第 8 章　数字信号的最佳接收

返回主目录

第8章 数字信号的最佳接收

8.1匹 配 滤 波 器

在数字通信系统中，滤波器是其中重要部件之一， 滤波器特性的选择直接影响数字信号的恢复。在数字信号接收中，滤波器的作用有两个方面，第一是使滤波器输出有用信号成分尽可能强；第二是抑制信号带外噪声，使滤波器输出噪声成分尽可能小，减小噪声对信号判决的影响。

通常对最佳线性滤波器的设计有两种准则：**一种是使滤波器输出的信号波形与发送信号波形之间的均方误差最小**，由此而导出的最佳线性滤波器称为**维纳滤波器；另一种是使滤波器输出信噪比在某一特定时刻达到最大**，由此而导出的最佳线性滤波器称为**匹配滤波器**。在数字通信中，匹配滤波器具有更广泛的应用。

由第7章分析的数字信号解调过程我们知道，解调器中抽样判决以前各部分电路可以用一个线性滤波器来等效，接收过程等效原理图如图 8 - 1 所示。图中，s(t)为输入数字信号，信道特性为加性高斯白噪声信道，n(t)为加性高斯白噪声，H(ω)为滤波器传输函数。

由数字信号的判决原理我们知道，抽样判决器输出数据正确与否，与滤波器输出信号波形和发送信号波形之间的相似程度无关，也即与滤波器输出信号波形的失真程度无关，而**只取决于抽样时刻信号的瞬时功率与噪声平均功率之比**，即**信噪比**。信噪比越大，错误判决的概率就越小；反之，信噪比越小，错误判决概率就越大。

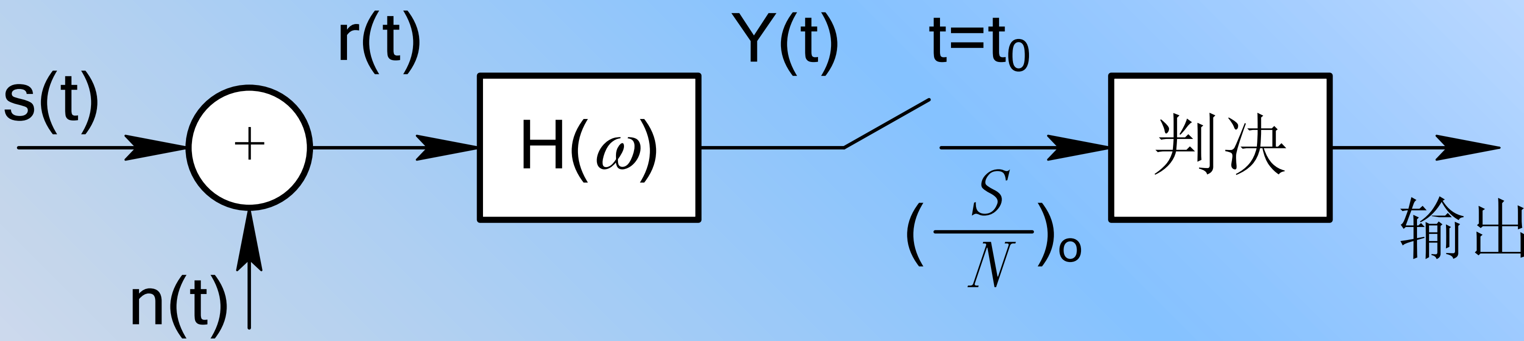

图 8 – 1 数字信号接收等效原理图

因此，为了使错误判决概率尽可能小，就要选择滤波器传输特性使滤波器输出信噪比尽可能大的滤波器。当选择的滤波器传输特性使输出信噪比达到最大值时，该**滤波器就称为输出信噪比最大的最佳线性滤波器**。下面就来分析当滤波器具有什么样的特性时才能使输出信噪比达到最大。

分析模型如图 8 - 1 所示。设输出信噪比最大的最佳线性滤波器的传输函数为H(ω), 滤波器输入信号与噪声的合成波为

$$r(t)=s(t)+n(t) \qquad (8.1 - 1)$$

式中，s(t)为输入数字信号，其频谱函数为S(ω)。n(t)为高斯白噪声，其双边功率谱密度为 $\dfrac{n_0}{2}$。

由于该滤波器是线性滤波器，满足线性叠加原理，因此滤波器输出也由输出信号和输出噪声两部分组成，即

$$y(t)=s_o(t)+n_o(t) \qquad (8.1-2)$$

式中输出信号的频谱函数为$S_o(\omega)$，其对应的时域信号为

$$s_0(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}s_0(w)e^{jwt}dw=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}s(w)H(w)e^{jwt}dw$$

(8.1-3)

滤波器输出噪声的平均功率为

$$N_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}P_{n_0}(w)dw=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}p_{n_i}(w)\left|H(w)\right|^2dw$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{n_0}{2}\left|H(w)\right|^2dw=\frac{n_0}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|H(w)\right|^2dw$$

(8.1-4)

在抽样时刻t_0，线性滤波器输出信号的瞬时功率与噪声平均功率之比为

$$r_0=\frac{\left|s_0(t_0)\right|^2}{N_0}=\frac{\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}H(w)s(w)e^{jwt_0}dw\right|^2}{\frac{n_0}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|H(w)\right|^2dw} \qquad (8.1—5)$$

由式(8.1 - 5)可见， **滤波器输出信噪比r_o与输入信号的频谱函数S(ω)和滤波器的传输函数H(ω)有关**。在输入信号给定的情况下，输出信噪比r_o只与滤波器的传输函数H(ω)有关。使输出信噪比r_o达到最大的传输函数H(ω)就是我们所要求的最佳滤波器的传输函数。式(8.1 - 5)是一个泛函求极值的问题，采用施瓦兹(Schwartz)不等式可以容易地解决该问题。

施瓦兹不等式为:

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(w)Y(w)dw\right|^2 \le \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|X(w)\right|^2 dw \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|Y(w)\right|^2 dw \qquad (8.1-6)$$

式中， X(ω)和Y(ω)都是实变量ω的复函数。 当且仅当

$$X(\omega)=KY^*(\omega) \qquad (8.1-7)$$

时式(8.1 - 6)中**等式才能成立**。式(8.1 - 7)中K为任意常数。

将施瓦兹不等式用于式(8.1 - 5)， 并令

$$X(\omega)=H(\omega) \qquad (8.1-8)$$

$$Y(\omega)=S(\omega)e^{jwt_0} \qquad (8.1-9)$$

可得:

$$r_0=\frac{\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}H(w)S(w)e^{jwt_0}dw\right|^2}{\frac{n_0}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|H(w)|^2dw}$$

$$\le\frac{\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}|H(w)|^2dw\int_{-\infty}^{\infty}\left|S(w)e^{jwt_0}\right|^2dw}{\frac{n_0}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|H(w)|^2dw}=\frac{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|S(w)|^2dw}{\frac{n_0}{2}} \qquad （8.1\_10）$$

根据帕塞瓦尔定理有

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|S(w)|^2dw=\int_{-\infty}^{\infty}s^2(t)dt=E \qquad (8.1 - 11)$$

式中E为输入信号的能量。代入式(8.1 - 10)有：

$$r_0 \le \frac{2E}{n_0} \qquad (8.1 - 12)$$

式(8.1 - 12)说明，线性滤波器所能给出的最大输出信噪比为

$$r_{0\max} = \frac{2E}{n_0} \qquad (8.1 - 13)$$

根据施瓦兹不等式中等号成立的条件X(ω)=KY*(ω)，可得不等式(8.1 - 10)中等号成立的条件为

$$\mathbf{H(\omega)=KS^*(\omega)e^{-j\omega t_0}} \qquad （8.1\text{-}14）$$

式中，K为常数，通常可选择为K=1。S*(ω)是输入信号频谱函数S(ω)的复共轭。式(8.1 - 14)就是我们所要求的最佳线性滤波器的传输函数。

该滤波器在给定时刻t_0能获得最大输出信噪比：$\dfrac{2E}{n_0}$

这种滤波器的传输函数除相乘因子$Ke^{-j\omega t_0}$外，与信号频谱的复共轭相一致，所以称该滤波器为匹配滤波器。

从匹配滤波器传输函数H(ω)所满足的条件，我们也可以得到**匹配滤波器的单位冲激响应h(t)**：

$$h(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}H(w)e^{jwt}\,dw=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}KS^*(w)e^{-jwt_0}e^{jwt}dw$$

$$=\frac{K}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[\int_{-\infty}^{\infty}s(\tau)e^{-jw\tau}d\tau]^*e^{-jw(t_0-t)}dw=k\int_{-\infty}^{\infty}[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{jw(\tau-t_0+t)}dw]s(\tau)d\tau$$

$$=k\int_{-\infty}^{\infty}s(\tau)\delta(\tau-t_0+t)d\tau=Ks(t_0-t)\qquad（8.1-15）$$

即匹配滤波器的单位冲激响应为

$$\mathbf{h(t)=Ks(t_0-t)} \qquad (8.1-16)$$

式(8.1-16)表明，**匹配滤波器的单位冲激响应h(t)是输入信号s(t)的镜像函数，**t_0为输出最大信噪比时刻。其形成原理如图8 - 2所示。

对于因果系统，匹配滤波器的单位冲激响应h(t)应满足:

$$h(t)=\begin{cases} Ks(t_0-t), & t\geq 0 \\ 0, & t<0 \end{cases} \qquad (8.1-17)$$

为了满足式(8.1 - 17)的条件，必须有：

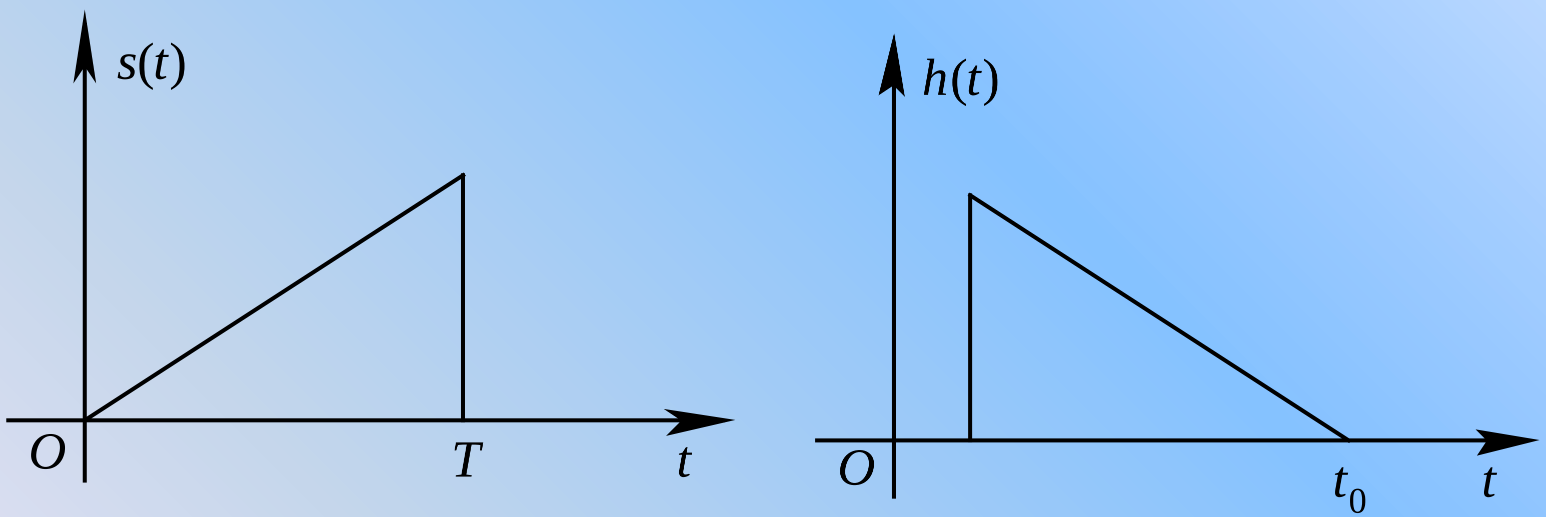

图8-2　匹配滤波器单位冲激响应原理

$$s(t_0-t)=0, \quad t<0 \qquad (8.1-18)$$

$$s(t)=0, \quad t_0-t<0 \text{ 或 } t>t_0 \qquad (8.1-19)$$

上式条件说明，**对于一个物理可实现的匹配滤波器，其输入信号s(t)必须在它输出最大信噪比的时刻t_0之前结束**。也就是说，若输入信号在T时刻结束，则对物理可实现的匹配滤波器，其输出最大信噪比时刻t_0必须在输入信号结束之后，即$t_0 \geq T$。对于接收机来说，t_0是时间延迟，通常总是希望时间延迟尽可能小，因此一般情况可取$t_0=T$。

若输入信号为s(t)，则匹配滤波器的输出信号为

$$s_o(t)=s(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{\infty} s(t-\tau)h(\tau)d\tau$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} s(t-\tau)Ks(t_0-\tau)d\tau \qquad (8.1-20)$$

令 $t_0-\tau=x$, 有

$$s_o(t)=K\int_{-\infty}^{\infty} s(x)s(x+t-t_0)dx=\mathbf{KR(t-t_0)} \qquad (8.1-21)$$

式中， R(t)为输入信号s(t)的自相关函数。 上式表明， **匹配滤波器的输出波形是输入信号s(t)的自相关函数的K倍**。因此， **匹配滤波器可以看成是一个计算输入信号自相关函数的相关器，其在t_0时刻得到最大输出信噪比r_{omax}=** $\dfrac{2E}{n_0}$ 。

