通信网络理论基础

Information Science Institute,
Xidian University

Basic Queue Theory

M/M/-/- Type Queues

Kendall’s Notation for Queues

- *A/B/C/D/E*

- **Shorthand notation where *A*, *B*, *C*, *D*, *E* describe the queue**

- **Applicable to a large number of simple queueing scenarios**

Kendall's Notation for Queues *A/B/C/D/E*

A	Inter-arrival time distribution	
B	Service time distribution	
C	Number of servers	
D	Maximum number of jobs that can be there in the system (waiting and in service)	*Default ∞ for infinite number of waiting positions*
E	Queueing Discipline (FCFS, LCFS, SIRO etc.)	*Default is FCFS*

A and B:

M	exponential
D	deterministic
E_k	Erlangian (order k)
G	general

M/M/1 or M/M/1/∞ Single server queue with Poisson arrivals, exponentially distributed service times and infinite number of waiting positions

M/M/m型排队系统

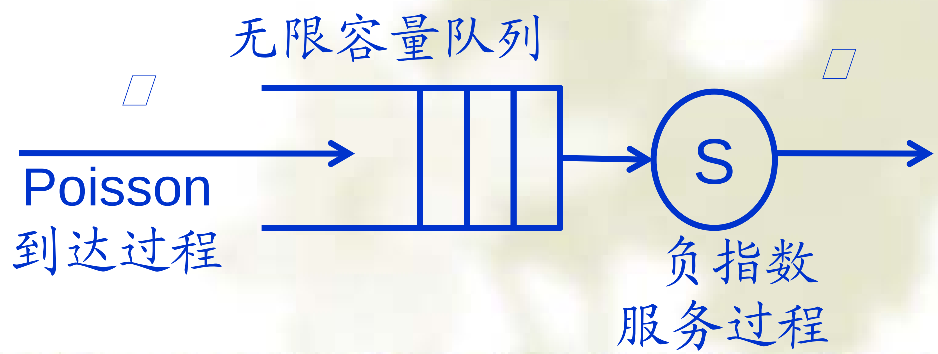
- 本课程将讨论“M/M/m”排队系统
  - 第一个字母表示到达过程的特征，M表示是无记忆的Poisson过程。
  - 第二个字母表示服务时间的概率分布，M表示指数分布，G表示一般分布，D表示确定性分布。
  - 第三个字母表示服务员的个数。有时还有第四个字母，表示队列的长度。如果没有第四个字母，则表示队列的长度无限大。

M/M/1排队系统

M/M/1排队系统

M/M/1排队系统的示意图如图所示。

- 到达过程为Poisson过程，到达率为λ;
- 系统允许排队的队长可以是无限的（系统的缓存容量无限大）；
- 服务过程为指数过程，服务速率为μ（平均服务时间为 $\frac{1}{\mu}$ ），服务员的数目为1，到达过程与服务过程相互独立。



M/M/1排队系统

- 我们将从四个方面对M/M/1排队系统的性能进行描述:
  - 到达过程的统计特性
  - 服务过程的统计特性
  - 系统中的状态转移特性
  - 系统的稳态分布

到达过程

- 在M/M/1队列中，到达过程为Poisson过程
- 设一个随机过程为$\{A(t), t\geqslant 0\}$的取值为非负整数，如果该过程满足下列条件，则称该过程为到达率为λ的Poisson(泊松)过程。
  - $A(t)$是一个计数过程，它表示在$[0,\ t)$区间内到达的用户总数，$A(0)=0$, $A(t)$的状态空间为$\{0, 1, 2, \ldots\}$。

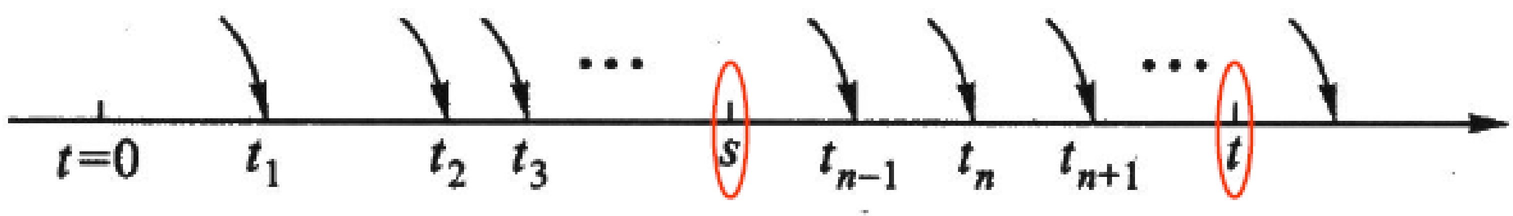


图 1－12　Poisson 到达过程示意图

到达过程

- *A*(*t*)是一个独立增量过程。即在两个不同时间区间（区间 不重叠）内到达的用户数是相互独立的。
- 任一个长度为τ的区间内，到达的用户数服从参数为λτ的Poisson分布，即

$$\boxed{P(A(t+\tau)-A(t)=n)=\frac{(\lambda\tau)^n}{n!}e^{-\lambda\tau}}$$

其均值和方差均为λτ 。

由于在区间τ内平均到达的用户数为λτ，则λ为单位时间平均到达的用户数或称为到达率。

到达过程

- Poisson过程的基本特征有：
  - 到达时间间隔相互独立，且服从指数分布，其概率密度函数为

$$\tau_n = t_{n+1} - t_n$$

$$p(\tau_n) = \lambda e^{-\lambda \tau_n}$$

其分布函数为

$$P(\tau_n < s) = 1 - e^{-\lambda s} \qquad s > 0$$

顾客到达过程为到达率为λ的Poisson过程”与说“顾客到达间隔相互独立且服从参数为λ的指数分布”是等价的。

到达过程

- 微观增量特征

对于一个任意小的区间δ≥0，将Poisson分布用Taylor级数展开，即

$$e^{-\lambda\delta}=1-\lambda\delta+\frac{(\lambda\delta)^2}{2}-\cdots$$

可得：

$$\boxed{\begin{aligned}P(A(t+\delta)-A(t)=0)&=e^{-\lambda\delta}=1-\lambda\delta+o(\delta)\\ P(A(t+\delta)-A(t)=1)&=\frac{(\lambda\delta)^1}{1!}e^{-\lambda\delta}=\lambda\delta+o(\delta)\end{aligned}}$$

$$P(A(t+\delta)-A(t)=2)=\frac{(\lambda\delta)^2}{2!}e^{-\lambda\delta}=\frac{(\lambda\delta)^2}{2!}[1-\lambda\delta+o(\delta)]=o(\delta)$$

