◎理论与研发◎

外1-平面图的均匀边染色

李　艳，张　欣

西安电子科技大学 数学与统计学院，西安 710071

摘　要：图 G 的 s-均匀边 k-染色是指用 k 种颜色对图的边进行染色，使得图 G 的每个顶点所关联的任何两种颜色的边的条数至多相差 s。使得对于每个不小于 k 的整数 t，图 G 都具有 s-均匀边 t-染色的最小整数 k 称为图 G 的 s-均匀边色数阈值。文中证明了外1-平面图的1-均匀边色数阈值最多为5，不含有相邻的3圈的外1-平面图的均匀边色数阈值最多为4，外1-平面图的2-均匀边色数阈值恰好为1。

关键词：均匀边染色；均匀边色数阈值；外1-平面图

文献标志码：A　　**中图分类号：**O157.5　　doi：10.3778/j.issn.1002-8331.1812-0190

李艳，张欣.外1-平面图的均匀边染色.计算机工程与应用，2019，55(24)：37-40.

LI Yan, ZHANG Xin. Equitable edge coloring of outer-1-planar graphs. Computer Engineering and Applications, 2019, 55(24)：37-40.

Equitable Edge Coloring of Outer-1-Planar Graphs

LI Yan, ZHANG Xin

School of Mathematics and Statistics, Xidian University, Xi'an 710071, China

Abstract: An s-equitable edge-k-coloringof a graph G is an edge coloring of G using k colors so that the sizes of any two color classes incident with any fixed vertex of G differ by at most s. The s-equitable edge chromatic threshold of G is the smallest k such that G has an s-equitable edge-t-colorings for integer t that is no less than k. It is proved that the 1-equitable edge chromatic threshold of any outer-1-planar graph is at most 5, the 1-equitable edge chromatic threshold of any outer-1-planar graph without adjacent triangles is at most 4, and the 2-equitable edge chromatic threshold of any outer-1-planar graph is exactly 1.

Key words: equitable edge coloring; equitable edge chromatic threshold; outer-1-planar graph

1　引言

图论是一门古老的数学分支，它起源于1736年欧拉对于哥尼斯堡七桥问题的研究.在图论的研究中，图的染色理论占据着重要地位，其中图的四色问题最具有代表性。图的均匀染色在图的染色领域中是一个重要的研究方向，它在工业生产，生物学，企业管理等领域得到了广泛的应用。

1994年，Hilton等人[1]首次给出了图的均匀边 k-染色的定义，其是图的一个边 k-染色（不要求是正常的），所使用的颜色集合是 $\{1, 2, \cdots, k\}$，并且每个顶点所关联的任何两种颜色的边的条数至多相差1。他们证明了如果 k 不被图 G 的任何顶点的度数整除，则图 G 具有一个均匀边 k-染色。2011年，Zhang等人[2]推广了该结论，证明了如果一个图 G 的 k-核（所有度数是 k 的整数倍的顶点所导出的子图）是一棵树，则图 G 具有一个均匀边 k-染色。

在研究图的均匀边染色的过程中，有一个特别的概念，即边均匀图。所谓边均匀图，即对于任何不小于1

基金项目：西安市科协青年人才托举计划（No.2018-2020）；中央高校基本科研业务费项目（No.JB170706）；陕西省自然科学基础研究计划面上基金（No.2017JM1010）。

作者简介：李艳（1996—），女，硕士研究生，研究领域为图论及其应用，E-mail：y.li@stu.xidian.edu.cn；张欣（1986—），男，博士，副教授，硕士研究生导师，研究领域为图论及其应用。

收稿日期：2018-12-17　　**修回日期：**2019-03-11　　**文章编号：**1002-8331(2019)24-0037-04

CNKI网络出版：2019-04-18, http://kns.cnki.net/kcms/detail/11.2127.TP.20190416.1711.006.html

的整数 k 都具有均匀边 k -染色的图，亦即均匀边色数阈值为1的图（使得对于每个不小于 k 的整数 t ，图 G 都具有均匀边 t -染色的最小整数 k 称为图 G 的均匀边色数阈值，记为 $\chi'_{\equiv}(G)$ ）。De Werra[3]证明了所有的二部图都是边均匀的，Wu[4]证明了每个连通的不含有环游（环游是不含奇度点的连通图）的外平面图都是边均匀的，Song等人[5]继而证明了每个连通的不含有环游的系列平行图都是边均匀的。针对拓扑图的均匀边染色，Hu等人[6]于2017年证明了对于任何不小于21的整数，每个1-平面图都具有均匀边 k -染色（即1-平面图的均匀边色数阈值最多为21），且对于任何不小于16的整数，每个平面图都具有均匀边 k -染色（即平面图的均匀边色数阈值最多为16）。