由于输出信噪比与常数K无关，所以通常取K=1。

例[8 - 1] 设输入信号如图 8 - 3(a)所示，试求该信号的匹配滤波器传输函数和输出信号波形。

$$s(t)=\begin{cases}1, & 0\le t\le \dfrac{T}{2}\\ 0, & 其它\end{cases}$$

输入信号s(t)的频谱函数为

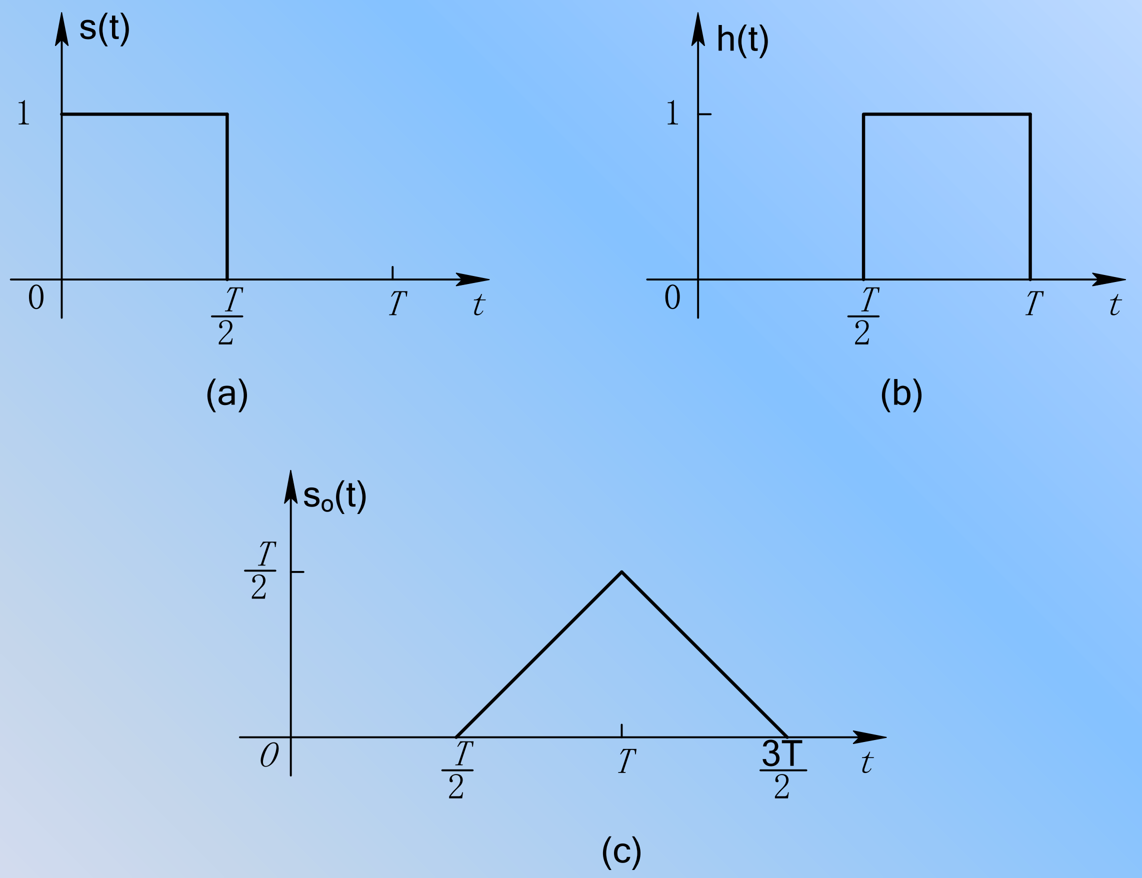

图8-3　信号时间波形

$$S(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{0}^{T/2} e^{-j\omega t}dt$$

$$=\frac{1}{j\omega}(1-e^{-j\frac{T}{2}\omega})$$

匹配滤波器的传输函数为

$$H(\omega)=S^*(\omega)e^{-j\omega t_0}=\frac{1}{j\omega}(e^{j\frac{T}{2}\omega}-1)e^{-j\omega t_0}$$

匹配滤波器的单位冲激响应为

$$h(t)=s(t_0-t)$$

取$t_0=T$，则有

$$H(\omega)=\frac{1}{j\omega}(e^{-j\frac{T}{2}\omega}-1)e^{-j\omega T}$$

$$h(t)=s(T-t)$$

匹配滤波器的单位冲激响应如图 8 - 3(b)所示。

(2) 由式(8.1 - 20)可得匹配滤波器的输出为

$$s_o(t)=R(t-t_0)=\int_{-\infty}^{\infty} s(x)s(x+t-t_0)dx$$

$$=\begin{cases} -\dfrac{T}{2}+t, & \dfrac{T}{2}\le t\le T \\ \dfrac{3T}{2}-t, & T\le t\le \dfrac{3T}{2} \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

匹配滤波器的输出波形如图 8 - 3(c)所示。可见，匹配滤波器的输出在t=T时刻得到最大的能量 $E=\dfrac{T}{2}$

8.2 最小差错概率接收准则

8.2.1数字信号接收的统计模型

在数字信号的最佳接收分析中，我们不是采用先给出接收机模型然后分析其性能的分析方法，而是从数字信号接收统计模型出发，依据某种最佳接收准则，推导出相应的最佳接收机结构，然后再分析其性能。

数字通信系统的统计模型如图 8 - 4 所示。 图中消息空间、信号空间、噪声空间、观察空间及判决空间分别代表消息、发送信号、噪声、接收信号波形及判决结果的所有可能状态的集合。各个空间的状态用它们的统计特性来描述。

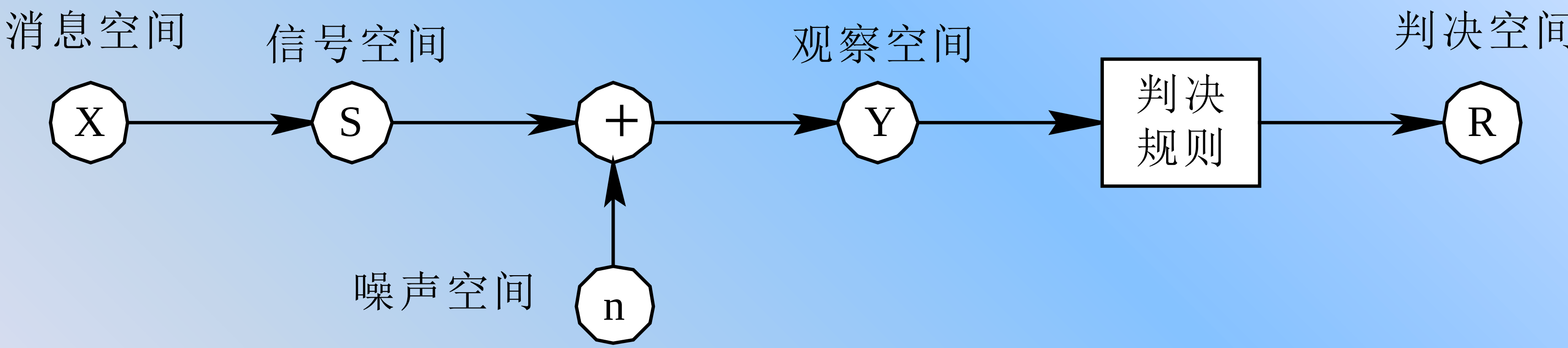

图 8－4　数字通信系统的统计模型

在数字通信系统中， 消息是离散的状态， 设消息的状态集合为

$$X=\{x_1, x_2, \ldots, x_m\} \qquad (8.2 - 1)$$

若消息集合中每一状态的发送是统计独立的， 第i个状态x_i的出现概率为$P(x_i)$，

则消息X的一维概率分布为

$$\begin{Bmatrix} X_1 & x_2 & \cdots & x_m \\ P(x_1) & P(x_2) & \cdots & P(x_m) \end{Bmatrix}$$

根据概率的性质有

$$\sum_{i=1}^{m} p(x_i) = 1 \qquad (8.2-2)$$

若消息各状态x_1, x_2, ..., x_m出现的概率相等，则有

$$P(x_1)=P(x_2)=.....=P(x_m)=\frac{1}{m} \qquad (8.2-3)$$

消息是各种物理量， 本身不能直接在数字通信系统中进行传输，因此需要将消息变换为相应的电信号s(t)，用参数S来表示。将消息变换为信号可以有各种不同的变换关系，通常最直接的方法是建立消息与信号之间一一对应的关系，即消息x_i与信号s_i(i=1, 2， ...， m)相对应。 这样，信号集合S也由m个状态所组成，即

$$S=\{s_1, s_2, \ldots, s_m\}$$

并且信号集合各状态出现概率与消息集合各状态出现概率相等，即

$$P(s_1)=P(x_1)$$

$$P(s_2)=P(x_2)$$

$$\ldots$$

$$\ldots$$

$$P(s_m)=P(x_m) \qquad (8.2-4)$$

同时也有

$$\sum_{i=1}^{m} p(s_i)=1 \qquad (8.2-5)$$

若消息各状态出现的概率相等， 则有

$$P(s_1)=P(s_2)=\ldots=P(s_m)=\frac{1}{m} \qquad (8.2-6)$$

$P(s_i)$是描述信号发送概率的参数，通常称为**先验概率**， 它是**信号统计检测的第一数据**。

信道特性是加性高斯噪声信道，噪声空间n是加性高斯噪声。在前面各章分析系统抗噪声性能时，用噪声的一维概率密度函数来描述噪声的统计特性, 在本章最佳接收中，为了更全面地描述噪声的统计特性，采用噪声的多维联合概率密度函数。噪声n的k维联合概率密度函数为

$$f(n)=f(n_1, n_2, ..., n_k) \qquad (8.2 - 7)$$

式中，$n_1, n_2, ..., n_k$为噪声n在各时刻的可能取值。

根据随机信号分析理论我们知道，若噪声是高斯白噪声，则它在任意两个时刻上得到的样值都是互不相关的，同时也是统计独立的；若噪声是带限高斯型的，按抽样定理对其抽样，则它在抽样时刻上的样值也是互不相关的， 同时也是统计独立的。根据随机信号分析，若随机信号各样值是统计独立的，则其k维联合概率密度函数等于其k个一维概率密度函数的乘积，即

$$f(n_1, n_2, ..., n_k)=f(n_1)f(n_2)\ldots f(n_k)$$

式中， $f(n_i)$是噪声n在t_i时刻的取值n_i的一维概率密度函数，若n_i的均值为零，方差为σ^2_n，则其一维概率密度函数为

$$f(n_i)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n}\exp\left\{-\frac{n_i^2}{2\sigma_n^2}\right\}$$

噪声n的k维联合概率密度函数为

$$f(n)=\frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma_n)^k}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_n^2}\sum_{i=1}^{k}n_i^2\right\}$$

根据帕塞瓦尔定理， 当k很大时有 $\frac{1}{2\sigma_n^2}\sum_{i=1}^{k}n_i^2=\frac{1}{n_0}\int_0^T n^2(t)dt$

所以 $$f(n)=\frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma_n)^k}\exp\left(-\frac{1}{n_0}\int_0^T n^2(t)dt\right)$$

信号通过信道叠加噪声后到达观察空间， 观察空间的观察波形为

$$y=n+s$$

由于在一个码元期间T内， 信号集合中各状态$s_1, s_2, ..., s_m$中之一被发送，因此在观察期间T内观察波形为

$$y(t)=n(t)+s_i(t) \qquad (i=1, 2, \ldots, m)$$

由于$n(t)$是均值为零，方差为σ^2_n的高斯过程，则当出现信号$s_i(t)$时, $y(t)$的概率密度函数$f_{si}(y)$可表示为

$$f_{s_i}(y)=\frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma_n)^k}\exp\left\{-\frac{1}{n_0}\int_0^T[y(t)-s_i(t)]^2dt\right\},\quad (i=1,2,\ldots,m)$$

$f_{si}(y)$称为似然函数，它是信号统计检测的第二数据。

根据y(t)的统计特性，按照某种准则，即可对y(t)作出判决，判决空间中可能出现的状态r_1, r_2, ..., r_m与信号空间中的各状态s_1, s_2, ..., s_m相对应。

8.2.2最佳接收准则

在数字通信系统中，**最直观且最合理的准则**是“**最小差错概率**”准则。由于在传输过程中，信号会受到畸变和噪声的干扰，发送信号$s_i(t)$时不一定能判为r_i出现，而是判决空间的所有状态都可能出现。这样将会造成错误接收，我们期望错误接收的概率愈小愈好。

在噪声干扰环境中，按照何种方法接收信号才能使得错误概率最小？我们以二进制数字通信系统为例分析其原理。在二进制数字通信系统中，发送信号只有两种状态，假设发送信号$s_1(t)$和$s_2(t)$的先验概率分别为$P(s_1)$和$P(s_2)$，$s_1(t)$和$s_2(t)$在观察时刻的取值分别为a_1和a_2，出现$s_1(t)$信号时$y(t)$的概率密度函数$f_{s1}(y)$为

$$f_{s_1}(y)=\frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma_n)^k}\exp\left\{-\frac{1}{n_0}\int_0^T[y(t)-a_1]^2dt\right\}$$

同理，出现$s_2(t)$信号时$y(t)$的概率密度函数$f_{s2}(y)$为

$$f_{s_2}(y)=\frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma_n)^k}\exp\left\{-\frac{1}{n_0}\int_0^T[y(t)-a_2]^2dt\right\}$$