式中，o(δ)表示δ的高阶无穷小，即 $\lim\limits_{\delta\to 0}\frac{o(\delta)}{\delta}=0$

服务过程

- M/M/1系统的服务过程服从指数分布

s_n 为第n个用户的服务时间

$$p(s_n) = \mu e^{-\mu s_n}$$

$$P(s_n < s) = 1 - e^{-\mu s} \quad s > 0$$

状态转移特性及其稳态分布

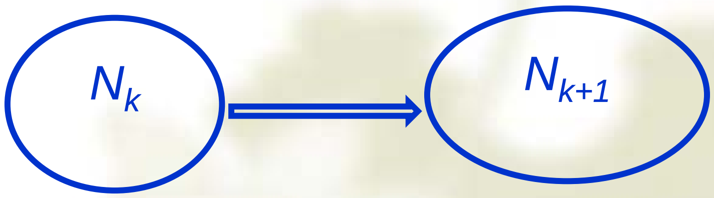
无后效性

- 令系统的状态为系统中的用户数$N(t)$，我们可以用状态转移概率来描述该系统的行为。将时间轴离散化（对$N(t)$进行采样，采样间隔为δ，δ为大于0的任意小常数），则显然该系统可用马氏链来描述。

状态转移特性及其稳态分布

- 我们将系统的一步转移概率（从第k步转移到第k+1步）定义为

$$
\begin{aligned}
P_{ij} &= P\{N_{k+1} = j \mid N_k = i, N_{k-1} = i-1, \cdots, N_0 = 0\} \\
&= P\{N_{k+1} = j \mid N_k = i\}
\end{aligned}
$$



状态转移特性及其稳态分布

- 考察离散时刻 $$0,\quad \delta,\quad 2\delta,\cdots,k\delta,\cdots$$
- 系统中的顾客数 $N_k = N(t = k\delta)$ $\qquad I_k = (k\delta,(k+1)\delta]$
- 状态转移概率为:

$$\boxed{P(A(t+\tau)-A(t)=n)=e^{-\lambda\tau}\frac{(\lambda\tau)^n}{n!}\qquad n=0,1,2,\ldots}$$

$$P\left\{I_k\text{内0到达}\right\}=e^{-\lambda\delta}=1-\lambda\delta+o\left(\delta\right)$$

$$\therefore P_{0,0}=1-\lambda\delta+o(\delta)$$

$$P\left\{I_k\text{内0个到达且0个离开}\right\}=e^{-\lambda\delta}e^{-\mu\delta}$$

$$=1-\lambda\delta-\mu\delta+o\left(\delta\right)\quad i\geq 1$$

$$\therefore P_{i,i}=1-\lambda\delta-\mu\delta+o(\delta)\quad i\geq 1$$

M/M/1排队系统

$$P\{I_k\text{内0个到达且1个离开}\} = e^{-\lambda\delta}\boxed{\mu\delta\, e^{-\mu\delta}}$$

$$= \mu\delta + o(\delta) \qquad i > 1$$

$$P\{I_k\text{内有0个到达且1个离开}\} = e^{-\lambda\delta}\boxed{\left(1-e^{-\mu\delta}\right)}$$

$$= \mu\delta + o(\delta) \qquad i = 1$$

$$\therefore \quad P_{i,i-1} = \mu\delta + o(\delta) \quad i \ge 1$$

M/M/1排队系统

$$P\{I_k\text{内1个到达且0个离开}\} = (\lambda\delta)e^{-\lambda\delta}e^{-\mu\delta}$$

$$= \lambda\delta + o(\delta) \qquad i > 0$$

$$P\{I_k\text{内1个到达且0个离开}\} = (\lambda\delta)e^{-\lambda\delta}$$

$$= \lambda\delta + o(\delta) \qquad i = 0$$

$$\therefore P_{i,i+1} = \lambda\delta + o(\delta) \qquad i \geq 0$$

$$P_{i,j} = o(\delta) \quad i\text{与} \ \ i \neq i, i+1, i-1$$

M/M/1排队系统

- 状态转移概率小结

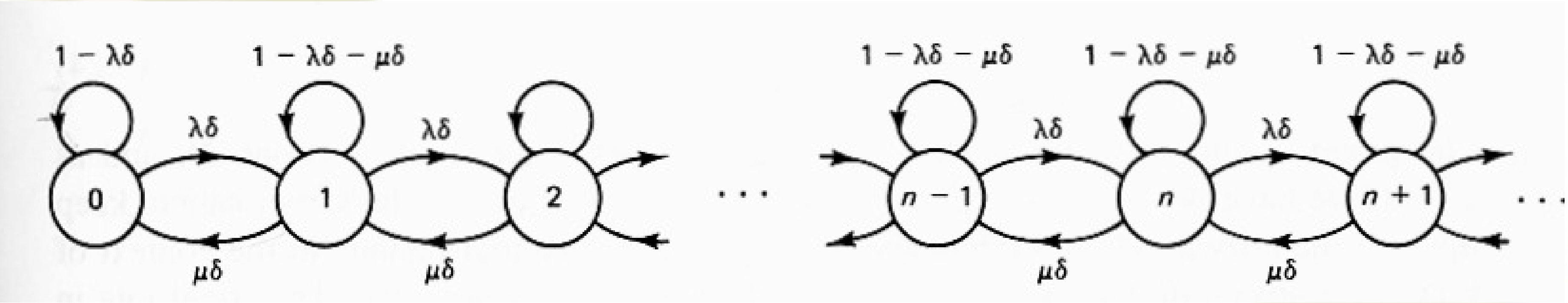
$$\boxed{\begin{aligned} P_{0,0} &= 1-\lambda\delta+o(\delta) \\ P_{i,i} &= 1-\lambda\delta-\mu\delta+o(\delta) \quad i\geq 1 \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} P_{i,i+1} &= \lambda\delta+o(\delta) \qquad i\geq 0 \\ P_{i,i-1} &= \mu\delta+o(\delta) \quad i\geq 1 \end{aligned}}$$