用 $V(G)$、$E(G)$、$\Delta(G)$ 和 $\delta(G)$ 分别表示图 G 的顶点集、边集、最大度和最小度，用 $d_G(x)$ 表示顶点 x 在图 G 中的度。外1-平面图是指所有顶点分布在外部面上，且每条边最多被交叉一次的图。例如，完全二部图 $K_{2,3}$ 与完全图 K_4 都是外1-平面图。外1-平面图由Eggleton[7]于1986年首次提出，其结构与染色问题被广泛研究[8-11]。

2　k -临界外1-平面图及其结构

关于图的结构问题的研究是图论领域的一个热门研究方向，在该领域有很多优秀的结果[12-16]，并且有一部分被用于图的染色问题的研究。

图 G 的边 k -染色是指用 k 种颜色 $1,2,\cdots,k$ 对 G 的边进行染色。设 φ 是图 G 的一个边 k -染色，对于 G 中的任意顶点 $v\in V(G)$ ，令：

$$c_i(\varphi,v)=\left|\{uv\in E(G)|\varphi(uv)=i\}\right|$$

$$C_\varphi(v)=\{i|c_i(\varphi,v)=\min_{1\leqslant j\leqslant k}c_j(\varphi,v)\}$$

显然 $\left|C_\varphi(v)\right|\geqslant 1$ 。如果对于任意的 $v\in V(G)$ ，有：

$$\left|c_i(\varphi,v)-c_j(\varphi,v)\right|\leqslant 1(1\leqslant i<j\leqslant k)$$

则称图 G 的边 k -染色 φ 是均匀的。如果图 G 没有均匀边 k -染色而对于图 G 的任意真子图都是均匀边 k -可染的，则称图 G 为 k -临界图。

2012年，Zhang等人[17]给出了外1-平面图的结构，其可以用来解决一些染色问题。

引理1[17]　设图 G 是一个外1-平面图，则图 G 含有以下四种结构之一：

（1）边 uv ，其中 $d_G(u)=1$ ；

（2）边 uv ，其中 $d_G(u)+d_G(v)\leqslant 6$ ；

（3）长度为4的圈 $uxvyu$ ，其中 $d_G(u)=d_G(v)=2$ ；

（4）结构 F_1（如图1），其中 $d_G(x)=d_G(y)=5$，$d_G(u)=d_G(v)=d_G(w)=2$ 。

引理2[17]　如果外1-平面图 G 不含有相邻的3圈，则图 G 含有以下四种结构之一：

（1）边 uv ，其中 $d_G(u)=1$ ；

（2）边 uv ，其中 $d_G(u)+d_G(v)\leqslant 5$ ；

（3）长度为4的圈 $uxvyu$ 其中 $d_G(u)=d_G(v)=2$ ；

（4）结构 F_2（如图1），其中 $d_G(v)=d_G(x)=2$，$d_G(w)=4$ 。

引理3[17]　设图 G 是一个外1-平面图，则图 G 含有以下两种结构之一：

（1）边 uv ，其中 $d_G(u)\leqslant 2$ ；

（2）结构 F_3（如图1），其中 $d_G(u)=d_G(v)=3$ 。

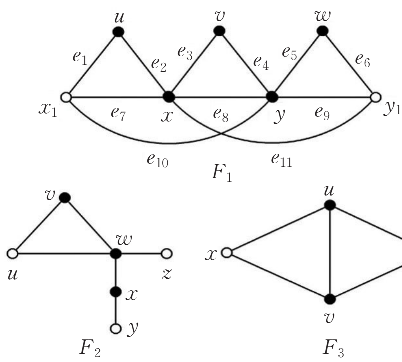

图1　外1-平面图的结构 F_1,F_2 **与** F_3

引理4　设图 G 是一个 k -临界图且 $k\geqslant 2$，则 $\delta(G)\geqslant 2$ 。

证明　假如该结论不成立，即存在边 $uv\in E(G)$ 使得 $d_G(u)=1$ 。因为图 G 为 k -临界图，故 $G-uv$ 是均匀 k -边可染的。此时取 $C_\varphi(v)$ 中的一个颜色给边 uv 进行染色即可得到 G 的均匀边 k -染色，矛盾。