$f_{s1}(y)$和$f_{s2}(y)$的曲线如图 8 - 5 所示。

若在观察时刻得到的观察值为y_i，可依概率将y_i判为r_1或r_2。在y_i附近取一小区间Δa，y_i在区间Δa内属于r_1的概率为

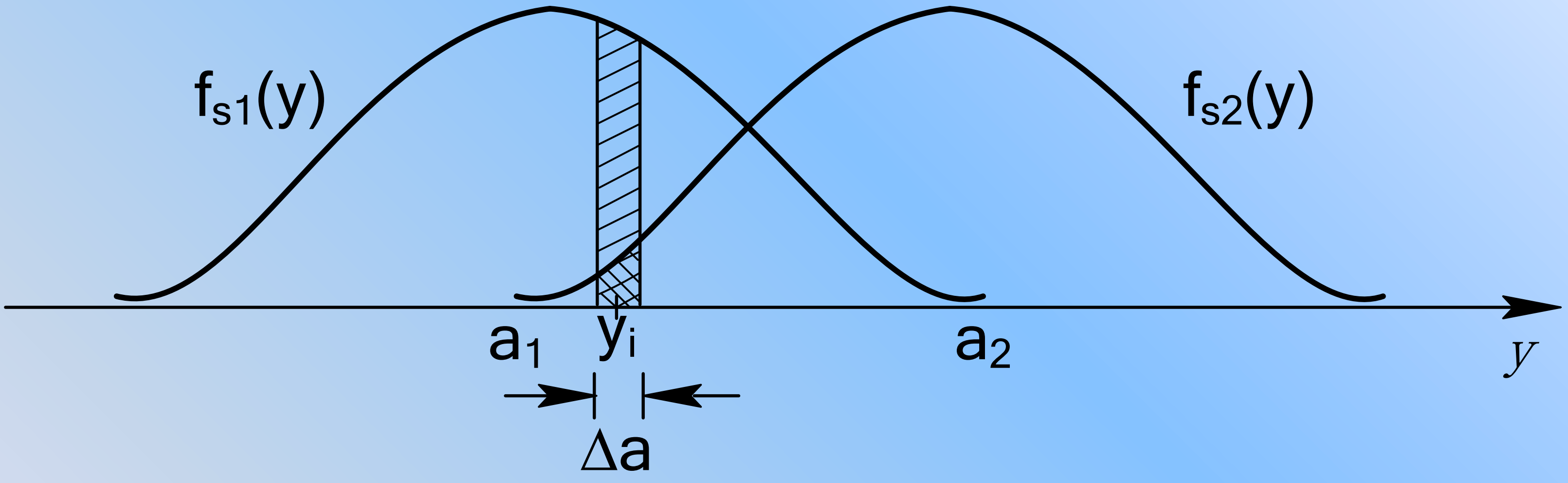

图 8- 5　$f_{s1}(y)$和$f_{s2}(y)$的曲线图

$$q_1 = \int_{\Delta a} f_{s_1}(y)dy$$

y_i在相同区间Δa内属于r_2的概率为

$$q_2 = \int_{\Delta a} f_{s_2}(y)dy$$

可以看出，

$$q_1 = \int_{\Delta a} f_{s_1}(y)dy > q_2 = \int_{\Delta a} f_{s_2}(y)dy$$

即y_i属于r_1的概率大于y_i属于r_2的概率。因此，依大概率应将y_i判为r_1出现。

由于$f_{s1}(y)$和$f_{s2}(y)$的单调性质，图 8 - 5 所示的判决过程可以简化为图 8 - 6 所示的判决过程。

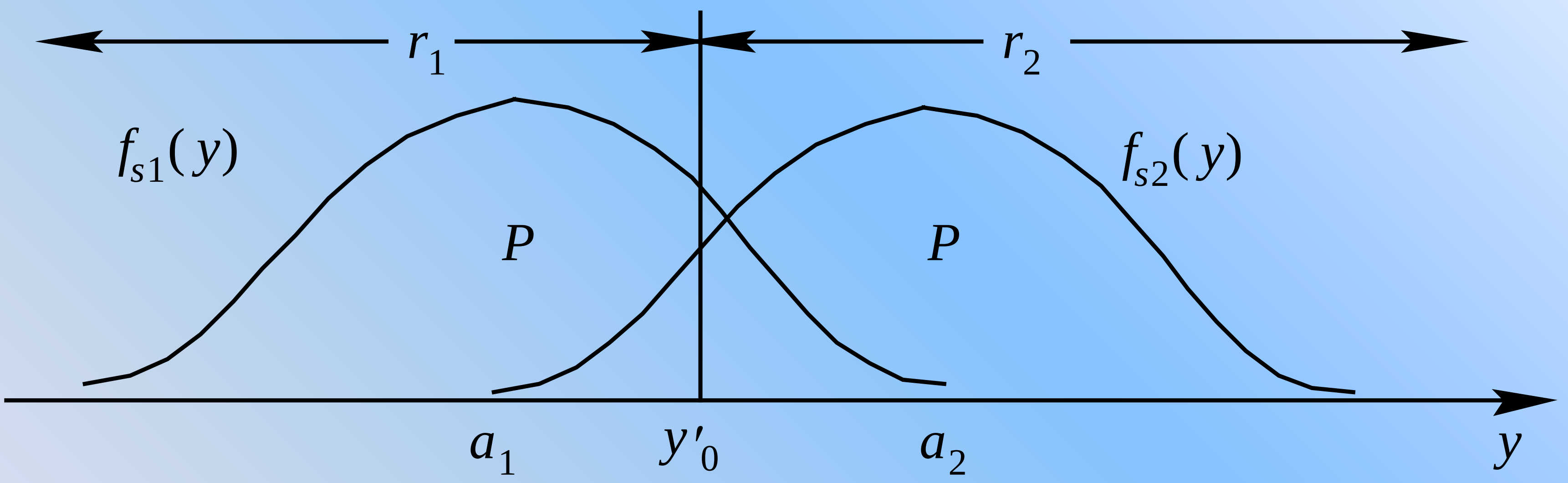

图 8 – 6 判决过程示意图

根据$f_{s1}(y)$和$f_{s2}(y)$的单调性质， 在图 8 - 6 中y坐标上可以找到一个划分点y'_0。在区间$(-\infty, y'_0)$， $q_1>q_2$；在区间(y'_0, ∞)，$q_1<q_2$。 根据图 8 - 6 所分析的判决原理，当观察时刻得到的观察值$y_i \in (-\infty, y'_0)$时，判为r_1出现；若观察时刻得到的观察值$y_i \in (y'_0, \infty)$时，判为r_2出现。

如果发送的是$s_1(t)$，但是观察时刻得到的观察值y_i落在(y'_0,∞)区间，被判为r_2出现，这时将造成错误判决，其**错误概率**为

$$P_{s_1}(s_2)=\int_{y'_0}^{\infty} f_{s_1}(y)dy \qquad (8.2 - 19)$$

同理， 如果发送的是$s_2(t)$， 但是观察时刻得到的观察值y_i落在$(-\infty, y'0)$区间，被判为r1出现，这时也将造成错误判决，其错误概率为

$$P_{s2}(s_1)=\int_{-\infty}^{y_0'} f_{s_2}(y)dy \qquad (8.2-20)$$

此时**系统总的误码率**为

$$P_e = p(s_1)p_{s_1}(s_2)+p(s_2)p_{s_2}(s_1)$$

$$= p(s_1)\int_{y_0'}^{\infty} f_{s_1}(y)dy + p(s_2)\int_{-\infty}^{y_0'} f_{s_2}(y)dy \qquad (8.2-21)$$

由式(8.2 - 21)可以看出， 系统总的误码率与<u>先验概率、似然函数及划分点y_0'有关</u>，

在先验概率和似然函数一定的情况下，系统总的误码率Pe是划分点y'_0的函数。不同的y'_0将有不同的P_e，我们希望选择一个划分点y_0使误码率P_e达到最小。使**误码率P_e达到最小的划分点y_0称为最佳划分点**。y_0可以通过求P_e的最小值得到。 即

$$\frac{\partial p_e}{\partial y'_0} = 0$$

$$-p(s_1)f_{s_1}(y_0) + p(s_2)f_{s_2}(y_0) = 0 \qquad (8.2-23)$$

由此可得最佳划分点将满足如下方程:

$$\frac{f_{s_1}(y_0)}{f_{s_2}(y_0)} = \frac{p(s_2)}{p(s_1)} \qquad (8.2-24)$$

式中y_0即为最佳划分点。

如果观察时刻得到的观察值y小于最佳划分点y_0，应判为r_1出现，此时式(8.2 -24)左边大于右边；如果观察时刻得到的观察值y大于最佳划分点y_0，应判为r_2出现，此时式(8.2 - 24)右边大于左边。因此，为了达到最小差错概率，可以按以下规则进行判决:

$$
\begin{cases}
\dfrac{f_{s_1}(y)}{f_{s_2}(y)} > \dfrac{p(s_2)}{p(s_1)}, & \text{判为 } r_1(\text{即} s_1) \\[2ex]
\dfrac{f_{s_1}(y)}{f_{s_2}(y)} < \dfrac{p(s_2)}{p(s_1)}, & \text{判为 } r_2(\text{即} s_2)
\end{cases}
$$

以上判决规则称为**似然比准则**。在加性高斯白噪声条件下，**似然比准则和最小差错概率准则是等价**的。

当$s_1(t)$和$s_2(t)$的发送概率相等时，即$P(s_1)=P(s_2)$时，则有

$$\begin{cases} f_{s1}(y) > f_{s2}(y), & \text{判为} r_1(\text{即} s_1) \\ f_{s1}(y) < f_{s2}(y), & \text{判为} r_2(\text{即} s_2) \end{cases}$$

上式判决规则称为**最大似然准则**，其物理概念是，**接收到的波形y中，哪个似然函数大就判为哪个信号出现**。

以上判决规则可以推广到多进制数字通信系统中，对于m个可能发送的信号，在先验概率相等时的最大似然准则为

$$f_{si}(y) > f_{sj}(y),\ \text{判为} s_i (i=1, 2, ..., m;\ j=1, 2, ..., m;\ i \neq j) \quad (8.2 - 27)$$

最小差错概率准则是数字通信系统最常采用的准则， 除此之外，贝叶斯(Bayes)准则、尼曼-皮尔逊(Neyman-Pearson)准则、极大极小准则等有时也被采用。

8.3确知信号的最佳接收机

在数字通信系统中，接收机输入信号根据其特性的不同可以分为两大类，**一类是确知信号，另一类是随参信号**。所谓确知信号是指一个信号出现后，它的所有参数(如幅度、频率、 相位、到达时刻等)都是确知的。如数字信号通过恒参信道到达接收机输入端的信号。在随参信号中，根据信号中随机参量的不同又可细分为随机相位信号、随机振幅信号和随机振幅随机相位信号(又称起伏信号)。本节讨论确知信号的最佳接收问题。

信号统计检测是利用概率和数理统计的工具来设计接收机。**所谓最佳接收机设计是指在一组给定的假设条件下，利用信号检测理论给出满足某种最佳准则接收机的数学描述和组成原理框图**，而不涉及接收机各级的具体电路。本节分析中所采用的最佳准则是**最小差错概率准则**。

8.3.1二进制确知信号最佳接收机结构

接收端原理图如图 8 - 7 所示。设到达接收机输入端的两个确知信号分别为$s_1(t)$和$s_2(t)$，它们的持续时间为(0, T)，且有相等的能量，即

$$E=E_1=\int_0^T s_1^2(t)dt=E_2=\int_0^T s_2^2(t)dt \qquad (8.3-1)$$

噪声n(t)是高斯白噪声，均值为零，单边功率谱密度为n_0。要求设计的接收机能在噪声干扰下以最小的错误概率检测信号。根据上一节的分析我们知道，在加性高斯白噪声条件下，最小差错概率准则与似然比准则是等价的。因此，我们可以直接利用式(8.2 - 25)似然比准则对确知信号作出判决。

在观察时间(0，T)内，接收机输入端的信号为$s_1(t)$和$s_2(t)$，合成波为

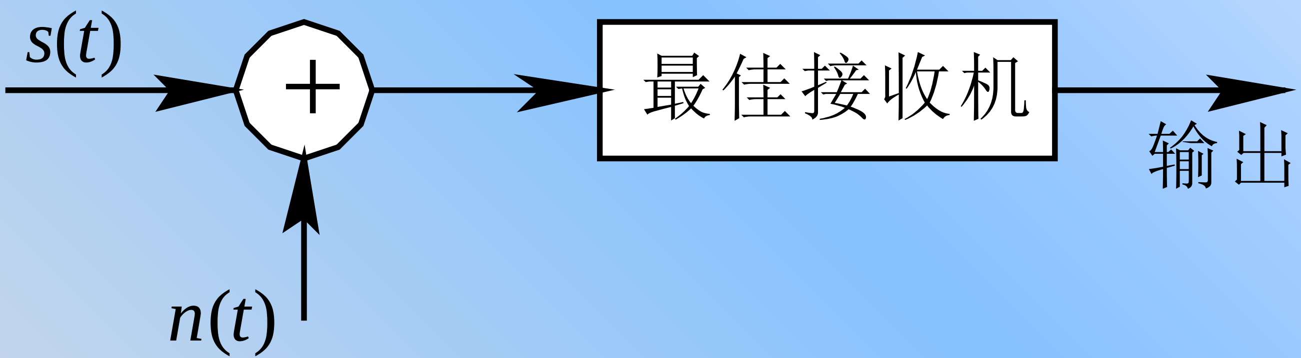

图 8－7 接收端原理

$$y(t)=\begin{cases} s_1(t)+n(t), & \text{发送}s_1(t)\text{时}, \quad (8.3-2) \\ s_2(t)+n(t), & \text{发送}s_2(t)\text{时}, \quad (8.3-3) \end{cases}$$

由上一节分析可知，当出现$s_1(t)$或$s_2(t)$时观察空间的似然函数分别为

$$f_{s_1}(y)=\frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma_n)^k}\exp\left\{-\frac{1}{n_0}\int_0^T[y(t)-s_1(t)]^2dt\right\} \qquad (8.3-4)$$

$$f_{s_2}(y)=\frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma_n)^k}\exp\left\{-\frac{1}{n_0}\int_0^T[y(t)-s_2(t)]^2dt\right\} \qquad (8.3-5)$$

其似然比判决规则为

$$\frac{f_{s_1}(y)}{f_{s_2}(y)}=\frac{\dfrac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma_n)^k}\exp\left\{-\dfrac{1}{n_0}\int_0^T[y(t)-s_1(t)]^2dt\right\}}{\dfrac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma_n)^k}\exp\left\{-\dfrac{1}{n_0}\int_0^T[y(t)-s_2(t)]^2dt\right\}}>\frac{P(s_2)}{P(s_1)} \qquad (8.3-6)$$

判为s_1（t）出现，反之，s_2（t）出现。

式中，$P(s_1)$和$P(s_2)$分别为发送$s_1(t)$和$s_2(t)$的先验概率。整理式(8.3 - 5)和(8.3 - 6)可得

$$U_1+\int_0^T y(t)s_1(t)dt > U_2+\int_0^T y(t)s_2(t)dt \qquad (8.3-7)$$

判为$s_1(t)$出现，而

$$U_1+\int_0^T y(t)s_1(t)dt < U_2+\int_0^T y(t)s_2(t)dt \qquad (8.3-8)$$

则判为$s_2(t)$出现。 式中：

$$\begin{cases} U_1=\dfrac{n_0}{2}\ln P(s_1) \\ U_2=\dfrac{n_0}{2}\ln P(s_2) \end{cases} \qquad (8.3-9)$$