$$P_{i,j} = o(\delta) \quad i与\ \ i\neq i,i+1,i-1$$

$$P_{i,i+1}+P_{i,i-1}+P_{ii} = 1+o(\delta)$$

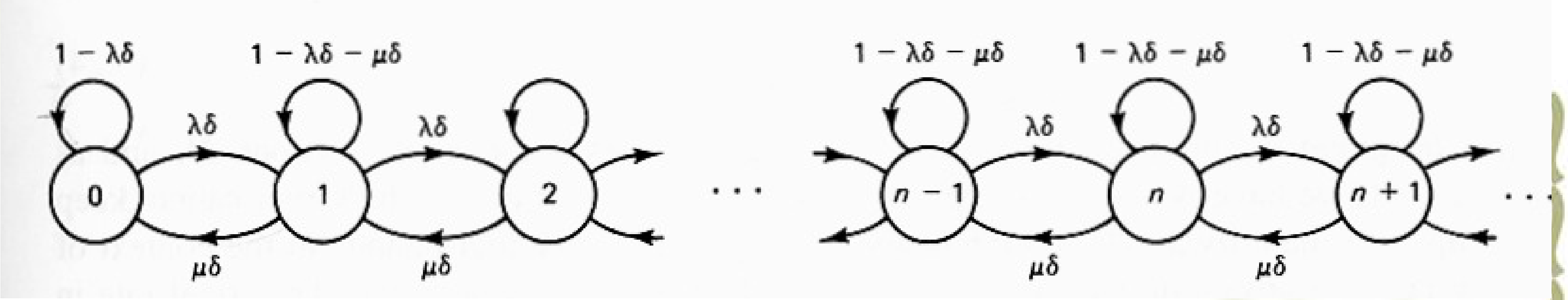
系统的状态转移图



- 设系统状态的稳态概率为

$$p_n = \lim_{k\to\infty} P\{N_k = n\} = \lim_{k\to\infty} P\{N(t) = n\}$$

M/M/1排队系统



$$\begin{cases} \lambda p_{k-1} + \mu p_{k+1} - (\lambda + \mu) p_k = 0 \\ -\lambda p_0 + \mu p_1 = 0 \end{cases}$$

$$\lambda p_{k-1} - \mu p_k = \lambda p_k - \mu p_{k+1}$$

$$\lambda p_0 - \mu p_1 = 0$$

M/M/1排队系统

- 令 $\delta \to 0$ ，则有

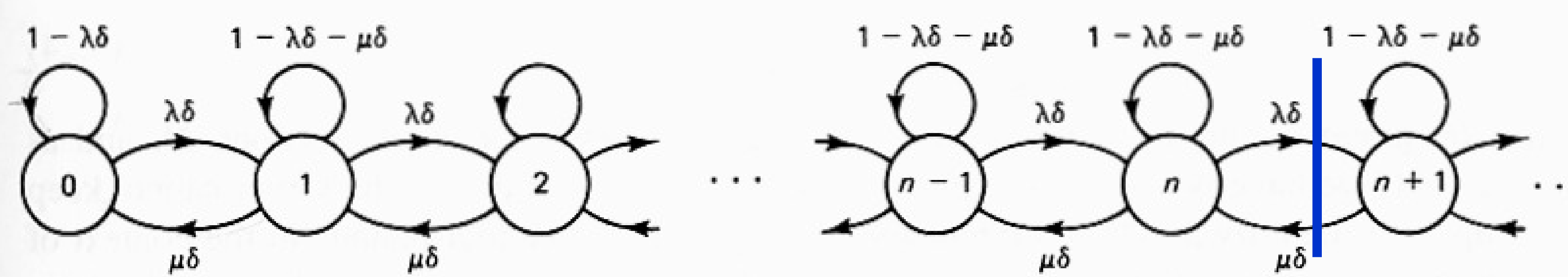
$$p_n \lambda = p_{n+1}\mu$$

生灭过程
全局平衡方程

$$p_{n+1} = \frac{\lambda}{\mu} p_n = \rho\, p_n$$

- 通过递推可得

$$p_{n+1} = \rho^{n+1} p_0 \qquad n = 0,1,2,\cdots$$



M/M/1排队系统

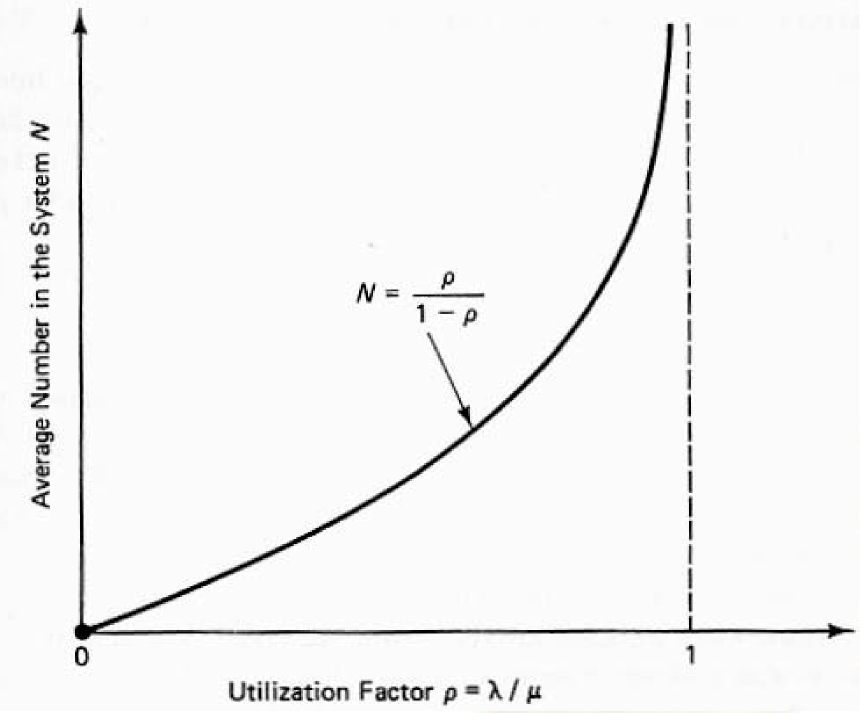
- 此外，由于 P_n 为状态**n**的概率，因而必有

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$$

- 因此，在 $\rho < 1$ 的条件下，有

$$\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n p_0 = \frac{p_0}{1-\rho} = 1$$

