Proceedings of International Conference on Practice & Theory in Public Key Cryptography, 2010:300-301.
[15] 李阳. 高性能双线性对密码算法与 VLSI 实现研究[D]. 上海:复旦大学,2013.
LI Yang. Research on high performance bilinear pair cryptography algorithm and VLSI implementation [D]. Shanghai: Fudan University, 2013.
[16] HESS F, SMART N P, VERCAUTEREN F. The Eta pairing revisited [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2006, 52(10):4595-4602.
[17] ZHAO C A, ZHANG F, HUANG J. A note on the Ate pairing [J]. International Journal of Information Security, 2008, 7(6):379-382.
[18] LEE E, LEE H S, PARK C M. Efficient and generalized pairing computation on abelian varieties [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2009, 55(4):1793-1803.
[19] VERCAUTEREN F. Optimal pairings [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2010, 56(1):455-461.
[20] MILLER V S.The Weil pairing and its efficient calculation[J]. Journal of Cryptology, 2004, 17(4):235-261.
[21] 赵昌安.双线性对的有效计算[D].广州:中山大学,2008.
ZHAO Changan. Efficient calculation of bilinear pairs[D]. Guangzhou: Zhongshan University, 2008.
[22] OHGISHI K, SAKAI R, KASAHARA M. Elliptic curve signature scheme with no *y*-coordinate[C]//Proceedings of SCIS'99.Washington: IEEE Press, 1999:285-287.
[23] GORDON D M. A survey of fast exponentiation methods[J]. Journal of Algorithms, 1998, 27(1):129-146.
[24] LIM C H, LEE P J. More flexible exponentiation with precomputation[C]//Proceedings of Advances in Cryptology. Berlin: Springer, 1994:95-107.

(编辑:李晓红)

(上接第 53 页)

另一方面,当 $k-q-s\leqslant 6d$ 时,由不等式(1)可推得

$$k-\left(\frac{k}{6}-\frac{5s}{18}\right)-s<6d,$$

即

$$\frac{5k}{6}-\frac{13s}{18}<6d,$$

再由式(2),有

$$\frac{5k}{6}<\frac{13(d+1)}{9}+6d,$$

从而 $k\leqslant 22d$,这与条件 $k\geqslant 26d$ 矛盾,从而定理得证。

参考文献:

[1] BONDY J A, MURTY U S R. Graph theory with applications[M]. London: Macmillan Education UK, 1976.
[2] CORRÁDI K, HAJNAL A. On the maximal number of independent circuits in a graph[J]. Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae, 1963, 14(3/4):423-439.
[3] ERDÖS P. Theory of graphs and its Applications[M]. Prague: Czech Acad Sci Pub, 1964: 159.
[4] HAJNAL A, SZEMERÉDI E. Proof of a conjecture of P. Erdös[J]. Combinatorial Theory and Its Application, 1970, 2:601-623.
[5] KIERSTEAD H A, KOSTOCHKA A V. Equitable versus nearly equitable coloring and the Chen−Lih−Wu conjecture[J]. Combinatorica, 2010, 30(2):201-216
[6] KIERSTEAD H A, KOSTOCHKA A V. Ore-type versions of Brooks' theorem[J]. Journal of Combinatorial Theory, Series B, 2009, 99(2):298-305.

(编辑:祁业卿)