在先验概率$P(s_1)$和$P(s_2)$给定的情况下，U_1和U_2都为常数。根据式(8.3 - 7)和式(8.3 - 8)所描述的判决规则， 可得到最佳接收机的结构如图8 - 8 所示，其中比较器是比较抽样时刻$t=T$时上下两个支路样值的大小。这种最佳接收机的结构是按**比较观察波形$y(t)$与$s_1(t)$和$s_2(t)$的相关性**而构成的，因而称为相关接收机。其中相乘器与积分器构成相关器。接收过程是分别计算观察波形$y(t)$与$s_1(t)$和$s_2(t)$的相关函数，在抽样时刻$t=T$，$y(t)$与哪个发送信号的相关值大就判为哪个信号出现。

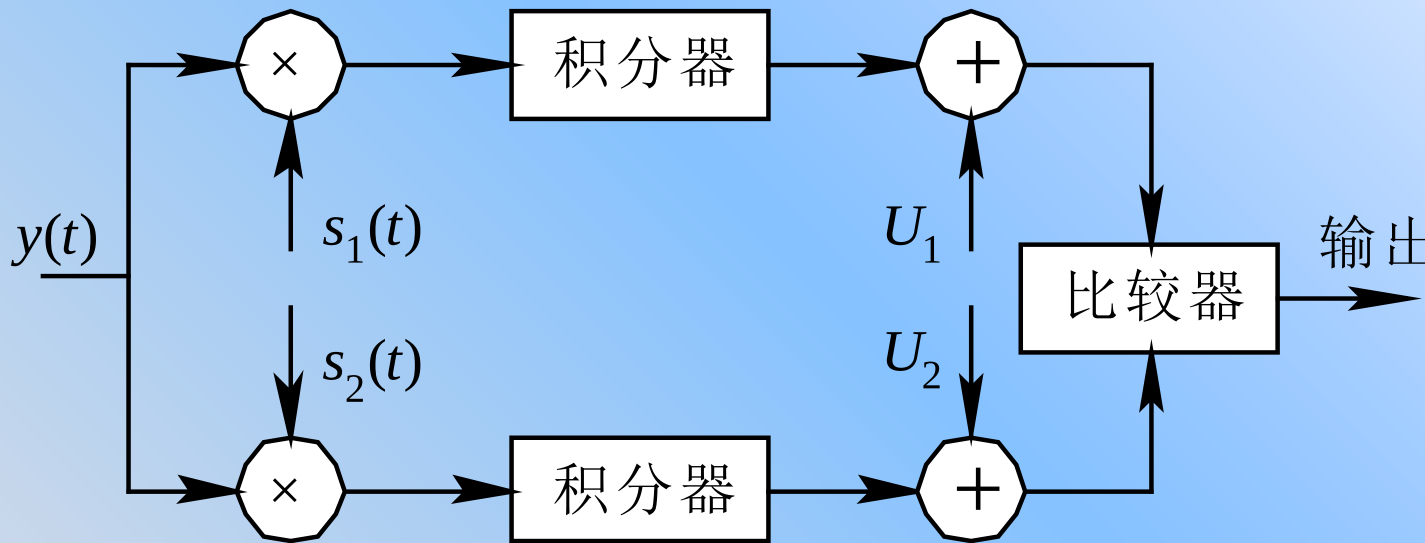

图 8－8　二进制确知信号最佳接收机结构

如果发送信号$s_1(t)$和$s_2(t)$的出现概率相等，即$P(s_1)=P(s_2)$，由式(8.3 - 9)可得$U_1=U_2$。此时，图 8 - 8 中的两个相加器可以省去，则先验等概率情况下的二进制确知信号最佳接收机简化结构如图 8 - 9 所示。

由 8.1 节匹配滤波器分析我们知道，匹配滤波器可以看成是一个计算输入信号自相关函数的相关器。设发送信号为s(t)，则匹配滤波器的单位冲激响应为

$$h(t)=s(T-t) \qquad (8.3\text{-}10)$$

若匹配滤波器输入合成波为

$$y(t)=s(t)+n(t) \qquad (8.3\text{-}11)$$

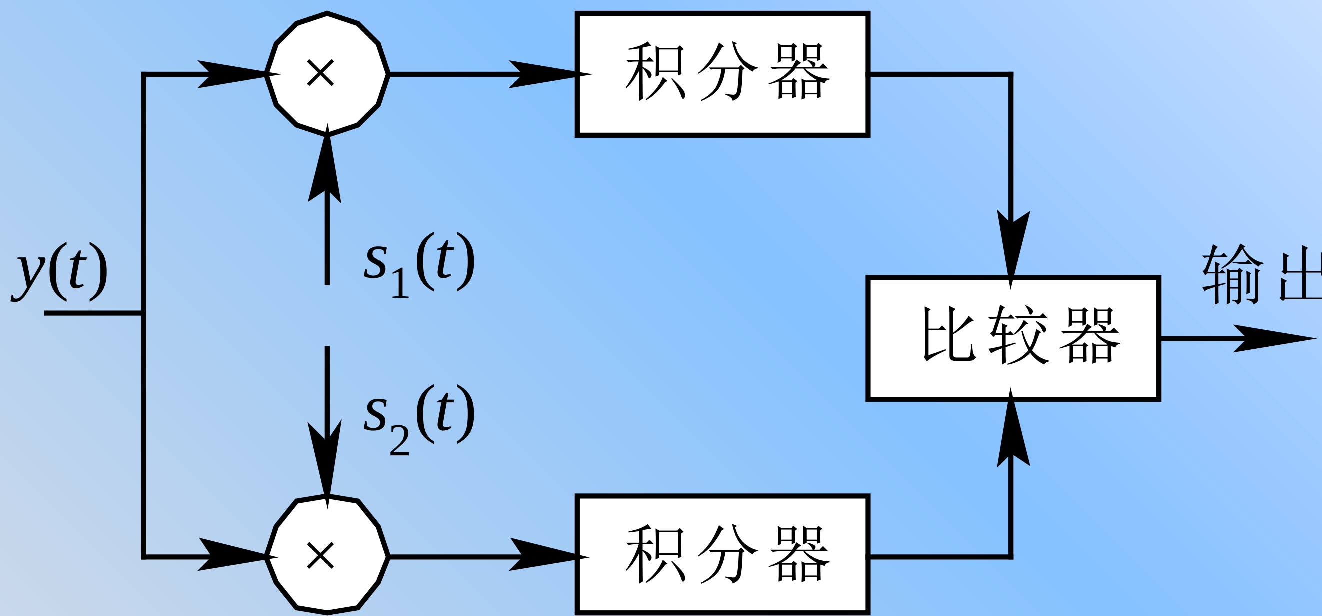

图 8- 9　二进制确知信号最佳接收机简化结构

则匹配滤波器的输出在抽样时刻t=T时的样值为

$$u_0(t)=\int_0^T y(t)s(t)dt \qquad (8.3\text{-}12)$$

由式(8.3 - 12)可以看出匹配滤波器在抽样时刻t=T时的输出样值与最佳接收机中相关器在t=T时的输出样值相等,因此，可以用匹配滤波器代替相关器构成最佳接收机，其结构如图8 - 10 所示。

在最小差错概率准则下，相关器形式的最佳接收机与匹配滤波器形式的最佳接收机是等价的。另外，无论是相关器还是匹配滤波器形式的最佳接收机，它们的比较器都是在t=T时刻才作出判决，也即在码元结束时刻才能给出最佳判决结果。因此，判决时刻的任何偏差都将影响接收机的性能。

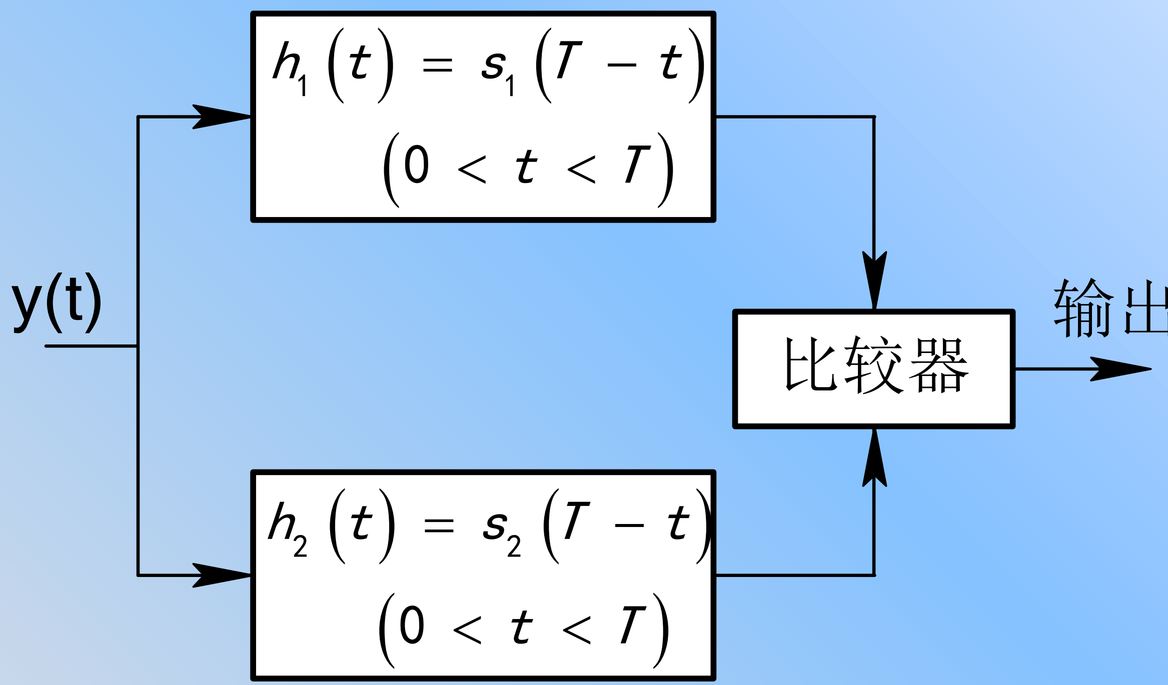

图 8- 10　匹配滤波器形式的最佳接收机

8.3.2二进制确知信号最佳接收机误码性能

由上一节分析可知，相关器形式的最佳接收机与匹配滤波器形式的最佳接收机是等价的，因此可以从两者中的任一个出发来分析最佳接收机的误码性能。下面从相关器形式的最佳接收机角度来分析这个问题。

最佳接收机结构如图 8 - 8 所示，输出总的误码率为

$$P_e=P(s_1)P_{s1}(s_2)+P(s_2)P_{s2}(s_1) \qquad (8.3\text{-}13)$$

其中，$P(s_1)$和$P(s_2)$是发送信号的先验概率。$P_{s1}(s2)$是发送$s_1(t)$信号时错误判决为$s_2(t)$信号出现的概率；$P_{s2}(s_1)$是发送$s_2(t)$信号时错误判决为$s_1(t)$信号出现的概率。分析$P_{s1}(s_2)$与$P_{s2}(s_1)$的方法相同，我们以分析$P_{s1}(s_2)$为例。

设发送信号为$s_1(t)$，接收机输入端合成波为

$$y(t)=s_1(t)+n(t) \qquad (8.3-14)$$

其中, n(t)是高斯白噪声，其均值为零，方差为σ^2_n。若

$$U_1+\int_0^T y(t)s_1(t)dt > U_2+\int_0^T y(t)s_2(t)dt \qquad (8.3-15)$$

则判为$s_1(t)$出现，是正确判决。若

$$U_1+\int_0^T y(t)s_1(t)dt < U_2+\int_0^T y(t)s_2(t)dt \qquad (8.3-16)$$

则判为$s_2(t)$出现，是错误判决。

将$\mathbf{y(t)=s_1(t)+n(t)}$代入式(8.3 - 16)可得

$$U_1 + \int_0^T [s_1(t) + n(t)] s_1(t) dt < U_2 + \int_0^T [s_1(t) + n(t)] s_2(t) dt \quad (8.3-17)$$

其中 $U_1 = \dfrac{n_0}{2} \ln P(s_1)$ $U_2 = \dfrac{n_0}{2} \ln P(s_2)$

代入 U_1,U_2并利用$s_1(t)$和$s_2(t)$能量相等的条件可得

$$\int_0^T n(t)[s_1(t) - s_2(t)] dt < \frac{n_0}{2} \ln \frac{p(s_2)}{p(s_1)} - \frac{1}{2} \int_0^T [s_1(t) - s_2(t)]^2 dt \quad (8.3-18)$$

式(8.3 - 18)左边因存在n(t),所以是随机变量，令为ξ，即

$$\xi = \int_0^T n(t)[s_1(t) - s_2(t)] dt \quad (8.3-19)$$

式(8.3 - 18)右边是常数， 令为a, 即

$$a = \frac{n_0}{2} \ln \frac{p(s_2)}{p(s_1)} - \frac{1}{2} \int_0^T [s_1(t) - s_2(t)]^2 dt \quad (8.3-20)$$

式(8.3 - 18)可简化为

$$\xi < a \qquad (8.3 - 21)$$

判为$s_2(t)$出现，产生错误判决。则发送$s_1(t)$将其错误判决为$s_2(t)$的条件简化为$\xi < a$事件，相应的错误概率为

$$\mathbf{P_{s1}(s_2)=P(\xi < a)} \qquad (8.3 - 22)$$

只**要求出随机变量ξ的概率密度函数**，即可计算出式(8.3 - 22)的数值。

根据假设条件，n(t)是高斯随机过程，其均值为零，方差为σ^2_n。根据随机过程理论可知，**高斯型随机过程的积分是一个高斯型随机变量**。所以ξ是一个高斯随机变量，只要求出ξ的数学期望和方差，就可以得到ξ的概率密度函数。

ξ的数学期望为

$$E[\xi]=E\left\{\int_0^T n(t)[s_1(t)-s_2(t)]dt\right\}=\int_0^T E[n(t)][s_1(t)-s_2(t)]dt=0$$

(8.3 - 23)

ξ的方差为

$$\sigma_\xi^2=D[\xi]=E\left[\xi^2\right]=E\left\{\int_0^T\int_0^T n(t)[s_1(t)-s_2(t)]n(\tau)[s_1(\tau)-s_2(\tau)]dtd\tau\right\}$$

$$=\int_0^T\int_0^T E[n(t)n(\tau)][s_1(t)-s_2(t)][s_1(\tau)-s_2(\tau)]dtd\tau \qquad (8.3 - 24)$$