$$p_{n+1} = \rho^{n+1} p_0$$



- 即 $p_0 = 1-\rho$
- 系统的稳态概率为

$$p_n = \rho^n (1-\rho) \qquad n = 0,1,2,$$

几何分布

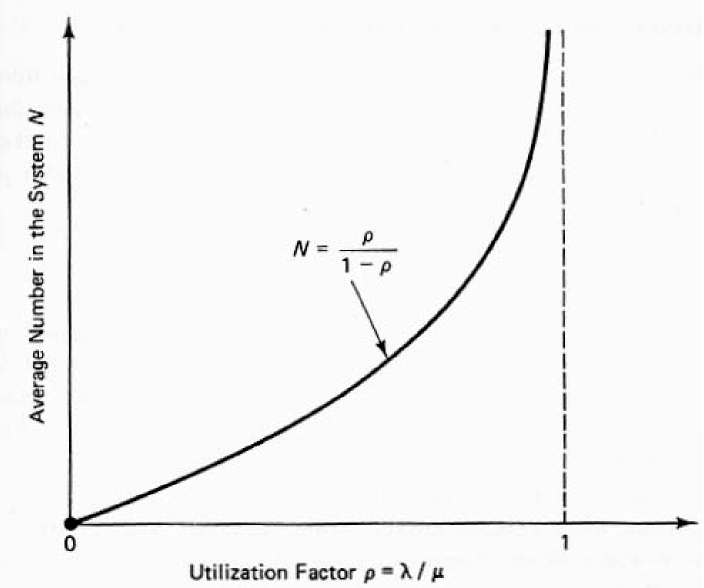
- 系统中的平均用户数为

$$N = \sum_{n=0}^{\infty} n p_n = \sum_{n=0}^{\infty} n\rho^n (1-\rho) = \rho(1-\rho)\sum_{n=0}^{\infty} n\rho^{n-1}$$

$$= \rho(1-\rho)\frac{\partial}{\partial\rho}\sum_{n=0}^{\infty}\rho^n = \rho(1-\rho)\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{1}{1-\rho}\right)$$

$$= \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{\lambda}{\mu-\lambda}$$

M/M/1排队系统



- 由于 $\rho = \lambda / \mu$ 是到达率与服务速率之比，它反映了系统的繁忙程度。当ρ 增加时，N 将随之增加；当ρ 趋于1时，N 将趋于∞。
- $\rho = 1 - p_0$ 实际上是用户等待的概率 (P_Q) ，即当用户到达系统时，发现系统中用户数不为0的（用户数≥1）的概率。
- 如果 $\rho > 1$，则系统将来不及服务，必然会导致系统中的用户数趋于无穷大。

M/M/1排队系统

- 利用Little定理，可求得用户的平均时延为

$$T=\frac{N}{\lambda}=\frac{\rho}{1-\rho}\bullet\frac{1}{\lambda}=\frac{1}{\mu-\lambda}$$

负指数分布

- 排队等待概率

$$p_Q=\sum_{\boxed{n=1}}^{\infty}p_n=\sum_{n=1}^{\infty}(1-\rho)\rho^n$$

$$=(1-\rho)\rho\sum_{n=0}^{\infty}\rho^n=\rho=\frac{\lambda}{\mu}$$

M/M/1排队系统

- 由于每个用户的平均服务时间为 $1/\mu$ ，则每个用户的平均等待时间为

$$W = T - \frac{1}{\mu} = \frac{\lambda}{\mu} \bullet \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)}$$

- 利用上式，可得到平均时延***T***的另一个表达式

$$T = W + \frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu} + \frac{\lambda}{\mu}\frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{\mu} + \frac{P_Q}{\mu - \lambda}$$

- 系统中的平均队长为

$$N_Q = \lambda W = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{\lambda}{\mu} \bullet \frac{\rho}{1-\rho}$$

$$= \frac{\lambda}{\mu - \lambda} - \frac{\lambda}{\mu} = N - \rho$$

M/M/1排队系统

- 例：设某学校有一部传真机为全校2万名师生提供传真服务。假定每份传真的传输时间服从负指数分布，其平均传输时间为3分钟，并假定每个人发送传真的可能性相同。如果希望平均排队的队长不大于5人，试问平均每人间隔多少天才可以发送一份传真？

M/M/1排队系统

- 假定要发送的传真服从Poisson到达，则该传真服务系统可用M/M/1队列来描述。已知 $\frac{1}{\mu}=3$ 分钟， $N_Q=5$ 人，要求解λ（份/天）。

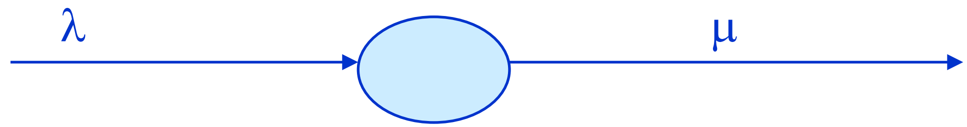
$$N_Q=\frac{\lambda}{\mu}\frac{\rho}{1-\rho}=\frac{\rho^2}{1-\rho}=5 \qquad \rho=\frac{\lambda}{\mu}=\frac{3\sqrt{5}-5}{2}\approx 0.854$$

- 系统总的可以发送的传真速率为：

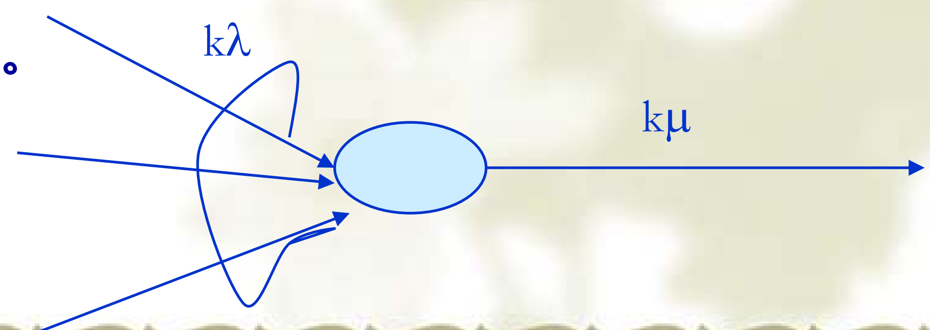
$$\lambda=\rho\Big/\frac{1}{\mu}\approx\frac{0.854}{3}\approx 0.285\text{份}/\text{分钟}\approx 410\text{份}/\text{天}$$

- 则平均每个用户要隔 $20000/410 \approx 49$ 天才可以发送一份传真。如果提供传真服务的时间不是每天24小时开放，如每天开放12小时，则间隔的时间要增加一倍。

