第一章 传输线理论

- §1.1 传输线方程及其解
- §1.2 均匀无耗长线的工作状态
- §1.3 圆图及阻抗匹配
- §1.4 波导与同轴线
- §1.5 平面传输线

§1.4 波导与同轴线

波导与同轴线是封闭的微波传输系统。

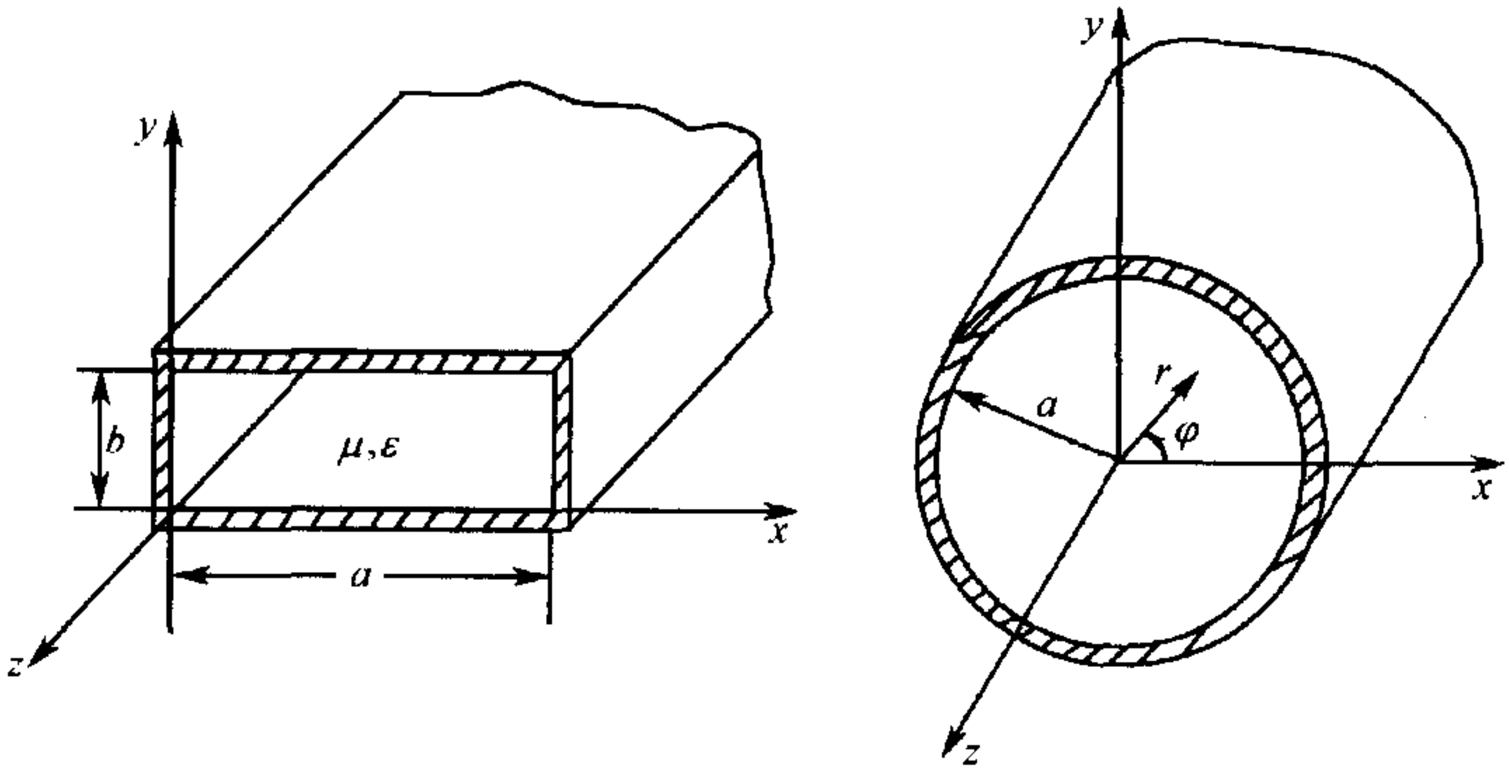
对于波导传输线，只能用场理论分析；

对于同轴线，由于是双导体结构，线上电压电流具有确切定义，其传输的主模式是 TEM 波，因此既可以用长线理论分析，也可用场理论分析。

·用电磁场理论，建立导波系统的一般理论及模式电压和模式电流的概念，导出与长线理论中的传输线方程相类似的**广义传输线方程**。这样无论是 TEM 波、还是非 TEM 波传输线，在广义传输线理论下，其传输线方程具有相同的形式。