式中E［n(t)n(τ)］为高斯白噪声n(t)的自相关函数，由第2章随机信号分析可知

$$E[n(t)n(\tau)]=\frac{n_0}{2}\delta(t-\tau)=\begin{cases}\dfrac{n_0}{2}\delta(0) & t=\tau\\ 0 & t\neq\tau\end{cases} \qquad (8.3 - 25)$$

将上式代入式(8.3 - 24)可得

$$\sigma_\xi^2 = \frac{n_0}{2}\int_0^T [s_1(t) - s_2(t)]^2 dt \qquad (8.3 - 26)$$

于是可以写出ξ的概率密度函数为

$$f(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\varepsilon}\exp\left\{-\frac{\xi^2}{2\sigma_\varepsilon^2}\right\} \qquad (8.3 - 27)$$

至此, 可得发送$s_1(t)$将其错误判决为$s_2(t)$的概率为

$$P_{s1}(s_2) = P(\xi < a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_b^\infty \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\}dx \qquad (8.3 - 28)$$

利用相同的分析方法，可以得到发送$s_2(t)$将其错误判决为$s_1(t)$的概率为

$$p_{s2}(s_1)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{b'}^{\infty}\exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\}dx \qquad (8.3-29)$$

系统总的误码率为

$$P_e=P(s_1)P_{s1}(s_2)+P(s_2)P_{s2}(s_1)$$

$$=P(s_1)\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{b}^{\infty}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)dx\right]+p(s_2)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{b'}^{\infty}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)dx]$$

$$(8.3-30)$$

式中b和b′分别为

$$b=\sqrt{\frac{1}{2n_0}\int_0^T[s_1(t)-s_2(t)]^2dt}+\frac{\ln\frac{p(s_1)}{p(s_2)}}{2\sqrt{\frac{1}{2n_0}\int_0^T[s_1(t)-s_2(t)]^2dt}}$$

$$(8.3-31)$$

$$b' = \sqrt{\frac{1}{2n_0}\int_0^T [s_1(t) - s_2(t)]^2 dt} + \frac{\ln\dfrac{p(s_2)}{p(s_1)}}{2\sqrt{\dfrac{1}{2n_0}\int_0^T [s_1(t) - s_2(t)]^2 dt}} \tag{8.3 - 32}$$

由式(8.3 - 30)、式(8.3 - 31)和式(8.3 - 32)可以看出，最佳接收机的误码性能与**先验概率P(s_1)和P(s_2)**、**噪声功率谱密度n_0**及**s_1(t)和s_2(t)之差的能量**有关，而与s_1(t)和s_2(t)本身的具体结构无关。

一般情况下先验概率是不容易确定的，通常选择先验**等概**的假设设计最佳接收机。在发送s_1(t)和s_2(t)的先验概率相等时，误码率P_e还与s_1(t)和s_2(t)之差的能量有关，如何设计s_1(t)和s_2(t)使误码率P_e达到最小，是我们需要解决的另一个问题。

比较式(8.3 - 31)和式(8.3 - 32)可以看出， 当发送信号先验概率相等时，b=b′=A，此时误码率可表示为

$$P_e=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_A^{\infty}\exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\}dx=\frac{1}{2}erfc\left(\frac{A}{\sqrt{2}}\right) \qquad (8.3 - 33)$$

式中: $$A=\sqrt{\frac{1}{2n_0}\int_0^T[s_1(t)-s_2(t)]^2dt} \qquad (8.3 - 34)$$

为了分析方便，我们定义$s_1(t)$和$s_2(t)$之间的**互相关系数**为

$$\rho=\frac{\int_0^T s_1(t)s_2(t)dt}{E} \qquad (8.3 - 35)$$

式中，E是信号$s_1(t)$和$s_2(t)$在$0\le t\le T$ 期间的平均能量。当$s_1(t)$和$s_2(t)$具有相等的能量时，有

$$E=E_1=E_2=E_b \tag{8.3-36}$$

将E_b和ρ代入式(8.3 - 34)可得:

$$A=\sqrt{\frac{E_b(1-\rho)}{n_0}} \tag{8.3-37}$$

此时， 式(8.3 - 33)可表示为

$$P_e=\frac{1}{2}erfc\left[\sqrt{\frac{E_b(1-\rho)}{2n_0}}\right] \tag{8.3-38}$$

上式即为**二进制确知信号最佳接收机误码率的一般表示式。它与信噪比** $\frac{E_b}{n_0}$ **及发送信号之间的互相关系数ρ有关。** 互相关系数$-1\le\rho\le1$ ，erfc递减，$\rho=-1$ 时，P_e最小为：

$$P_e=\frac{1}{2}erfc\left[\sqrt{\frac{E_b}{n_0}}\right] \tag{8.3-39}$$

上式即为发送信号先验概率相等时，二进制确知信号最佳接收机所能达到的最小误码率，此时相应的发送信号$s_1(t)$和$s_2(t)$之间的互相关系数ρ=-1。也就是说，**当发送二进制信号$s_1(t)$和$s_2(t)$之间的互相关系数ρ=-1时的波形就称为是最佳波形。**

当互相关系数ρ=0时，误码率为

$$P_e = \frac{1}{2} erfc[\sqrt{\frac{E_b}{2n_0}}] \qquad (8.3-40)$$

若互相关系数ρ=1，则误码率为

$$P_e = \frac{1}{2}$$

若发送信号$s_1(t)$和$s_2(t)$是不等能量信号，如$E_1=0$，$E_2=E_b$，$\rho=0$，发送信号$s_1(t)$和$s_2(t)$的平均能量为$E=E_b/2$，在这种情况下，误码率表示式(8.3 - 40)变为

$$Pe=\frac{1}{2}erfc\left[\sqrt{\frac{E_b}{4n_0}}\right] \qquad (8.3 - 41)$$

根据式(8.3 - 39)、式(8.3 - 40)和式(8.3 - 41)画出的$P_e \sim \frac{E_b}{n_0}$关系曲线如图 8 - 11 中③②①所示。

在第 5 章数字基带传输系统误码率性能分析中我们知道，双极性信号的误码率低于单极性信号，其原因之一就是双极性信号之间的互相关系数$\rho=-1$，而单极性信号之间的互相关系数$\rho=0$。

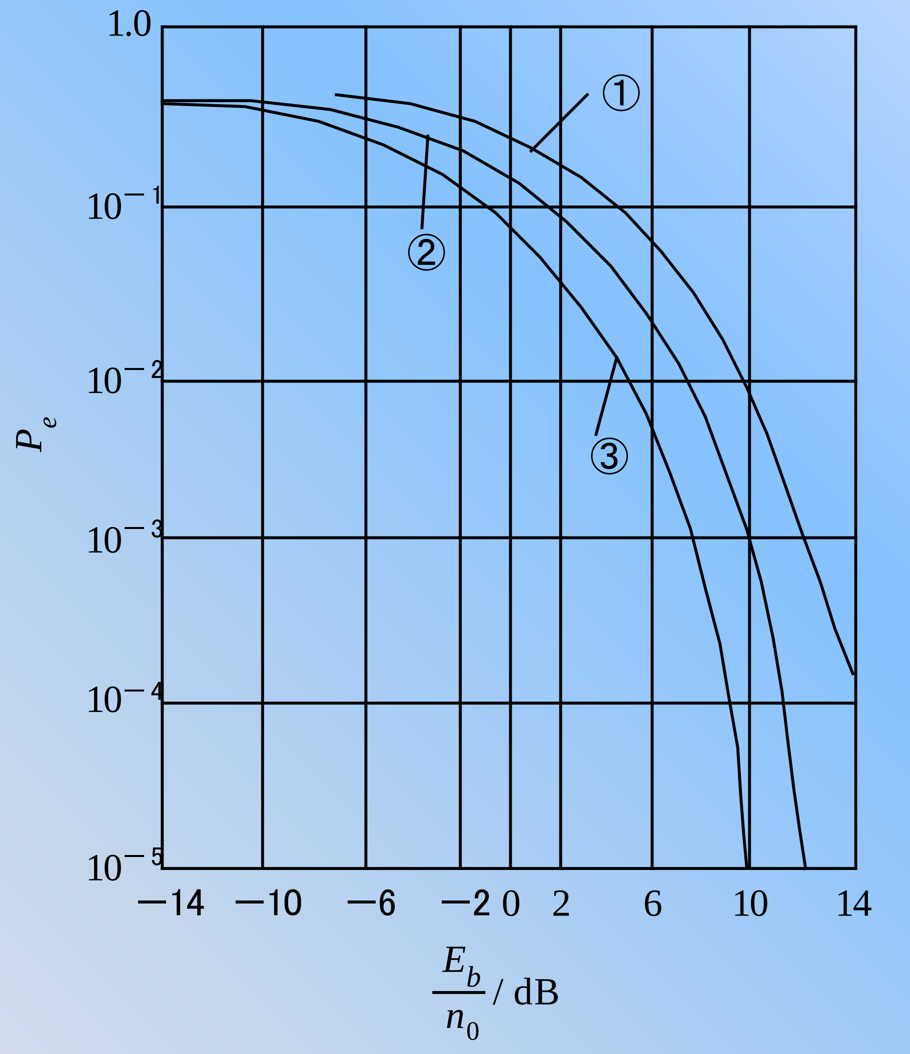

图 8－11　二进制最佳接收机误码率曲线

在第 7 章数字频带传输系统误码性能分析中，2PSK信号能使互相关系数ρ=-1，因此2PSK信号是最佳信号波形；2FSK和2ASK信号对应的互相关系数ρ=0，因此2PSK系统的误码率性能优于2FSK和2ASK系统；2FSK信号是等能量信号，而2ASK信号是不等能量信号，因此2FSK系统的误码率性能优于2ASK系统。

8.4随相信号的最佳接收机

确知信号最佳接收是信号检测中的一种理想情况。 实际中，由于种种原因， 接收信号的各分量参数或多或少带有随机因素，因而在检测时除了不可避免的噪声会造成判决错误外，信号参量的未知性使检测错误又增加了一个因素。因为这些参量并不携带有关假设的信息，其作用仅仅是妨碍检测的进行。造成随参信号的原因很多，主要有：发射机振荡器频率不稳定，信号在随参信道中传输引起的畸变， 雷达目标信号反射等。

随机相位信号简称随相信号，是一种典型且简单的随参信号，其特点是接收信号的相位具有随机性质，如具有随机相位的2FSK信号和具有随机相位的2ASK信号都属于随相信号。对于随相信号最佳接收问题的分析，与确知信号最佳接收的分析思路是一致的。但是，由于随相信号具有随机相位，使得问题的分析显得更复杂一些，最佳接收机结构形式也比确知信号最佳接收机复杂。

8.4.1二进制随相信号最佳接收机结构

二进制随相信号具有多种形式，我们以具有随机相位的2FSK信号为例展开分析。设发送的两个随相信号为

$$s_1(t, \varphi_1) = \begin{cases} A\cos(\omega_1 t + \varphi_1) & 0 \le t \le T, \\ 0 & \text{其它} \end{cases} \tag{8.4 - 1}$$

$$s_2(t, \varphi_2) = \begin{cases} A\cos(\omega_2 t + \varphi_2) & 0 \le t \le T, \\ 0 & \text{其它} \end{cases} \tag{8.4 - 2}$$

式中，ω_1和ω_2为满足正交条件的两个载波角频率；φ_1和φ_2是每一个信号的随机相位参数，它们的取值在区间［$0,2\pi$］上服从均匀分布，即

$$f(\varphi_1)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi}, & 0\le\varphi_1\le 2\pi\\ 0, & \text{其它}\end{cases}\qquad(8.4-3)$$

$$f(\varphi_2)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi}, & 0\le\varphi_2\le 2\pi\\ 0, & \text{其它}\end{cases}\qquad(8.4-4)$$

$s_1(t, \varphi_1)$和$s_2(t, \varphi_2)$持续时间为(0, T)，且能量相等，即

$$E_b=E_1=\int_0^T s_1^2(t,\phi_1)dt=E_2=\int_0^T s_2^2(t,\phi_2)dt\qquad(8.4-5)$$

假设信道是加性高斯白噪声信道，则接收机输入端合成波为

$$y(t)=\begin{cases}s_1(t,\varphi_1)+n(t), & \text{发送时}\ s_1(t,\varphi_1)\\ s_2(t,\varphi_2)+n(t), & \text{发送时}\ s_2(t,\varphi_2)\end{cases}\qquad(8.4-6)$$

在确知信号的最佳接收中，通过似然比准则可以得到最佳接收机的结构。然而在随相信号的最佳接收中，接收机输入端合成波y(t)中除了加性高斯白噪声之外，还有随机相位，因此不能直接给出似然函数$f_{s1}(y)$和$f_{s2}(y)$。此时，可以先求出在**给定相位**φ_1和φ_2的条件下关于y(t)的**条件似然函数**$f_{s1}(y/\varphi_1)$和$f_{s2}(y/\varphi_2)$，即

$$f_{s1}(y/\varphi_1)=\frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma_n)^k}\exp\left\{-\frac{1}{n_0}\int_0^T[y(t)-s_1(t,\varphi_1)]^2dt\right\} \quad (8.4-7)$$

$$f_{s2}(y/\varphi_2)=\frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma_n)^k}\exp\left\{-\frac{1}{n_0}\int_0^T[y(t)-s_2(t,\varphi_2)]^2dt\right\} \quad (8.4-8)$$

由概率论知识可得

$$f_{s1}(y/\varphi_1)=\int_{\Delta\varphi_1} f_{s_1}(y,\varphi_1)d\varphi_1=\int_{\Delta\varphi_1} f(\varphi_1)f_{s_1}(y/\varphi_1)d\varphi_1$$

$$=\frac{1}{2\pi(\sqrt{2\pi}\sigma_n)^k}\int_0^{2\pi}\exp\left\{-\frac{1}{n_0}\int_0^T[y(t)-s_1(t,\varphi_1)]^2dt\right\}d\varphi_1$$

$$=\frac{1}{2\pi(\sqrt{2\pi}\sigma_n)^k}\int_0^{2\pi}\exp\{-\frac{E_b}{n_0}-\frac{1}{n_0}\int_0^T y^2(t)dt$$

$$+\frac{2}{n_0}\int_0^T Ay(t)\cos(\omega_1 t+\varphi_1)dt\}d\varphi_1$$

$$=\frac{K}{2\pi}\int_0^{2\pi}\exp\left\{\frac{2}{n_0}\int_0^T Ay(t)\cos(\omega_1 t+\varphi_1)dt\right\}d\varphi_1 \qquad (8.4-9)$$