引理5　设图 G 是一个 k -临界图且 $k\geqslant 2$ ，则对于任意的 $uv\in E(G)$，$d_G(u)+d_G(v)\geqslant k+2$ 。

证明　假如该结论不成立，即存在边 $uv\in E(G)$ 使得 $d_G(u)+d_G(v)\leqslant k+1$ 。因为图 G 为 k -临界图，故 $G'=G-uv$ 是均匀边 k -可染的。因此

$$\begin{aligned}\left|C_\varphi(u)\right|+\left|C_\varphi(v)\right|&=\left(k-d_{G'}(u)\right)+\\&\left(k-d_{G'}(v)\right)=2k-\left(d_G(u)-1+d_G(v)-1\right)=\\&2k+2-\left(d_G(u)+d_G(v)\right)\geqslant k+1>k\end{aligned}$$

这表明 $C_\varphi(u)\cap C_\varphi(v)\neq\varnothing$ 。于是从 $C_\varphi(u)\bigcap C_\varphi(v)$ 中任选一种颜色给边 uv 进行染色即可得到 G 的均匀边 k -染色，矛盾。

引理6　设图 G 是一个 k -临界图且 $k\geqslant 2$ ，则 G 不包含一个长度为4的圈 $C=uxvyu$，其中 $d_G(u)=d_G(v)=2$ 。

证明　假如该结论不成立，即图 G 包含一个如引理所述的圈 $C=uxvyu$ 。由于图 G 是一个 k -临界图，故 $G'=G-E(C)$ 有一个均匀边 k -染色 φ 。令 $\alpha_x\in C_\varphi(x)$ 。如果 $\left|C_\varphi(x)\right|\geqslant 2$，则取 $\beta_x\in C_\varphi(x)\backslash\{\alpha_x\}$ ；如果 $\left|C_\varphi(x)\right|=1$，则取 $\beta_x\in C\backslash C_\varphi(x)$ 。接下来用同样的方式取出 α_y 和 β_y ，继而分别给边 ux,vx,uy,vy 赋予颜色列表 L 使得 $L(ux)=L(vx)=\{\alpha_x,\beta_x\}$ 以及 $L(uy)=L(vy)=\{\alpha_y,\beta_y\}$ 。

由于长度为4的圈是边2-可选的，即在 C 上存在正常的边染色 ϕ 使得 $\phi(e)\in L(e), e\in E(C)$ 。将 φ 与 ϕ 合并即可得到 G 的均匀边 k -染色，矛盾。

引理7 设图 G 是一个 k -临界图且 $k\geqslant 4$ ，则 G 不包含结构 F_2 。

证明 假如该结论不成立，则图 G 包含结构 F_2 。由于图 G 是一个 k -临界图，从而 $G'=G-F_2$ 有一个均匀边 k -染色 φ 。令 $a_1\in C_\varphi(u)$ 。如果 $\left|C_\varphi(u)\right|\geqslant 2$ ，则取 $a_2\in C_\varphi(x)\backslash\{\alpha_x\}$ ；如果 $\left|C_\varphi(u)\right|=1$ ，则取 $a_2\in C\backslash C_\varphi(x)$ 。此时如果将 uv, uw 分别染为 a_1, a_2 或 a_2, a_1 ，则点 u 周围的边染色是均匀的。由于 $k\geqslant 4$ ，故不失一般性可假设边 vw, wx 可使用的颜色均为 a_1, a_2, a_3, a_4 。

现在对 F_2 进行均匀边染色。首先，取 $b_1\in C_\varphi(y)$ 作为 xy 的颜色，取 $b_2\in C_\varphi(z)$ 作为 wz 的颜色。将 uv, uw 分别染为 a_1, a_2 ，取 $\{a_1, a_3, a_4\}\backslash\{b_1, b_2\}$ 中的一个颜色 a_i 作为 wx 的颜色。