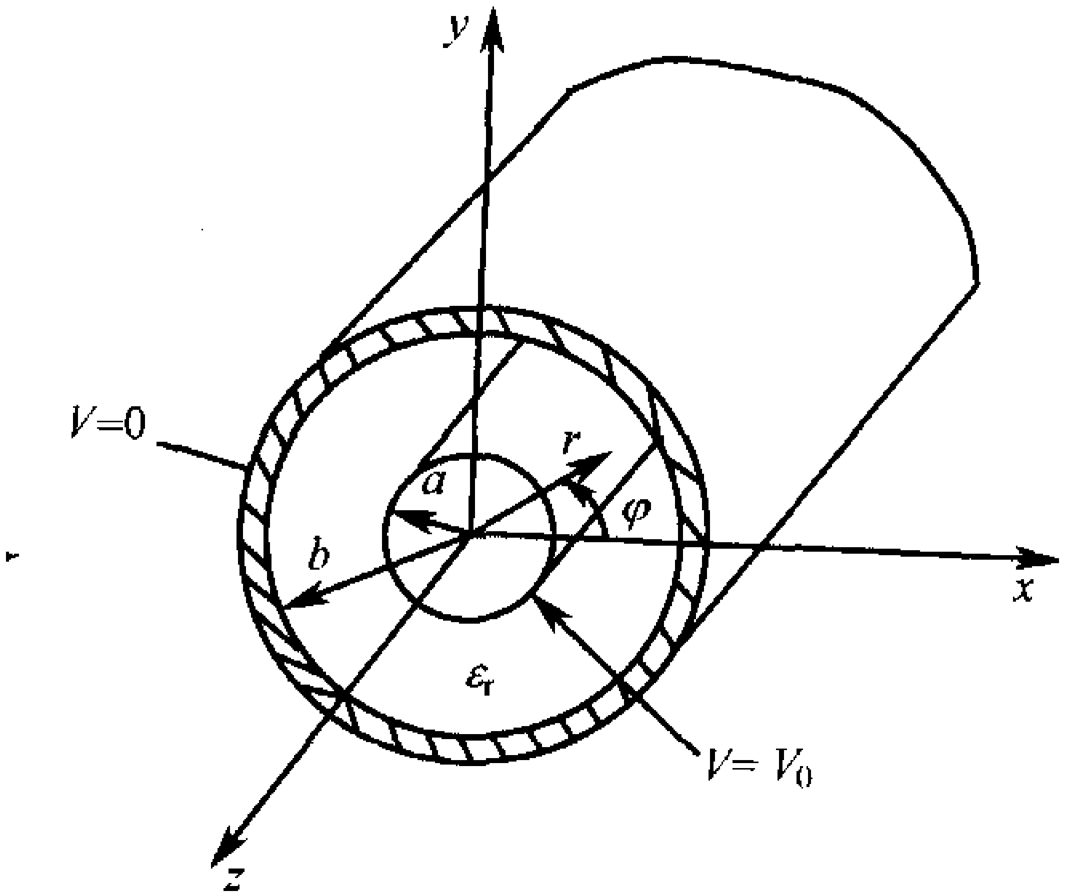
·讨论波导与同轴线的传输特性。

§1.4 波导与同轴线



(a) 矩形波导　　(b) 圆形波导

μ：磁导率，ε：介电常数，决定着介质中电磁能量的积蓄和消耗，当介质存在损耗时，μ和ε应该是复数。



(c) 同轴线的结构

一、理想导波系统的一般分析

1、横、纵场分量的关系

理想导波系统中的电磁场，可以直接对麦克斯韦方程求解，下面通过麦克斯韦方程组导出横纵向场分量间的关系及所满足的方程。

设所研究的导波系统由无限长理想导体和各向同性的理想介质构成，并且介质是均匀填充于系统中。对于按正弦规律变化的电磁场，其满足无源区的麦克斯韦方程：

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \mathrm{j}\omega\varepsilon\boldsymbol{E}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\mathrm{j}\omega\mu\boldsymbol{H}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{H} = 0$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0$$

用广义柱坐标系（u_1,u_2,z），其中u_1及u_2为导波系统横截面上的坐标，z为纵向坐标。场强的纵向分量用 $E_z(u_1,u_2,z)$和$H_z(u_1,u_2,z)$表示，场强的横向分量用$E_t(u_1,u_2,z)$和$H_t(u_1,u_2,z)$表示，梯度算子为：$\nabla=\nabla_t+a_z\frac{\partial}{\partial z}$，则场强矢量可写成:

$$\boldsymbol{E}(u_1,u_2,z)=\boldsymbol{E}_t(u_1,u_2,z)+\boldsymbol{E}_z(u_1,u_2,z)=\boldsymbol{E}_t+\boldsymbol{E}_z$$

$$\boldsymbol{H}(u_1,u_2,z)=\boldsymbol{H}_t(u_1,u_2,z)+\boldsymbol{H}_z(u_1,u_2,z)=\boldsymbol{H}_t+\boldsymbol{H}_z$$

由旋度方程可得

$$\nabla_t\times\boldsymbol{H}_t=j\omega\varepsilon\boldsymbol{E}_z$$