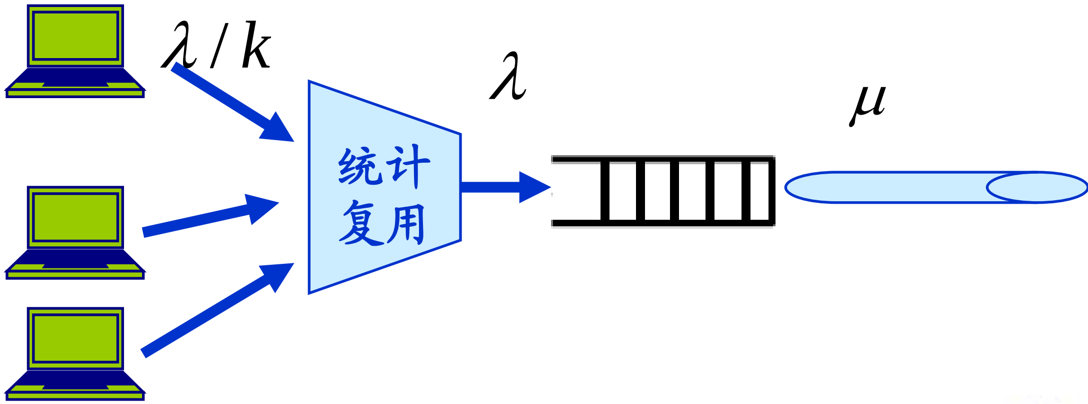
M/M/1排队系统



- 例：设有一个分组传输系统。其分组到达过程是到达率为λ的Poisson过程，分组长度服从指数分布，其均值为$1/\mu$。如果将k个这样的分组流统计复接在一个高速信道上来传输，即将输入到达率提高k倍，并将信道速率提高k倍（即服务时间变为$1/k\mu$），这相当于将k个平行的低速传输的信道统计复接到一个高速信道上。试比较两种情况下的传输时延。



M/M/1排队系统



- 原系统中的平均分组数和平均时延为

$$N = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} \qquad T = \frac{1}{\mu - \lambda}$$

- 统计复接后系统中的平均分组数和平均时延为

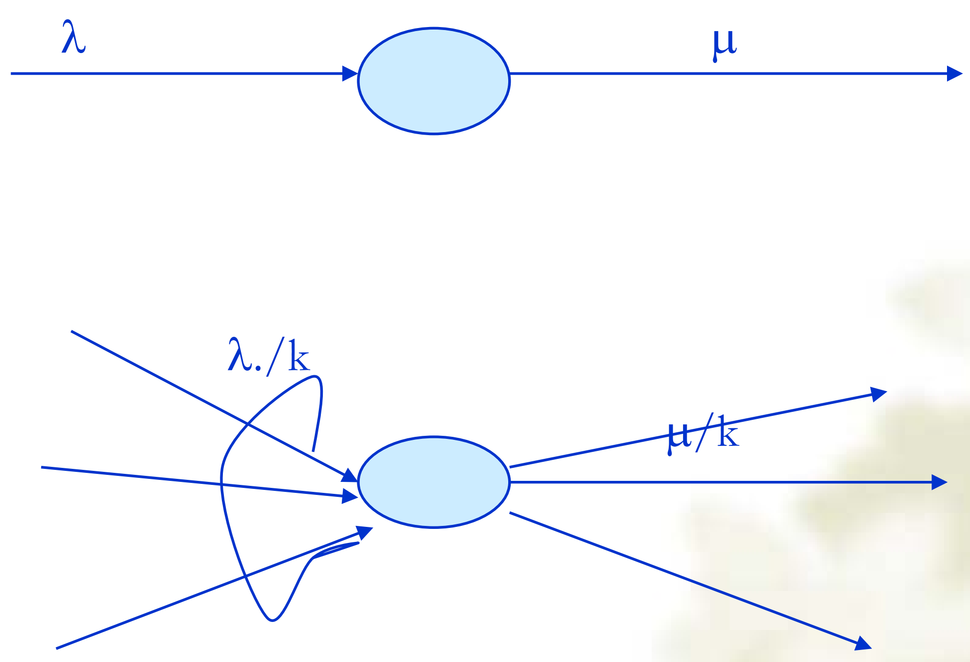
$$N' = \frac{k\lambda}{k\mu - k\lambda} = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$$

$$T' = \frac{1}{k\mu - k\lambda} = \frac{1}{k}\frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{T}{k}$$

M/M/1排队系统

- 现在反过来考虑该例子。将一个高速的分组传输信道分解成为k个信道（即采用FDM/TDM方式来传送各用户的分组）。设该高速信道的分组到达率为λ，服务时间为 $1/\mu$ ，现将信道分成k个并行的子信道，各个子信道的分组到达率为 λ/k ，其服务时间为 k/μ （因为子信道的传输速率为高速信道的 $1/k$ ），试比较分解前后的传输时延。