式中

$$K=\frac{\exp\left\{-\frac{E_b}{n_0}-\frac{1}{n_0}\int_0^T y^2(t)dt\right\}}{(\sqrt{2\pi}\sigma_n)^k} \qquad (8.4-10)$$

为常数。

令随机变量$\xi(\varphi_1)$为

$$\xi(\varphi_1)=\frac{2}{n_0}\int_0^T Ay(t)\cos(\omega_1 t+\varphi_1)dt$$

$$=\frac{2A}{n_0}\int_0^T y(t)(\cos\omega_1 t\cos\varphi_1-\sin\omega_1 t\sin\varphi_1)dt$$

$$=\frac{2A}{n_0}\int_0^T y(t)\cos\omega_1 tdt\cos\varphi_1-\frac{2A}{n_0}\int_0^T y(t)\sin\omega_1 tdt\sin\varphi_1$$

$$=\frac{2A}{n_0}(X_1\cos\varphi_1-Y_1\sin\varphi_1)$$

$$=\frac{2A}{n_0}\sqrt{X_1^2+Y_1^2}\cos(\varphi_1+\arctan\frac{Y_1}{X_1})$$

$$=\frac{2A}{n_0}M_1\cos(\varphi_1+\varphi_0) \qquad (8.4-11)$$

式中:

$$X_1 = \int_0^T y(t)\cos\omega_1 t dt \tag{8.4 - 12}$$

$$Y_1 = \int_0^T y(t)\sin\omega_1 t dt \tag{8.4 -13}$$

$$M_1 = \sqrt{X_1^2 + Y_1^2} \tag{8.4 - 14}$$

于是， 式(8.4 - 9)可表示为

$$\mathbf{f}_{s1}(\mathbf{y}) = \frac{K}{2\pi}\int_0^{2\pi}\exp\left\{\frac{2A}{n_0}M_1\cos(\varphi_1+\varphi_0)\right\}d\varphi_1 = KI_0\left(\frac{2A}{n_0}M_1\right) \tag{8.4 - 15}$$

式中， K为常数， $I_0(\frac{2A}{n_0}M_1)$ 为零阶修正贝塞尔函数。

同理可得，出现$s_2(t)$时y(t)的似然函数$f_{s2}(y)$为

$$f_{s2}(y)=KI_0\left(\frac{2A}{n_0}M_2\right) \qquad (8.4-16)$$

$$X_2=\int_0^T y(t)\cos\omega_2 t\,dt \qquad (8.4-17)$$

$$Y_2=\int_0^T y(t)\sin\omega_2 t\,dt \qquad (8.4-18)$$

$$M_2=\sqrt{X_2^2+Y_2^2} \qquad (8.4-19)$$

代入M_1和M_2的具体表示式可得:

$$M_1=\left\{\left[\int_0^T y(t)\cos\omega_1 t\,dt\right]^2+\left[\int_0^T y(t)\sin\omega_1 t\,dt\right]^2\right\}^{\frac{1}{2}} \qquad (8.4-20)$$

$$M_2=\left\{\left[\int_0^T y(t)\cos\omega_2 t\,dt\right]^2+\left[\int_0^T y(t)\sin\omega_2 t\,dt\right]^2\right\}^{\frac{1}{2}} \qquad (8.4-21)$$

假设发送信号$s_1(t, \varphi_1)$和$s_2(t, \varphi_2)$的先验概率相等，采用**最大似然准则**对观察空间样值作出判决，即

$$f_{s1}(y) > f_{s2}(y), \text{判为} s_1 \qquad (8.4-22)$$

$$f_{s1}(y) < f_{s2}(y), \text{判为} s_2 \qquad (8.4-23)$$

将式(8.4 - 15)和式(8.4 - 16)代入上式可得:

$$KI_0\left(\frac{2A}{n_0}M_1\right) > KI_0\left(\frac{2A}{n_0}M_2\right), \quad \text{判为} S_1 \qquad (8.4-24)$$

$$KI_0\left(\frac{2A}{n_0}M_1\right) < KI_0\left(\frac{2A}{n_0}M_2\right), \quad \text{判为} S_2 \qquad (8.4-25)$$

判决式两边约去常数K后有

$$I_0\left(\frac{2A}{n_0}M_1\right) > I_0\left(\frac{2A}{n_0}M_2\right), \quad \text{判为} S_1 \qquad (8.4-26)$$

$$I_0(\frac{2A}{n_0}M_1) < I_0(\frac{2A}{n_0}M_2),\qquad 判为S_2 \qquad (8.4-26)$$

根据零阶修正贝塞尔函数的性质可知，**$I_0(x)$是严格单调增加函数**， 若函数$I_0(x_2)>I_0(x_1)$，则有$x_2>x_1$。因此，式(8.4 - 25)和式(8.4 - 26)中，根据比较零阶修正贝塞尔函数大小作出判决，可以简化为根据比较零阶修正贝塞尔函数自变量的大小作出判决。 此时判决规则简化为

$$\frac{2A}{n_0}M_1 > \frac{2A}{n_0}M_2,\qquad 判s_1 \qquad (8.4-27)$$

$$\frac{2A}{n_0}M_1 < \frac{2A}{n_0}M_2,\qquad 判s_2 \qquad (8.4-28)$$

判决式两边约去常数并代入M_1和M_2的具体表示式后有

$$M_1 > M_2, \quad 判为s_1 \qquad (8.4-29)$$

$$M_1 < M_2, \quad 判为s_2 \qquad (8.4-30)$$

即

$$\left\{[\int_0^t y(t)\cos\omega_1 t dt]^2 + [\int_0^T y(t)\sin\omega_1 t dt]^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$> \left\{[\int_0^t y(t)\cos\omega_2 t dt]^2 + [\int_0^T y(t)\sin\omega_2 t dt]^2\right\}^{\frac{1}{2}} \qquad (8.4-31)$$

判为s_1，而

$$\left\{[\int_0^t y(t)\cos\omega_1 t dt]^2 + [\int_0^T y(t)\sin\omega_1 t dt]^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$< \left\{[\int_0^t y(t)\cos\omega_2 t dt]^2 + [\int_0^T y(t)\sin\omega_2 t dt]^2\right\}^{\frac{1}{2}} \qquad (8.4-32)$$

式(8.4 -31)和式(8.4 - 32)就是对二进制随相信号进行判决的数学关系式，根据以上二式可构成二进制随相信号最佳接收机结构如图 8 - 12 所示。

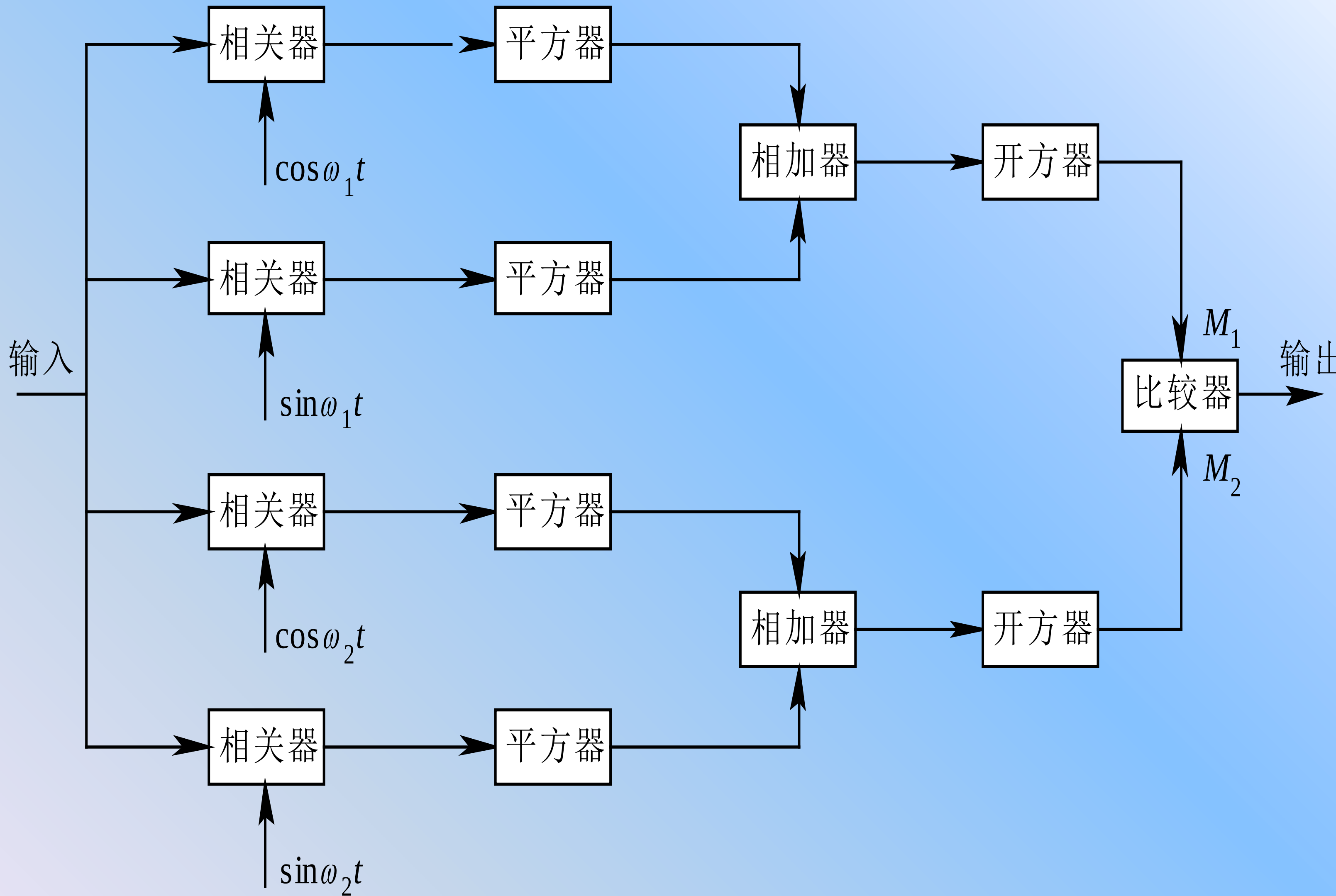

图 8 – 12　二进制随相信号最佳接收机结构

上述最佳接收机结构形式是相关器结构形式。 可以看出， 二进制随相信号最佳接收机结构比二进制确知信号最佳接收机结构复杂很多，实际中实现也较复杂。

与二进制确知信号最佳接收机分析相类似，可以采用匹配滤波器对二进制随相信号最佳接收机结构进行简化。

由于接收机输入信号$s_1(t, \varphi_1)$和$s_2(t, \varphi_2)$包含有随机相位φ_1和φ_2，因此无法实现与输入信号$s_1(t, \varphi_1)$和$s_2(t, \varphi_2)$完全匹配的匹配滤波器。我们可以设计一种匹配滤波器， 它**只与输入信号的频率匹配**，而不匹配到相位。与输入信号$s_1(t, \varphi_1)$频率相匹配的匹配滤波器单位冲激响应为

$$h_1(t)= \cos\omega_1(T-t), \qquad 0\le t\le T$$

当输入y(t)时， 该滤波器的输出为

$$e_1(t)=y(t)*h_1(t)=\int_0^t y(\tau)\cos\omega_1(T-t+\tau)d\tau$$

$$=[\int_0^t y(\tau)\cos\omega_1\tau d\tau]\cos\omega_1(T-t)-[\int_0^t y(\tau)\sin\omega_1\tau d\tau]\sin\omega_1(T-t)$$

$$=\left\{[\int_0^t y(\tau)\cos\omega_1\tau d\tau]^2+[\int_0^t y(\tau)\sin\omega_1\tau d\tau]^2\right\}^{\frac{1}{2}}\cos[\omega_1(T-t)+\theta_1] \qquad (8.4-35)$$

式中

$$\theta_1=\arctan\frac{\int_0^t y(\tau)\sin\omega_1\tau d\tau}{\int_0^t y(\tau)\cos\omega_1\tau d\tau}$$

式(8.4 - 35)在t=T时刻的取值为

$$e_1(t)=\left\{[\int_0^T Y(\tau)\cos\omega_1\tau d\tau]^2+[\int_0^T y(\tau)\sin\omega_1\tau d\tau]^2\right\}^{\frac{1}{2}}\cos\theta_1=M_1\cos\theta_1$$

可以看出， 滤波器输出信号在t=T时刻的**包络**与图 8 - 12所示的二进制随相信号最佳接收机中的参数M_1相等。这表明，**采用一个与输入随相信号频率相匹配的匹配滤波器，再级联一个包络检波器，就能得到判决器所需要的参数M_1**。

同理，选择与输入信号$s_2(t, \varphi_2)$的频率相匹配的匹配滤波器的单位冲激响应为

$$h_2(t)=\cos\omega_2(T-t), \qquad 0\le t\le T$$

$$e_2(T)=\left\{\left[\int_0^T Y(\tau)\cos w_2\tau d\tau\right]^2+\left[\int_0^T y(\tau)\sin w_2\tau d\tau\right]^2\right\}^{\frac{1}{2}}\cos\theta_2 = M_2\cos\theta_2$$

从而得到了比较器的第二个输入参数M_2，通过比较M_1和M_2的大小即可作出判决。根据以上分析，可以得到**匹配滤波器加包络检波器**结构形式的最佳接收机如图 8 - 13 所示。由于没有利用相位信息，所以这种接收机是一种非相干接收机。