$$\nabla_t\times\boldsymbol{H}_z+\boldsymbol{a}_z\times\frac{\partial\boldsymbol{H}_t}{\partial z}=j\omega\varepsilon\boldsymbol{E}_t$$

$$\nabla_t\times\boldsymbol{E}_t=-j\omega\mu\boldsymbol{H}_z$$

$$\nabla_t\times\boldsymbol{E}_z+\boldsymbol{a}_z\times\frac{\partial\boldsymbol{E}_t}{\partial z}=-j\omega\mu\boldsymbol{H}_t$$

$$\left(k^2+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\boldsymbol{E}_t=\frac{\partial}{\partial z}\nabla_t E_z+\mathrm{j}\omega\mu\boldsymbol{a}_z\times\nabla_t H_z$$

$$\left(k^2+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\boldsymbol{H}_t=\frac{\partial}{\partial z}\nabla_t H_z-\mathrm{j}\omega\varepsilon\boldsymbol{a}_z\times\nabla_t E_z$$

可得各场量所满足的矢量及标量亥姆霍兹方程为

$$\nabla^2\boldsymbol{E}_t+k^2\boldsymbol{E}_t=0 \qquad \nabla^2\boldsymbol{H}_t+k^2\boldsymbol{H}_t=0$$

$$\nabla^2 E_z+k^2 E_z=0 \qquad \nabla^2 H_z+k^2 H_z=0$$

式中 $k=\omega\sqrt{\mu\varepsilon}$ 为电磁波在无限媒质中的波数，由分离变量法可知，E_z、H_z的解可表示成 $f(u_1,u_2)e^{-\gamma z}$，其中 $\gamma=\sqrt{k_c^2-k^2}$ 称为导波的传播常数，这样横、纵场量的关系可表示成：

$$\boldsymbol{E}_t = \frac{1}{k_c^2}(-\gamma\nabla_t E_z + j\omega\mu\boldsymbol{a}_z \times \nabla_t H_z)$$