如果 $\{a_i, b_2\}\neq\{a_3, a_4\}$ ，则使用 $\{a_3, a_4\}\backslash\{a_i, b_2\}$ 中的一个颜色作为 vw 的颜色，此时 F_2 的所有边均被染好且容易验证所得到的 G 的染色是均匀的。如果 $\{a_i, b_2\}=\{a_3, a_4\}$ ，则不妨设 $a_i=a_3, b_2=a_4$ 。此时如果 $b_1\neq a_1$ ，则将 wx 重新染为 a_1, vw 染为 a_3 ，从而得到了 G 的均匀边 k -染色，矛盾。如果 $b_1=a_1$ ，则将 wx, uv 重新染为 a_2, uw 重新染为 a_1, vw 染为 a_3 ，即可得到 G 的均匀边 k -染色，矛盾。

为得到引理9，需用到以下重要结论。

引理8[18]（组合零点定理） 设 F 为任一域，$P=P(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 为属于 $F[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ 的多项式。设 $\deg(P)=\sum\limits_{i=1}^{n}k_i$，其中 k_i 为非负整数，并且 P 中 $x_1^{k_1}, x_2^{k_2}, \cdots, x_n^{k_n}$ 的系数非零。若 $S_1, S_2, \cdots, S_n\subseteq F$ 且 $|S_i|>k_i, 1\leqslant i\leqslant n$ ，则存在 $s_1\in S_1, s_2\in S_2, \cdots, s_n\in S_n$ 使得 $P(s_1, s_2, \cdots, s_n)\neq 0$ 。

运用组合零点定理可证明以下结论。

引理9 设图 G 是一个 k -临界图且 $k\geqslant 5$ ，则 G 不包含结构 F_1 。

证明 假如该结论不成立，则图 G 包含结构 F_1 。由于图 G 是一个 k -临界图，从而 $G'=G-F_1$ 有一个均匀边 k -染色 φ 。

为证明 G 是均匀 k -边可染的，需要对边 $e_i, 1\leqslant i\leqslant 10$ 进行染色。事实上，为了使得点 x_1 周围的边染色是均匀的，e_1, e_7, e_{10} 的颜色需两两不同且优先选自于 $C_\varphi(x_1)$（如果 $C_\varphi(x_1)$ 中颜色不足3个，则先将 $C_\varphi(x_1)$ 中的颜色选完，剩下的则从 $C_\varphi(x_1)$ 的补集中任选即可）。

基于此，可赋予 e_1, e_7, e_{10} 的可选颜色集 S_1, S_7, S_{10} 使得 $S_1=S_7=S_{10}$ 且 $|S_1|=3$ ，其中 S_1, S_7, S_{10} 的选法如上所述。类似地，可赋予 e_6, e_9, e_{11} 的可选颜色集 S_6, S_9, S_{11} 使得 $S_6=S_9=S_{11}$ 且 $|S_6|=3$ 。对于边 $e_i, i=2, 3, 4, 5, 8$ ，赋予可选颜色集 $S_i=\{1, 2, \cdots, k\}$ 。

如果对于每条边 $e_i, 1\leqslant i\leqslant 10$ 都可从 S_i 中选择一种颜色，使得得到的 F_1 的边染色是正常的（即相邻的边使用不同的颜色），则可完成图 G 的均匀边 k -染色，继而得到矛盾并证明了该引理。这便要求结构 F_1 中分别与点 x_1, u, v, w, y_1, x, y 关联的每条边的颜色两两不同，亦即

$$f_1=(x_1-x_7)(x_1-x_{10})(x_7-x_{10})\neq 0$$
$$f_2=(x_1-x_2)\neq 0$$
$$f_3=(x_3-x_4)\neq 0$$
$$f_4=(x_5-x_6)\neq 0$$
$$f_5=(x_6-x_9)(x_9-x_{11})(x_6-x_{11})\neq 0$$
$$f_6=(x_7-x_2)(x_7-x_3)(x_7-x_8)(x_7-x_{11})(x_2-x_3)\times(x_2-x_8)(x_2-x_{11})(x_3-x_8)(x_3-x_{11})(x_8-x_{11})\neq 0$$
$$f_7=(x_8-x_4)(x_8-x_5)(x_8-x_9)(x_8-x_{10})(x_4-x_5)\times(x_4-x_9)(x_5-x_9)(x_5-x_{10})(x_9-x_{10})(x_4-x_{10})\neq 0$$