M/M/1排队系统



M/M/1排队系统

- 高速信道的平均时延为

$$T=\frac{1}{\mu-\lambda} \qquad N=\frac{\lambda}{\mu-\lambda}$$

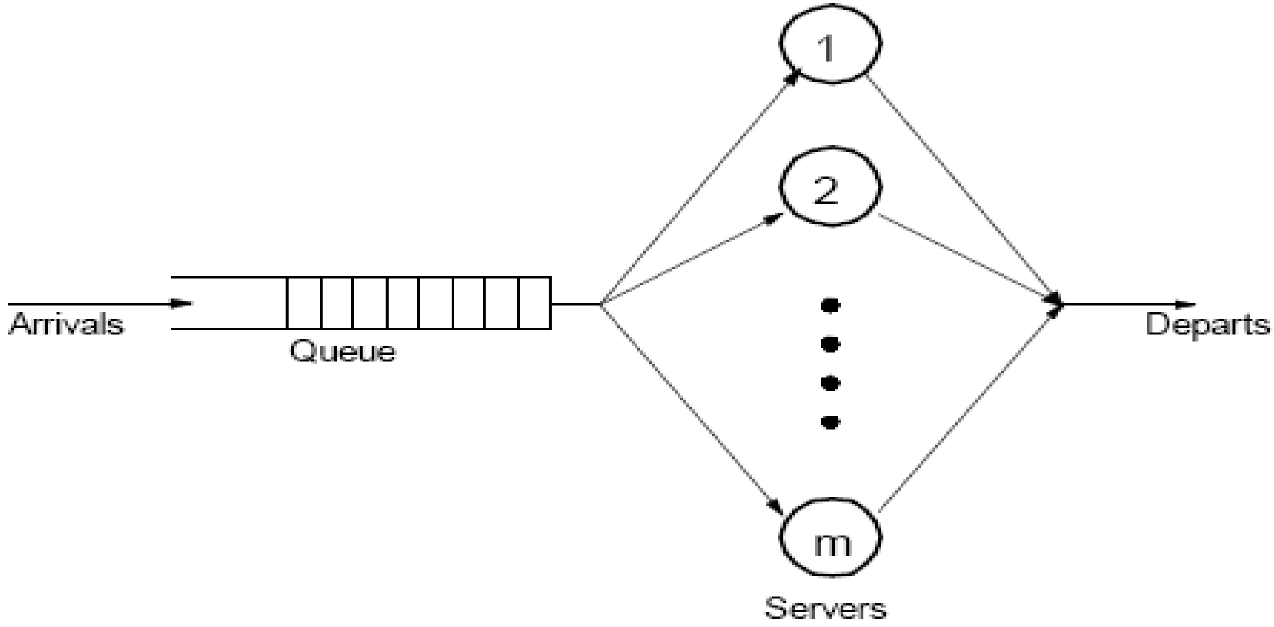
- 分解后各子信道的平均时延为

$$T^{'}=\frac{1}{\frac{\mu}{k}-\frac{\lambda}{k}}=\frac{k}{\mu-\lambda}=k\bullet T$$

- 将一个高速信道分解为*k*个低速信道后，平均时延将增加*k*倍。
- 这样分解的另一个问题是，当各个低速信道的到达率不同时，出现忙闲不均，有的信道很闲，有的信道不足以满足用户的需求。

M/M/m排队系统

- 在M/M/m排队系统中，服务员为m个。设系统的到达率为λ，每个用户的服务速率为μ。

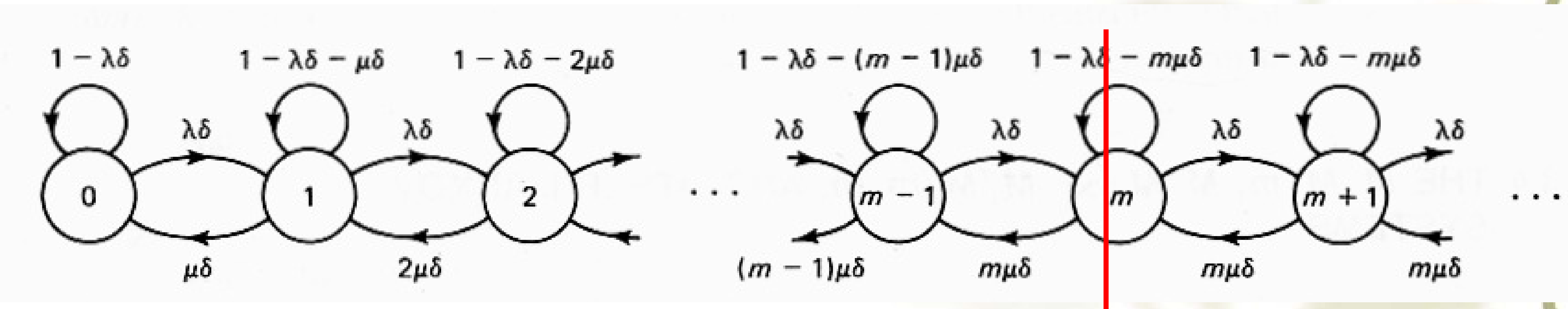


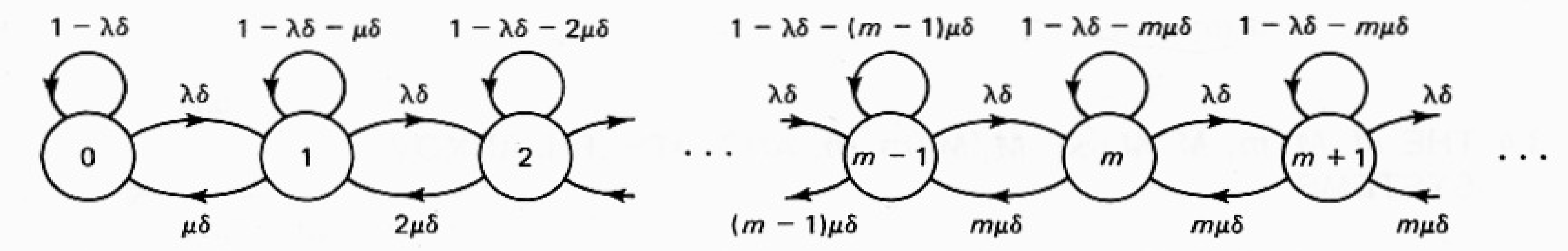
M/M/m排队系统

- 如果 $m \to \infty$ ，即为M/M/∞排队系统。
- 如果仅有0～m 状态，则为M/M/m/m排队系统（系统中的容量仅为m）。
- 分析方法同M/M/1

M/M/m排队系统

- 状态转移图
  - 当系统中的用户数 $n > m$ 时，用户离开的速率为$m\mu$（因为只有m个服务员），
  - 当 $n \le m$ 时，用户离开的速率为$n\mu$（因为顾客数小于服务员数）。





- 稳态全局平衡方程

$$\lambda p_{n-1} = n\mu p_n \quad n \le m$$

$$\lambda p_{n-1} = m\mu p_n \quad n > m$$

- 系统状态的稳态概率

$$p_n = \begin{cases} p_0 \dfrac{(m\rho)^n}{n!} & n \le m \\ p_0 \dfrac{m^m \rho^n}{m!} & n > m \end{cases}$$

推导

- 系统状态为0的稳态概率

$$p_0 = [1 + \sum_{n=1}^{m-1} \frac{(m\rho)^n}{n!} + \sum_{n=m}^{\infty} \frac{(m\rho)^n}{m!} \frac{1}{m^{n-m}}]^{-1}$$

$$\boxed{\rho = \frac{\lambda}{m\mu} < 1}$$

M/M/m排队系统

- 用户到达系统必须等待的概率（发现所有的服务员都在忙的概率）

$$P_Q = \sum_{\boxed{n=m}}^{\infty} p_n = \frac{p_0 (m\rho)^m}{(1-\rho) m!}$$

- 这就是等待制系统中需等待的概率，该公式称为Erlang C公式。它说明在具有m条线路的电话交换系统中，用户到达时发现m条线路都忙的概率。

M/M/m排队系统

- 正在排队的用户数

$$N_Q = \sum_{n=0}^{\infty} n p_{n+m} = \frac{p_0 (m\rho)^m}{m!} \sum_{n=0}^{\infty} n\rho^n$$