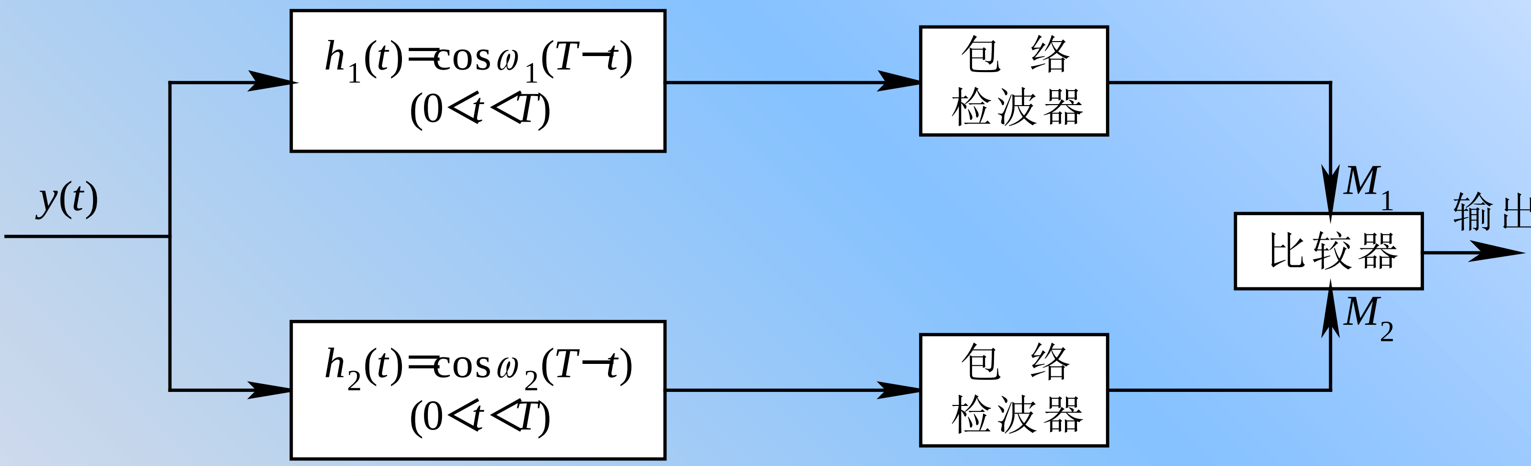

图 8 –13 匹配滤波器形式的随相信号最佳接收机结构

8.4.2二进制随相信号最佳接收机误码性能

二进制随相信号与二进制确知信号最佳接收机误码性能分析方法相同，**总的误码率**为

$$P_e=P(s_1)P_{s1}(s_2)+P(s_2)P_{s2}(s_1)$$

当发送信号$s_1(t, \varphi_1)$和$s_2(t, \varphi_2)$出现概率相等时

$$P_e=P_{s1}(s_2)=P_{s2}(s_1)$$

因此只需要分析$P_{s1}(s_2)$或$P_{s2}(s_1)$其中之一就可以，我们以$P_{s1}(s_2)$为例进行分析。

在发送$s_1(t, \varphi_1)$信号时出现错误判决的条件是

$$M_1 < M_2,\ 判为s_2$$

此时的错误概率为

$$P_{s1}(s_2)=P(M_1<M_2) \qquad (8.4-41)$$

其中，M_1和M_2如式(8.4 - 20)和式(8.4 - 21)。

与7.2节2FSK信号非相干解调分析方法相似，首先需要分别求出M_1和M_2的概率密度函数$f(M_1)$和$f(M_2)$，再来根据式(8.4 - 41)计算错误概率。

接收机输入合成波为

$$y(t)=s_1(t,\varphi_1)+n(t)=A\cos(\omega_1 t+\varphi_1)+n(t) \qquad (8.4-42)$$

在信号$s_1(t, \varphi_1)$给定的条件下，随机相位φ_1是确定值。 此时X_1和Y_1分别为

$$X_1 = \int_0^T y(t)\cos\omega_1 t dt = \int_0^T n(t)\cos\omega_1 t dt + \frac{AT}{2}\cos\phi_1$$

$$Y_1 = \int_0^T y(t)\sin\omega_1 t dt = \int_0^T n(t)\sin\omega_1 t dt + \frac{AT}{2}\sin\phi_1$$

X_1和Y_1的数学期望分别为

$$E[X_1] = E[\int_0^T n(t)\cos\omega_1 t dt + \frac{AT}{2}\cos\varphi_1] = \frac{AT}{2}\cos\varphi_1$$

$$E[Y_1] = E[\int_0^T n(t)\sin\omega_1 t dt + \frac{AT}{2}\sin\varphi_1] = \frac{AT}{2}\sin\varphi_1$$

X_1和Y_1的方差为

$$\sigma_M^2 = \sigma_{X_1}^2 = \sigma_{Y_1}^2 = \frac{n_0 T}{4}$$

由此可知，**X_1和Y_1是均值分别为** $\frac{AT}{2}$**$\cos\varphi_1$和** $\frac{AT}{2}$**$\sin\varphi_1$，方差为$n_0T/4$的高斯随机变量**。

M_1服从广义瑞利分布，其一维概率密度函数为

$$f(M_1) = \frac{M_1}{\sigma_M^2} I_0\left(\frac{ATM_1}{2\sigma_M^2}\right) \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_M^2}\left[M_1^2 + \left(\frac{AT}{2}\right)^2\right]\right\}$$

根据ω_1与ω_2构成两个正交载波,故下面两个支路的输出M_2服从瑞利分布，其一维概率密度函数为

$$f(M_2) = \frac{M_2}{\sigma_M^2} \exp\left\{-\frac{M_2^2}{2\sigma_M^2}\right\}$$

错误概率$P_{s1}(s_2)$为

$$P_{s1}(s_2) = P(M_1 < M_2) = \iint f(M_1) f(M_2)\, dM_1 dM_2$$

$$= \int_0^{\infty} f(M_1)\left[\int_{M_1}^{\infty} f(M_2)\, dM_2\right] dM_1 = \frac{1}{2} e^{-\frac{E_b}{2n_0}}$$

总的误码率为

$$P_e = P_{s1}(s_2) = \frac{1}{2}e^{-\frac{E_b}{2n_0}}$$

由误码率表示式可以看出， 二进制随相信号最佳接收机是一种非相干接收机。误码率性能曲线如图 8 - 14 所示。

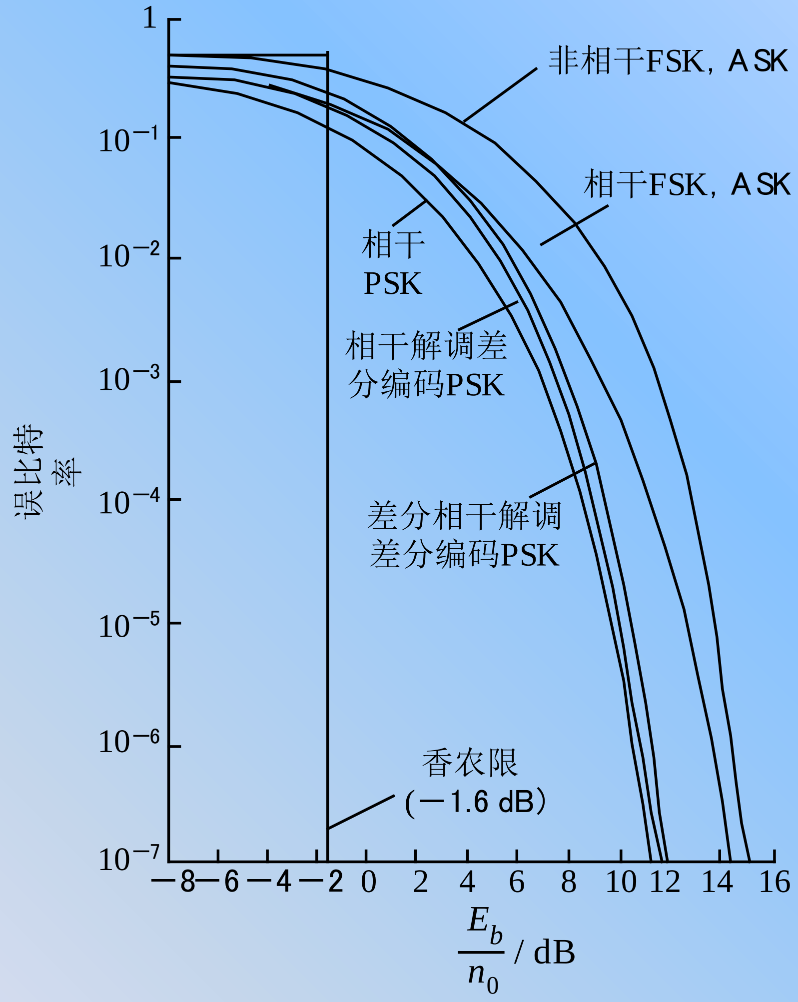

图 8－14　二进制数字调制系统误码率性能曲线

8.5 最佳接收机性能比较

本章前几节，我们在最小差错概率准则下分别得到了二进制确知信号最佳接收机结构和二进制随相信号最佳接收机结构，并深入分析了它们的误码率性能。在第 7 章，我们采用一般相干解调和非相干解调的方法，得到了2ASK、2FSK、2PSK等系统的误码率性能，下面我们将对这些系统的性能进行比较。实际接收机和最佳接收机误码性能一览表如表 8 - 1 所示。 可以看出，两种结构形式的接收机误码率表示式具有相同的数学形式，实际接收机中的信噪比r= $\dfrac{S}{N}$ 与最佳接收机中的能量噪声功率谱密度之比 $\dfrac{E_b}{n_0}$ 相对应。

表 8-1 误码率公式一览表

接收方式	实际接收机误码率Pe	最佳接收机误码率Pe
相干PSK	$\frac{1}{2}erfc(\sqrt{r})$	$\frac{1}{2}erfc(\sqrt{\frac{E_b}{n_0}})$
相干FSK	$\frac{1}{2}erfc(\sqrt{\frac{r}{2}})$	$\frac{1}{2}erfc(\sqrt{\frac{E_b}{2n_0}})$
相干ASK	$\frac{1}{2}erfc(\sqrt{\frac{r}{4}})$	$\frac{1}{2}erfc(\sqrt{\frac{E_b}{4n_0}})$
非相干ASK	$\frac{1}{2}e^{-r/2}$	$\frac{1}{2}e^{-\frac{E_b}{2n_0}}$

假设在接收机输入端信号功率和信道相同的条件下比较两种结构形式接收机的误码性能。由表 8 - 1 可以看出，横向比较两种结构形式接收机误码性能可等价于比较r与E_b/n_0的大小。在相同的条件下，若r＞E_b/n_0，实际接收机误码率小于最佳接收机误码率，则实际接收机性能优于最佳接收机性能；若r＜E_b/n_0，实际接收机误码率大于最佳接收机误码率，则最佳接收机性能优于实际接收机性能；若r=E_b/n_0，实际接收机误码率等于最佳接收机误码率，则实际接收机性能与最佳接收机性能相同。下面我们就来分析r与E_b/n_0之间的关系。由第 7 章分析我们知道，**实际接收机输入端总是有一个带通滤波器**，其作用有两个：一是使输入信号顺利通过；二是使噪声尽可能少的通过，以减小噪声对信号检测的影响。

信噪比r=S/N是指带通滤波器输出端的信噪比。设噪声为高斯白噪声，单边功率谱密度为n_0，带通滤波器的等效矩形带宽为B，则带通滤波器输出端的信噪比为

$$r = \frac{S}{N} = \frac{S}{n_0 B} \qquad (8.5-1)$$

可见，信噪比r与带通滤波器带宽B有关。

对于最佳接收系统，接收机前端没有带通滤波器，其**输入端信号能量与噪声功率谱密度之比**为

$$\frac{E_b}{n_0} = \frac{ST}{n_0} = \frac{S}{n_0\left(1/T\right)} \qquad (8.5-2)$$

式中， S为信号平均功率， T为码元时间宽度。

比较式(8.5 - 1)和式(8.5 - 2)可以看出，对系统性能的比较最终可归结为**对实际接收机带通滤波器带宽B与码元时间宽度T的比较。**若B＜ $\frac{1}{T}$ ，则实际接收机性能优于最佳接收机性能；若B＞ $\frac{1}{T}$，则最佳接收机性能优于实际接收机性能；若B= $\frac{1}{T}$，则实际接收机性能与最佳接收机性能相同。

$\frac{1}{T}$ 是基带数字信号的重复频率，对于2PSK等数字调制信号，的宽度等于2PSK信号频谱主瓣宽度的一半。若选择带通滤波器的带宽B≤ $\frac{1}{T}$ ，则必然会使信号产生严重的失真，这与实际接收机中假设“带通滤波器应使输入信号顺利通过”条件相矛盾。

这表明，在实际接收机中，为使信号顺利通过，带通滤波器的带宽必须满足B＞$\frac{1}{T}$ 。在此情况下，实际接收机性能比最佳接收机性能差。

上述分析表明： 在相同条件下， 最佳接收机性能一定优于实际接收机性能。

8.6 最佳基带传输系统

在以上几节最佳接收机讨论中， 我们所研究的问题是在给定信号的条件下，构造一种最佳接收机使对信号检测的差错概率达到最小。从分析结果我们知道，最佳接收机的性能不仅与接收机结构有关，而且与发送端所选择的信号形式有关。因此，仅仅从接收机考虑使得接收机最佳，并不一定能够达到使整个通信系统最佳。这一节我们将发送、信道和接收作为一个整体，从系统的角度出发来讨论通信系统最佳化的问题。为了使问题简化，我们以基带传输系统为例进行分析。

8.6.1最佳基带传输系统的组成

在加性高斯白噪声信道下的基带传输系统组成如图 8 - 15所示。图中，GT(ω)为发送滤波器传输函数；GR(ω)为接收滤波器传输函数；C(ω)为信道传输特性，在理想信道条件下C(ω)=1；n(t)为高斯白噪声，其双边功率谱密度为n_0^2。

最佳基带传输系统的准则是：判决器输出差错概率最小。由第 5 章基带传输系统和本章最佳接收原理我们知道，影响系统误码率性能的因素有两个：其一是码间干扰；其二是噪声。码间干扰的影响，可以通过系统传输函数的设计，使得抽样时刻样值的码间干扰为零。