令

$$f=\prod_{i=1}^{7}f_i$$

下面仅需证明存在 $x_i\in S_i, 1\leqslant i\leqslant 11$ 使得 $f\neq 0$ 。

当 $i=1, 6, 7, 9, 10, 11$ 时取 $k_i=2$ ；当 $i=2, 3, 4, 5, 8$ 时取 $k_i=4$ 。此时容易验证，$|S_i|>k_i, 1\leqslant i\leqslant 11$ 。由于

$$\deg(f)=29=\sum_{i=1}^{11}k_i\text{ ，}$$

$$\frac{\partial^{29}}{\partial x_1^2\partial x_2^4\partial x_3^4\partial x_4^4\partial x_5^3\partial x_6^2\,\partial x_7^2\partial x_8^2\partial x_9^2\partial x_{10}^2\partial x_{11}^2}f=21\,233\,664\neq 0$$

从而由引理8，即组合零点定理可知，存在 $x_i\in S_i, 1\leqslant i\leqslant 11$ 使得 $f\neq 0$ 。

3　外1-平面图的均匀边染色

利用第2章得到的几个引理，可证明以下两个主要结论。

定理1 如果 G 是外1-平面图，则 $\chi'_{\equiv}(G)\leqslant 5$ 。

证明 要证明该定理只需要证明对于任意的 $k\geqslant 5$ ，k -临界图 G 是不存在的。假设存在 k -临界图 G ，则由引理4、5、6、8可得：$\delta(G)\geqslant 2$ ；对于任意的边 $uv\in E(G)$, $d_G(u)+d_G(v)\geqslant 7$ ；G 不包含一个长度为4的圈 $C=uxvyu$ ，其中 $d_G(u)=d_G(v)=2$ ；G 不包含结构 F_1 。这些均与引理1矛盾。

定理2 如果外1-平面图 G 不含有相邻的3圈，则 $\chi'_{\equiv}(G)\leqslant 4$ 。

证明 要证明该定理只需要证明对于任意的 $k\geqslant 4$ ，k -临界图 G 是不存在的。假设存在 k -临界图 G ，则由

引理4、5、6、7可得：$\delta(G)\geqslant 2$；对于任意的边 $uv\in E(G)$，$d_G(u)+d_G(v)\geqslant 6$；G 不包含一个长度为4的圈 $C=uxvyu$，其中 $d_G(u)=d_G(v)=2$；G 不包含结构 F_2。这些均与引理2矛盾。

4 外1-平面图的2-均匀边染色

图 G 的 s-均匀边 k-染色是指用 k 种颜色去染 G 的边，使得对 G 的每一个顶点 v，任意两种颜色染与 v 相关联的数目最多差 s。使得对于每个不小于 k 的整数 t，图 G 都具有 s-均匀边 t-染色的最小整数 k 称为图 G 的 s-均匀边色数阈值，记为 $\chi'_{s\equiv}(G)$。对于任何不小于1的整数 k 都具有 s-均匀边 k-染色的图，亦即 s-均匀边色数阈值为1图称为 s-边均匀图。下面将证明任意的外1-平面图都是2-边均匀的。

定理3 如果 G 是外1-平面图，则 $\chi'_{2\equiv}(G)=1$。

证明 假设定理不成立，则对于任意的 $k\geqslant 1$，存在图 G 使得图 G 不是2-均匀边 k-可染的但是其任何真子图都是2-均匀边 k-可染的。根据引理3，下面考虑两种情况。

情况1 图 G 含有一个至多为2度的点 u。

不妨设 $d_G(u)=2$ 且 $ux,uy\in E(G)$。令 $G'=G-u$，则图 G' 有2-均匀边 k-染色 φ。取 $C_\varphi(x)$ 中的一种颜色赋给边 ux，$C_\varphi(y)$ 中的一种颜色赋给 uy，即得到 G 的2-均匀2-均匀边 k-染色，矛盾。