$$\boldsymbol{H}_t = \frac{1}{k_c^2}(-\gamma\nabla_t H_z - j\omega\varepsilon\boldsymbol{a}_z \times \nabla_t E_z)$$

$$\nabla_t^2 \boldsymbol{E}_t + k_c^2 \boldsymbol{E}_t = 0 \qquad \nabla_t^2 \boldsymbol{H}_t + k_c^2 \boldsymbol{H}_t = 0$$

$$\nabla_t^2 E_z + k_c^2 E_z = 0 \qquad \nabla_t^2 H_z + k_c^2 H_z = 0$$

纵向解

$\Rightarrow E_Z$ $\Rightarrow H_Z$

波动方程

横向解

$$\begin{bmatrix} E_{u1} \\ E_{u2} \\ H_{u1} \\ H_{u2} \end{bmatrix} = \frac{1}{k_c^2} \begin{bmatrix} -\gamma & 0 & 0 & -j\omega\mu \\ 0 & -\gamma & j\omega\mu & 0 \\ 0 & j\omega\varepsilon & -\gamma & 0 \\ -j\omega\varepsilon & 0 & 0 & -\gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{h_1}\frac{\partial E_Z}{\partial u_1} \\ \frac{1}{h_2}\frac{\partial E_Z}{\partial u_2} \\ \frac{1}{h_1}\frac{\partial H_Z}{\partial u_1} \\ \frac{1}{h_2}\frac{\partial H_Z}{\partial u_2} \end{bmatrix}$$

2、导行波波形的分类

导行波的波形是指能够单独在导波系统中存在的电磁场结构形式，也叫传输模式。

导波横向场分量只与纵向场分量有关，因此可根据导行波中是否存在纵向场分量，对导行波的波形进行分类。

（1）横电磁波（TEM 波）

此传输模式没有电磁场的纵向场量，即 $E_z=H_z=0$，要使 E_t 和 H_t 不为零，必须有 $k_c=0$ 即

$$\gamma=\sqrt{k_c^2-k^2}=j\beta=jk$$

TEM 波的存在条件：横电磁波在导波系统横截面上的场分布与相同条件下静止场的分布形式一样。这说明只有能够建立静止场的导波系统，才能传输 TEM 波。因此 TEM 波模式只能存在于多导体传输系统中。

（2）横电波（TE波）或磁波（ H 波）

此波形的特征是$E_z=0$，$H_z\neq0$，所有的场分量可由纵向磁场分量H_z求出。

（3）横磁波（TM波）或电波（E波）

此波形的特征是$E_z\neq0$，$H_z=0$，所有的场分量可由纵向电场分量 E_z求出。

在某些特殊的场合，单独用 TE 波或 TM 波不能满足所有的边界条件，但它们的线性组合总能满足这些特殊要求，并且提供一个完整而普遍的解，这时的波称为混合波。当然还有别的分类方法，但按上述方法分类的三种波形是最实用的。

3、导行波的传输特性

（1）截止波长与传输条件

导行波的场量都有因子$e^{-\gamma z}$（沿正z轴方向传输），$\gamma=\alpha+j\beta$为传播常数，且 $\gamma^2=k_c^2-k^2$

对于理想导波系统，$k=\omega\sqrt{\mu\varepsilon}$ 为实数，而 k_c是由导波系统横截面的边界条件决定的，也是实数。这样随着工作频率的不同，γ^2可能有下述三种情况：

① $\gamma^2<0$，即 $\gamma=j\beta$，此时导行波的场为

$$E=E(u_1,u_2)\,e^{j(\omega t-\beta z)}$$

这是沿正 z 轴方向无衰减传输的行波，故称其为传输状态。

② $\gamma^2>0$，即 $\gamma=\alpha$，此时导行波的场为

$$E=E(u_1,u_2)\,e^{-\alpha z}\,e^{j\omega t}$$

这是沿 z 轴以指数规律衰减的波，称其为截止状态。

③ $\gamma=0$，这是介于传输与截止之间的一种状态，称其为临界状态，它是决定电磁波能否在导波系统中传输的分水岭，这时由 $k_c^2=k^2$ 所决定的频率f_c和波长λ_c分别称为截止频率和截止波长，并且有

$$f_c=\frac{k_c}{2\pi\sqrt{\mu\varepsilon}}\quad,\quad \lambda_c=\frac{v}{f_c}=\frac{2\pi}{k_c}$$