- 利用

$$\sum_{n=0}^{\infty} n\rho^n = \frac{\rho}{(1-\rho)^2}$$

- 可得

$$N_Q = P_Q \frac{\rho}{1-\rho}$$

M/M/m排队系统

- 用户的平均等待时延（利用Little定理）

$$W=\frac{N_Q}{\lambda}=\frac{\rho}{\lambda(1-\rho)}P_Q$$

- 每个用户的平均时延为

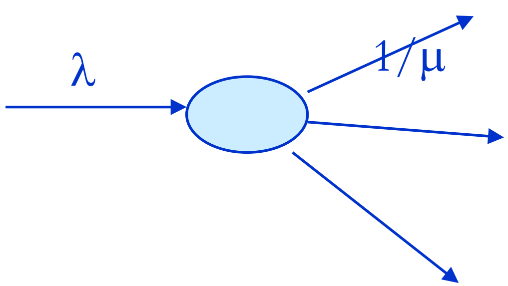
$$T=\frac{1}{\mu}+W=\frac{1}{\mu}+\frac{P_Q}{m\mu-\lambda}$$

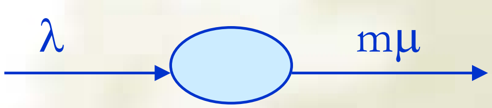
- 系统中的平均用户数为

$$N=\lambda T=\frac{\lambda}{\mu}+N_Q=m\rho+\frac{\rho P_Q}{1-\rho}$$

M/M/m排队系统

- 例题：假定有m个信道，到达率为λ的分组流动态共享这m个信道，每个信道的服务时间为 $1/\mu$ ，试求分组的平均时延T,
- 到达率为λ的分组流在服务速率为$m\mu$（输入分组在一个高速信道上传输）的单信道上传输的平均时延 $\hat{T}$ 进行比较。

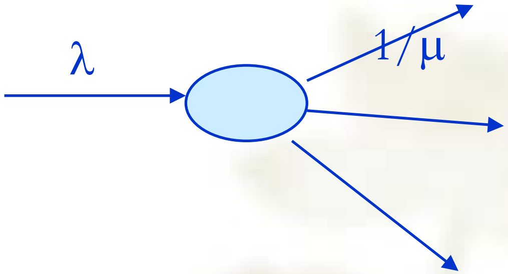




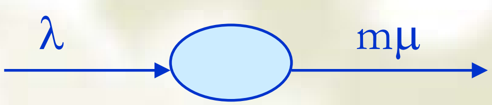
M/M/m排队系统

解 该例题的前一部分为一个服务速率为μ的M/M/m排队系统，后一部分为服务速率为$m\mu$的一个M/M/1排队系统。因此

$$T=\frac{1}{\mu}+\frac{P_Q}{m\mu-\lambda}$$



$$\hat{T}=\frac{1}{m\mu}+\frac{\hat{P}_Q}{m\mu-\lambda}$$



$$T = \frac{1}{\mu} + \frac{P_Q}{m\mu - \lambda} \qquad \hat{T} = \frac{1}{m\mu} + \frac{\hat{P}_Q}{m\mu - \lambda}$$

- 在轻负荷的情况下（ $\rho << 1$ ），$P_Q \approx 0$ $\hat{P}_Q \approx 0$
- 根据 T 和 $\hat{T}$ 的表达式有 $T/\hat{T} \approx m$ 。
- 也就是说，在轻负荷的情况下，分组的时延主要由分组的传输时延决定，m个信道的传输时延是单信道高速传输时延的m倍。

$$T = \frac{1}{\mu} + \frac{P_Q}{m\mu - \lambda} \qquad \hat{T} = \frac{1}{m\mu} + \frac{\hat{P}_Q}{m\mu - \lambda}$$

- 在重负荷的情况下（ρ接近于1），有

$$P_Q \approx 1 \qquad \hat{P}_Q \approx 1$$

因为 $\rho = \dfrac{\lambda}{m\mu}$ ，所以有 $\dfrac{1}{\mu} \ll \dfrac{1}{m\mu - \lambda}$ ，

进而有 $T / \hat{T} \approx 1$ 。

- 也就是说，在**重负荷**的情况下，分组的时延主要由分组的**等待时延**所决定，此时两者时延基本相等。

M/M/∞排队系统

$$\begin{cases} \lambda p_{n-1} = n\mu p_n & n \le m \\ \lambda p_{n-1} = m\mu p_n & n > m \end{cases}$$

- 对于M/M/∞排队系统，由于该系统是一个没有排队的系统，所以其排队队长为0。

$$\lambda p_{n-1} = n\mu p_n\,, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

so

$$p_n = p_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{1}{n!}\,, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

From the condition $\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$, we obtain

$$p_0 = \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{1}{n!}\right]^{-1} = e^{-\lambda/\mu}$$

so finally,

$$p_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{e^{-\lambda/\mu}}{n!}\,, \qquad n = 0, 1, \ldots$$

- 因而系统中用户数为泊松分布，平均用户数为

$$N = \frac{\lambda}{\mu}$$

- 利用Little定理，得分组的平均时延为

$$T = \frac{N}{\lambda} = \frac{1}{\mu}$$

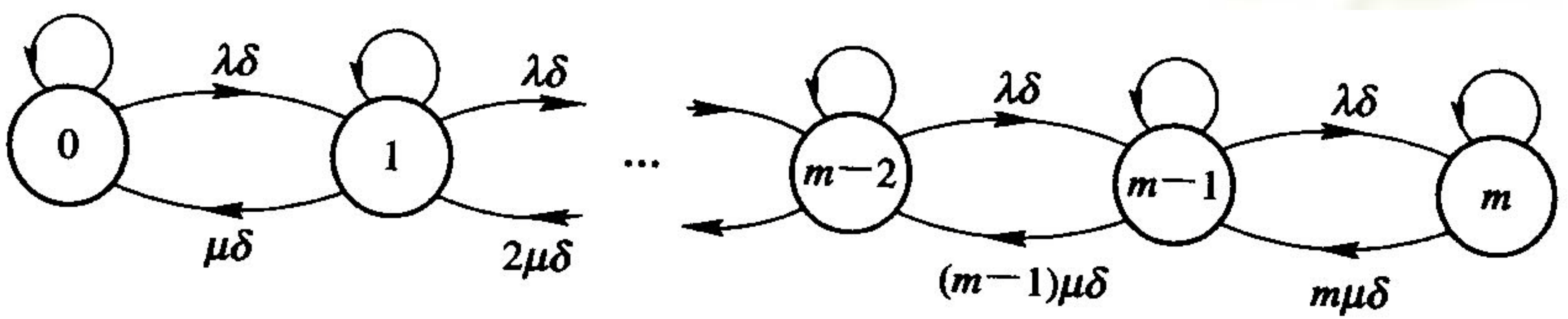
- 没有等待时延，仅有平均时延

M/M/m/m m个服务员的有损排队系统

- 对于M/M/m/m排队系统，系统中的容量为*m*。当用户进入系统时，发现*m*个服务员全忙时，就立刻离开系统（或丢失）。这种情况主要用于电路交换系统。比如，当我们打长途电话时，假定仅有*m*条线路可用，如果我们发现线路全忙，我们就会过一会再打或以后再打，这就相当于我们离开系统。这是一种呼损制系统，而不像M/M/m是一个等待制系统。