情况2 图 G 含有结构 F_3。

令 $G'=G-F_3$，则 G' 有2-均匀边 k-染色 φ。令 $\alpha_x\in C_\varphi(x)$。如果 $\left|C_\varphi(x)\right|\geqslant 2$，则取 $\beta_x\in C_\varphi(x)\backslash\{\alpha_x\}$；如果 $\left|C_\varphi(x)\right|=1$，则取 $\beta_x\in C\backslash C_\varphi(x)$。接下来用同样的方式取出 α_y 和 β_y，继而分别给边 ux,vx,uy,vy 赋予颜色列表 L 使得 $L(ux)=L(vx)=\{\alpha_x,\beta_x\}$ 以及 $L(uy)=L(vy)=\{\alpha_y,\beta_y\}$。由于长度为4的圈是边2-可选的，即在 C 上存在正常的边染色 ϕ 使得 $\phi(e)\in L(e),e\in E(C)$。将 φ 与 ϕ 合并即得到了 $G^*=G-uv$ 的2-均匀边 k-染色 π。此时将边 uv 染为颜色 $\pi(ux)$，得到了 G 的一个 k-边染色。由于 $\pi(ux)\neq\pi(uy)$，故在 u 上每种颜色最多被使用2次，从而点 u 周边的染色是2-均匀的。另一方面，由于 $\pi(ux)\neq\pi(vx)$，故在 v 上每种颜色最多被使用2次，从而点 v 周边的染色也是2-均匀的。因此得到了 G 是2-均匀 k-边染色，矛盾。

5 结语

文中主要得到了以下三个结论：

（1）外1-平面图的均匀边色数阈值最多为5（定理1）。

（2）不含有相邻的3圈的外1-平面图的均匀边色数阈值最多为4（定理2）。

（3）任意的外1-平面图都是2-边均匀的（定理3）。

注意到奇圈是一个外1-平面图。如果仅使用两种颜色对其进行边染色，必然有一个点周围的两条边获得相同的颜色，因此奇圈不是均匀的。但是由定理3可知，奇圈是2-均匀的。因此定理3的结论从这个角度来说是最优的。

参考文献：

[1] Hilton A J W，de Werra D.A sufficient condition for equitable edge-colourings of simple graphs[J].Discret Math，1994，128：179-201.

[2] Zhang X，Liu G Z.Equitable edge-colorings of simple graphs[J].Journal of Graph Theory，2011，66（3）：175-197.

[3] De Werra D.Equitable colorations of graphs[J].Revue Française d'informatique et de Recherche OpéRationnelle，SéRie Rouge，1971，5（3）：3-8.

[4] Wu J L.The equitable edge-colouring of outerplanar graphs[J].Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing，2001，36（1）：247-253.

[5] Song H M，Wu J L，Liu G Z.The equitable edge-coloring of series-parallel graphs[C]//Proceedings of the 7th International Conference on Computational Science，Part III，2007：457-460.

[6] Hu D Q，Wu J L，Yang D，et al.On the equitable edge-coloring of 1-planar graphs and planar graphs[J].Journal of Graphs Combinatorics，2017，33（4）：945-953.

[7] Eggleton R B.Rectilinear drawings of graphs[J].Utilitas Math，1986，29：149-172.

[8] Zhang X.List total coloring of pseudo-outerplanar graphs[J].Discrete Math，2013，313：2297-2306.

[9] Tian J，Zhang X.Pseudo-outerplanar graphs and chromatic conjectures[J].Ars Combin，2014，114：353-361.

[10] Zhang X.The edge chromatic number of outer-1-planar graphs[J].Discrete Math，2016，339：1393-1399.

[11] 刘维婵，张欣.外1-平面图的均匀点荫度[J].计算机工程与应用，2018，54（10）：51-53.

[12] 张欣，刘桂真，吴建良.1-平面图的结构性质及其在无圈边染色上的应用[J].中国科学：数学，2010，40（10）：1025-1032.

[13] 田京京，聂玉峰.度限制条件下的IC-平面图类中轻弦4-圈的存在性[J].计算机工程与应用，2016，52（20）：26-28.

[14] 张欣，刘维婵.1-平面图及其子类的染色[J].运筹学学报，2017，21（4）：135-152.

[15] 刘维婵.NIC-平面图的轻边存在性及其在定向染色中的应用[J].计算机工程与应用，2018，54（7）：62-65.

[16] 宫辰，武丽芳，刘维婵，等.不含特殊子式的符号图的选择数[J].计算机工程与应用，2018，54（16）：55-58.

[17] Zhang X，Liu G，Wu J L.Edge covering pseudo-outerplanar graphs with forests[J].Discrete Math，2012，312：2788-2799.

[18] Alon N.Combinatorial nullstellensatz[J].Journal of Combinatorics，Probability Computing，1999，8（1）：7-29.