其中 $v=1/\sqrt{\mu\varepsilon}$ 为无限介质中的光速，而 k_c 称为截止波数

导波系统传输 TE 波和 TM 波的条件为：

$f>f_c$　或　$\lambda<\lambda_c$

截止条件为　$f<f_c$　或　$\lambda>\lambda_c$

对于TEM波，由于k_c=0，即 f_c=0，因此在任何频率下，TEM 都能满足 $f>f_c$=0的传输条件，均是传输状态。

（2）波导波长

理想导波系统中的相波长称为波导波长，并记为λ_g，根据相波长的定义可知

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda_g} \quad \text{或} \quad \lambda_g = \frac{2\pi}{\beta}$$

在传输状态下，$\gamma = j\beta$，$k_c = \frac{2\pi}{\lambda_c}, k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{\lambda_0\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}}$

可得

$$\beta = k\sqrt{1-\left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2} = \frac{2\pi}{\lambda}\sqrt{1-\left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2}$$

$$\lambda_g = \frac{\lambda}{\sqrt{1-\left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2}} = \frac{\lambda_0/\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}}{\sqrt{1-(\lambda_0/\lambda_c)^2(1/\mu_r\varepsilon_r)}}$$

对于TEM波λc=∞，$\lambda_g = \lambda_p = \lambda$

（3）相速度、群速度和色散

①相速度

根据相速度的定义：$v_p=\omega/\beta$ 可得

TE 和 TM 波相速度：

$$v_p = v\Big/\sqrt{1-\left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2}$$

式中 $v=c/\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}$

对于 TEM 波($\lambda_c\to\infty$)

$$v_p=v=c/\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}$$

显然，TE和TM波相速度是大于光速的，相速度不是物质的真实运动速度，所以和相对论不矛盾。

② 群速度

群速是指一群具有相近的ω和β的波群在传输过程中的“共同”速度，或者说是已调波包络的速度，从物理概念上来看，这种速度就是能量的传播速度：

$$v_g = \frac{d\omega}{d\beta} = v\sqrt{1-\left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2}$$

可见，群速 $v_g < v$，并且 $v_g \cdot v_p = v^2$

对于 TEM 波($\lambda_c \to \infty$)，有 $v_g = v_p = v$

③ 色散

TE和TM波的相速和群速都随波长（即频率）而变化，称此现象为“色散”。因此TE和TM波（即非TEM波）称为“色散”波，而 TEM 波的相速和群速相等，且与频率无关，称为“非色散”波。

（4）波阻抗

导波系统中，传输模式的横向电场与横向磁场之比称为导行波的波阻抗。

$$Z_{\mathrm{TE}}=\frac{E_u}{H_v}=\frac{-E_v}{H_u}=\frac{\omega\mu}{\beta}=\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\frac{k}{\beta}=\frac{\eta}{\sqrt{1-\left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2}}$$

$$Z_{\mathrm{TM}}=\frac{E_u}{H_v}=\frac{-E_v}{H_u}=\frac{\beta}{\omega\varepsilon}=\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\frac{\beta}{k}=\eta\sqrt{1-\left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2}$$

$$Z_{\mathrm{TEM}}=\eta=120\pi\sqrt{\frac{\mu_r}{\varepsilon_r}}$$

（5）传输功率

$$P_0=\mathrm{Re}\int_s\frac{1}{2}(E\times H^*)ds=\frac{|z|}{2}\int_s|H_t|^2ds$$

模式电压和模式电流

除了可以使用纵向法对传输模式求解外，还可以使用横向分量求解，该方法称为辅助标位函数法。

1、TM波

$$E_t = -\nabla_t \underline{\Phi}(u_1, u_2, z)$$

其中 $\underline{\Phi}$ 称为电位函数：$\underline{\Phi}(u_1, u_2, z)$=U(z) $\Phi(u_1, u_2)$