M/M/m/m排队系统

- 在呼损制系统中，感兴趣的主要参数是呼损率（阻塞概率Blocking Probability）。所谓呼损率就是新到用户发现系统所有线路都忙的概率，也就是他的呼叫被拒绝的概率。

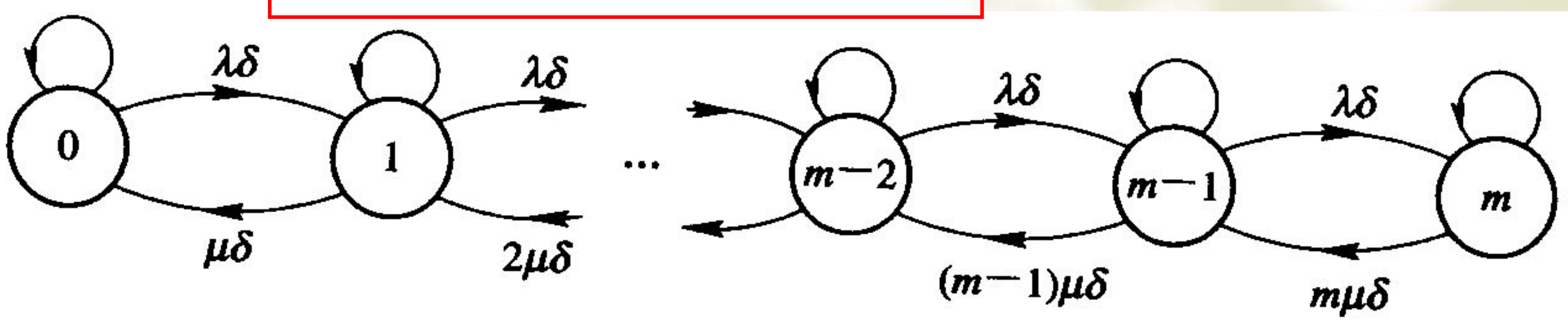


M/M/m/m排队系统

$$\boxed{\lambda p_{n-1} = n\mu p_n \qquad n = 1, 2, \ldots, m}$$

$$\boxed{p_n = p_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{1}{n!}}$$

$$\boxed{p_0 = \left[\sum_{n=0}^{m} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{1}{n!}\right]^{-1}}$$



M/M/m/m排队系统

- 呼损率就是所有m个服务员都忙的概率，即

$$B = p_m = \frac{\left(\lambda/\mu\right)^m / m!}{\sum_{n=0}^{m} \left(\lambda/\mu\right)^n / n!}$$

$$\boxed{p_n = p_0\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{1}{n!}}$$

$$\boxed{p_0 = \left[\sum_{n=0}^{m}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{1}{n!}\right]^{-1}}$$

- 该式为Erlang B，也适用于服务时间均值为 $1/\mu$ 的一般性分布的系统。

M/M/m/m排队系统

- 利用Erlang B公式可以确定每个服务员的繁忙程度 η

$$\eta = \frac{(1-B)}{m}\frac{\lambda}{\mu} = (1-B)\rho$$

- 如果每个服务员对应一个物理信道，则繁忙程度就对应信道利用率。

M/M/m/m排队系统

由于式（3-61）计算复杂，可以用表格的形式给出。*m*、□、*B*、□的关系的简表如表所示。

$$B = p_m = \frac{(\rho)^m \big/ m!}{\sum_{n=0}^{m} (\rho)^n \big/ n!}$$

B	**1%**		**5%**		**10%**		**20%**	
m	ρ	η	ρ	η	ρ	η	ρ	η
1	0.010	1%	0.053	5%	0.111	10%	0.25	20%
5	0.272	1.66%	0.444	42.2%	0.576	51.9%	0.802	64.2%
10	0.446	44.2%	0.622	59.1%	0.751	67.6%	0.969	77.5%
15	0.541	53.5%	0.708	67.2%	0.832	74.9%	1.041	83.4%
20	0.602	59.5%	0.762	72.9%	0.858	79.3%	1.081	86.5%

M/M/m/m排队系统

例3.8 假定系统的服务员数分别为m1=10和m2=20，每次呼叫的平均时间为3min，要求系统的呼损率小于5%，试求系统支持的最大呼叫到达率和服务员的繁忙程度。

解: 根据表3-1可以查出，

m1=10时对应的□ 1=0.622，□ 1=59.1%，

m2=20时对应的□ 2=0.762，□ 2=72.9% 。

M/M/m/m排队系统

$$\rho = \frac{\lambda}{m\mu}$$

$$\lambda = m\mu\,\rho = {m\rho} \Big/ {\frac{1}{\mu}}$$

$$\lambda_1 = {10\times 0.622} \big/ {3} \approx 2.07\text{呼叫/分钟}$$

$$\lambda_2 = {20\times 0.762} \big/ {3} \approx 5.08\text{呼叫/分钟}$$

m1=10时对应:

□ 1=0.622,

□ 1=59.1%,

m2=20时对应:

□ 2=0.762,

□ 2=72.9% 。

M/M/m/m排队系统

- 如果系统要求呼损率越小，则系统可承担的负荷越小，各服务员的繁忙程度就越低。
- 在相同的呼损率条件下，服务员越多，各服务员的繁忙程度越高，因而系统承担的负荷越大。这也反映了统计复用带来的好处。
- 在**M/M/m/m**系统中 $\rho = \frac{\lambda}{m\mu}$ 可以大于**1**，此时系统不能服务的到达都将丢失。

作业

3.5
3.6
3.10
3.11