$$E_t = -\,U(z)\,\nabla_t\,\Phi$$

$$H_t = I(z)\,\nabla_t\,\Phi \times a_z$$

$$E_z = -\,\frac{I(z)}{jw\varepsilon}\,\nabla_t^2\,\Phi$$

其中U(z) 称为模式电压， I(z) 称为模式电流。

由： $\nabla_t^2\,\Phi + k_c^2\Phi=0 \;\;\rightarrow\;\; \Phi$。

模式电压和模式电流

由：

$$\frac{d^2U(z)}{dz^2}-\gamma^2\mathrm{U(z)}=0$$

$$\frac{d^2I(z)}{dz^2}-\gamma^2\mathrm{I(z)}=0$$

得：

$$\mathrm{U(z)}=A_1e^{-j\beta z} \qquad \mathrm{I(z)}=\frac{A_1}{z_{TM}}e^{-j\beta z}$$

由Φ，U(z)和I(z)即可求得TM波全部场分量表达式。

模式电压和模式电流

同理可得TE波和TEM波的模式电压和模式电流

TE波：

$$\nabla_t^2 \Psi + k_c^2 \Psi = 0 \quad \rightarrow \quad \Psi$$

$$\frac{d^2U(z)}{dz^2} - \gamma^2 U(z) = 0 \quad \rightarrow \quad U(z) = A_1 e^{-j\beta z}$$

$$\frac{d^2I(z)}{dz^2} - \gamma^2 I(z) = 0 \quad \rightarrow \quad I(z) = \frac{A_1}{z_{TE}} e^{-j\beta z}$$

TEM波：

$$\nabla_t^2 \Phi = 0 \quad \rightarrow \quad \Phi$$

$$\frac{dU(z)}{dz} = -j\omega\mu I(z) \quad \rightarrow \quad U(z) = A_1 e^{-j\beta z}$$

$$\frac{dI(z)}{dz} = -j\omega\varepsilon U(z) \quad \rightarrow \quad I(z) = \frac{A_1}{z_{TE}} e^{-j\beta z}$$

4、边界条件

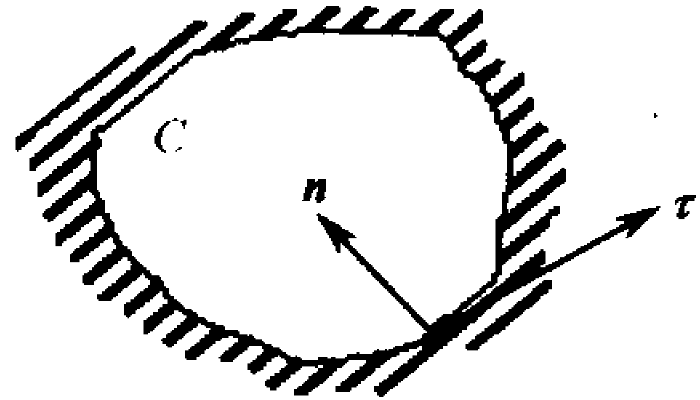
无论是用纵向分量法求解导行波，还是用位函数法求解导行波，最终是根据导行系统的边界条件确定k_c和积分常数的。对于由理想导体构成的导行系统，其横截面如图所示，边界条件为：

$$\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}=0$$

$$\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{J}_s$$

$$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{D}=\rho_s$$

$$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{B}=0$$



对于 TM 波，其边界条件为 $E_z\big|_c=0$

对于 TE 波，其边界条件为 $\left.\dfrac{\partial H_z}{\partial n}\right|_c=0$

对于 TEM 波，其边界条件为 $E_\tau\big|_c=0$