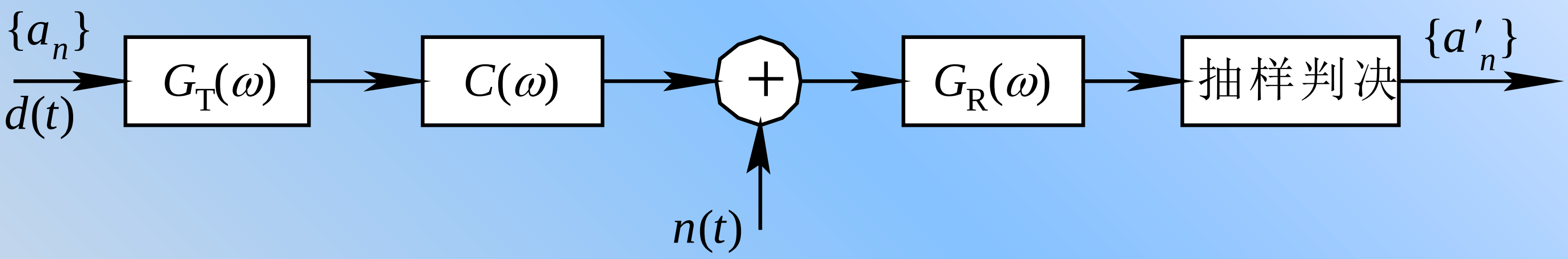

图 8 –15 基带传输系统组成

对于加性噪声的影响，可以通过接收滤波器的设计，尽可能减小噪声的影响，但是不能消除噪声的影响。最佳基带传输系统的设计就是通过对发送滤波器、接收滤波器和系统总的传输函数的设计，使系统输出差错概率最小。

设图 8 - 15 中发送滤波器的输入基带信号为

$$d(t)=\sum_{n} a_n \delta(t-nT_S) \qquad (8.6-1)$$

对于理想信道C(ω)=1， 此时系统总的传输函数为

$$H(\omega)=GT(\omega)C(\omega)GR(\omega)=GT(\omega)GR(\omega) \qquad (8.6-2)$$

由第 5 章基带传输系统我们知道，当系统总的传输函数H(ω)满足下式时就可以消除抽样时刻的码间干扰，即

$$H_{eq}(w) = \begin{cases} \sum_i H(w + \frac{2\pi i}{T_s}) = k & |w| \le \frac{\pi}{T_S} \\ 0 & |w| \ge \frac{\pi}{T_S} \end{cases} \quad (8.6-3)$$

式中， T_s为码元时间间隔，K为常数。式(8.6 - 3)是设计系统总传输函数的依据。

由匹配滤波器理论我们知道，判决器输出误码率大小与抽样时刻所得样值的信噪比有关，信噪比越大，输出误码率就越小。匹配滤波器能够在抽样时刻得到最大的信噪比。

发送信号经过信道到达接收滤波器输入端：

$$s_i(t)=d(t)*g_T(t)=\sum_n a_n g_T(t-nT_S) \qquad (8.6-4)$$

$$Si(\omega)=GT(\omega) \qquad (8.6-5)$$

为了使接收滤波器输出在抽样时刻得到最大信噪比，接收滤波器传输函数GR(ω)应满足与其输入信号频谱复共轭一致，即

$$GR(\omega)=G^*_T(\omega)e^{-j\omega t0} \qquad (8.6-6)$$

为了不失一般性，可取$t_0=0$。将式(8.6 - 2)和式(8.6 - 6)结合可得以下方程组:

$$\begin{cases} H(\omega)=G_T(\omega)G_R(\omega) \\ GR(\omega)=G^*_T(\omega) \end{cases} \qquad (8.6-7)$$

解方程组(8.6 - 7)可得:

$$|GT(\omega)|=|GR(\omega)|=|H(\omega)|\,\frac{1}{2} \qquad (8.6 - 8)$$

选择合适的相位， 使上式满足:

$$G_T(\omega)=G_R(\omega)=H^{\frac{1}{2}}(\omega) \qquad (8.6 - 9)$$

式(8.6 - 9)表明，最佳基带传输系统应该这样来设计：首先选择一个无码间干扰的系统总的传输函数H(ω)，然后将H(ω)开平方一分为二，一半作为发送滤波器的传输函数$GT(\omega)=H^{1/2}(\omega)$， 另一半作为接收滤波器的传输函数

$GR(\omega)=H^{1/2}(\omega)$。此时构成的基带系统就是一个在发送信号功率一定的约束条件下，误码率最小的最佳基带传输系统。

8.6.2最佳基带传输系统的误码性能

最佳基带传输系统组成如图 8 - 16 所示。 图中H(ω)选择为余弦滚降函数，且满足

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|H(w)\right|dw=1 \qquad (8.6\text{-}10)$$

n(t)是高斯白噪声，其双边功率谱密度为 $\frac{n_0}{2}$ 。

为了使最佳基带传输系统的误码性能分析具有一般意义，我们来讨论多进制数字基带系统的误码率。设传输的数据符号a_n具有L(假设L为偶数)种电平取值：±A、±3A，…， ±(L-1)A，这些取值都是相互独立的，并且出现概率相等。 发送滤波器输出信号平均功率为

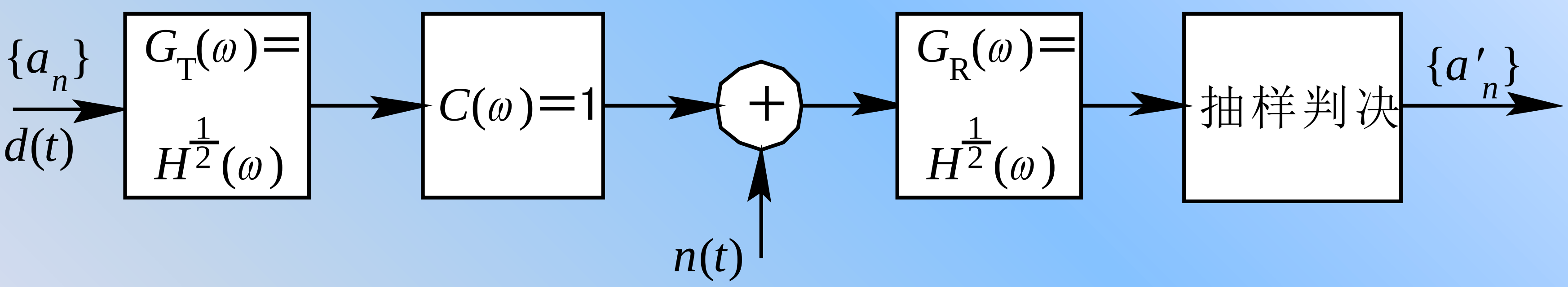

图8-16　最佳基带传输系统组成

$$s = E\left\{\lim_{M\to\infty}\frac{1}{2MT_S}\int_{-MT_S}^{MT_S}\sum_{K=-M}^{M} a_k g_T(t-kT_S)]^2 dt\right\}$$

$$= \frac{\overline{a^2}}{2\pi T_S}\int_{-\infty}^{\infty} g_T^2(t-kT_S)dt = \frac{\overline{a^2}}{2\pi T_S}\int_{-\infty}^{\infty}\left|G_T(w)\right|^2 dw$$

$$= \frac{\overline{a^2}}{2\pi T_S}\int_{-\infty}^{\infty}\left|H(w)\right| dw = \frac{\overline{a}}{T_S} \qquad (8.6\text{-}11)$$

式中，$\overline{a^2}$ 为输入基带信号电平的均方值，容易算出:

$$\overline{a^2} = \frac{2}{L}\sum_{i=1}^{L/2}[A(2i-1)]^2 = \frac{A}{3}(L^2-1) \qquad (8.6\text{-}12)$$

将式(8.6 - 12)代入式(8.6 - 11)， 可得发送滤波器输出信号平均功率为

$$S=\frac{A^2}{3T_S}(L^2-1) \qquad (8.6\text{-}13)$$

接收滤波器输出在抽样时刻的样值为

$$r(kT_s)=Ak+no(kT_s)=Ak+V \qquad (8.6\text{-}14)$$

式中，V是接收滤波器输出噪声在抽样时刻的样值，它是均值为零、方差为σ^2_n的高斯噪声， 其一维概率密度函数为

$$f(V)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{v^2}{2\sigma_n^2}\right) \qquad (8.6\text{-}15)$$

式中方差σ^2_n为

$$\sigma_n^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} p_{n_0}(w)dw = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{n_0}{2}\left|G_R(w)\right|^2 dw$$

$$= \frac{n_0}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|H(w)\right|dw = \frac{n_0}{2} \qquad (8.6\text{-}16)$$

由图 8 - 17 可以看出，判决器的判决门限电平应设置为0, ±2A，±4A， ...， ±(L-2)A。 发生错误判决的情况有：

(1) 在A_k=±A, ±3A, ..., ±(L-3)A的情况下， 噪声样值|V|＞A;

(2) 在A_k=(L-$_1$)A的情况下，噪声样值V＜-A;

(3) 在A_k=-(L-$_1$)A的情况下，噪声样值V＞A。

因此，错误概率为

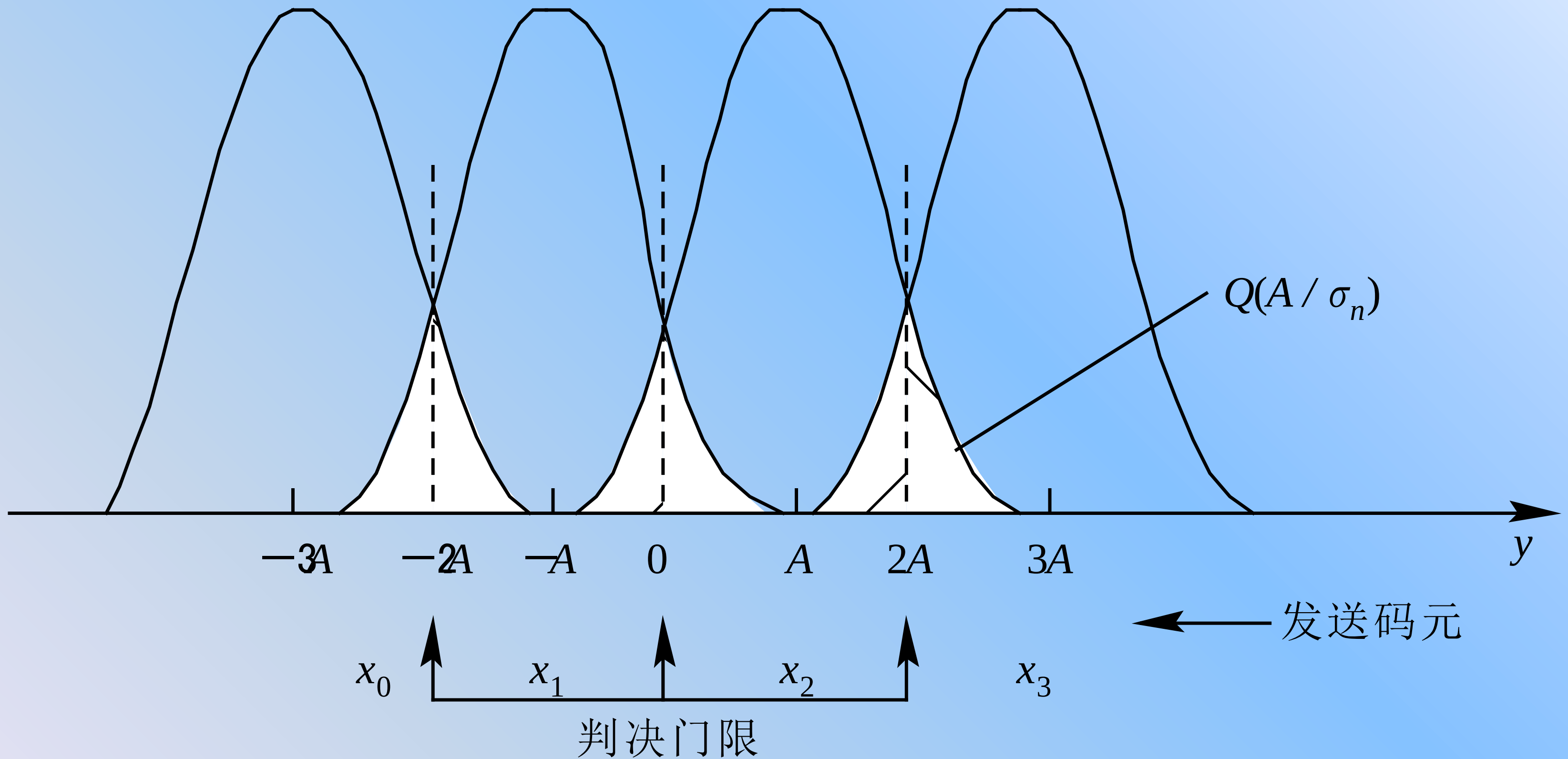

图 8－17　信号判决示意图

$$p_e = \frac{1}{L}[(L-2)P(|V|>A) + P(V<-A) + P(V>A)]$$

$$= \frac{1}{L}[(L-2)P(|V|>A) + \frac{1}{2}P(V>-A) + \frac{1}{2}P(V>A)]$$

$$= \frac{(L-1)}{L}P(|V|>A)$$

根据噪声样值分布的对称性可得

$$P(|V|>A) = 2P(V>A) = 2\int_A^{\infty} f(V)dv = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_A^{\infty}\exp(-\frac{v^2}{2\sigma_n^2})dv$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{A}{\sigma_n}}^{\infty}\exp(-\frac{v^2}{2})dv$$

$$p(e)=\frac{(L-1)}{L}[\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{A}{\sigma_n}}^{\infty}\exp(-\frac{v^2}{2})dv]=\frac{(L-1)}{L}erfc(\frac{A}{\sqrt{2}\sigma_n})$$

$$=\frac{(L-1)}{L}erfc\left[\sqrt{\frac{A^2}{n_0}}\right]$$

由式(8.6 - 13)可得

$$A^2=\frac{3ST_S}{L^2-1}=\frac{3E}{L^2-1}$$

式中，E=STs为接收信号码元能量。最后可得系统误码率为

$$Pe=\frac{(L-1)}{L}erfc\left[\sqrt{\frac{3E}{(L^2-1)n_0}}\right]$$

式即为最佳基带传输系统误码率性能， 图 8 - 18 是误码率Pe信噪比E_b/n_0的关系曲线。以上结论是以数字基带传输系统为例分析得出的，其结论也可以推广到数字调制系统。对于二进制传输系统，L=2，此时误码率公式可简化为

$$Pe=erfc\left[\sqrt{\frac{E}{n_0}}\right]$$

与8.3节式(8.3 - 39)比较可以看出， 两者相等。 这表明，二进制最佳基带传输系统的误码性与采用最佳发送波形时的二进制确知信号最佳接收机的误码性能相等。这说明，采用最佳发送波形的最佳接收机也就构成了最佳系统。

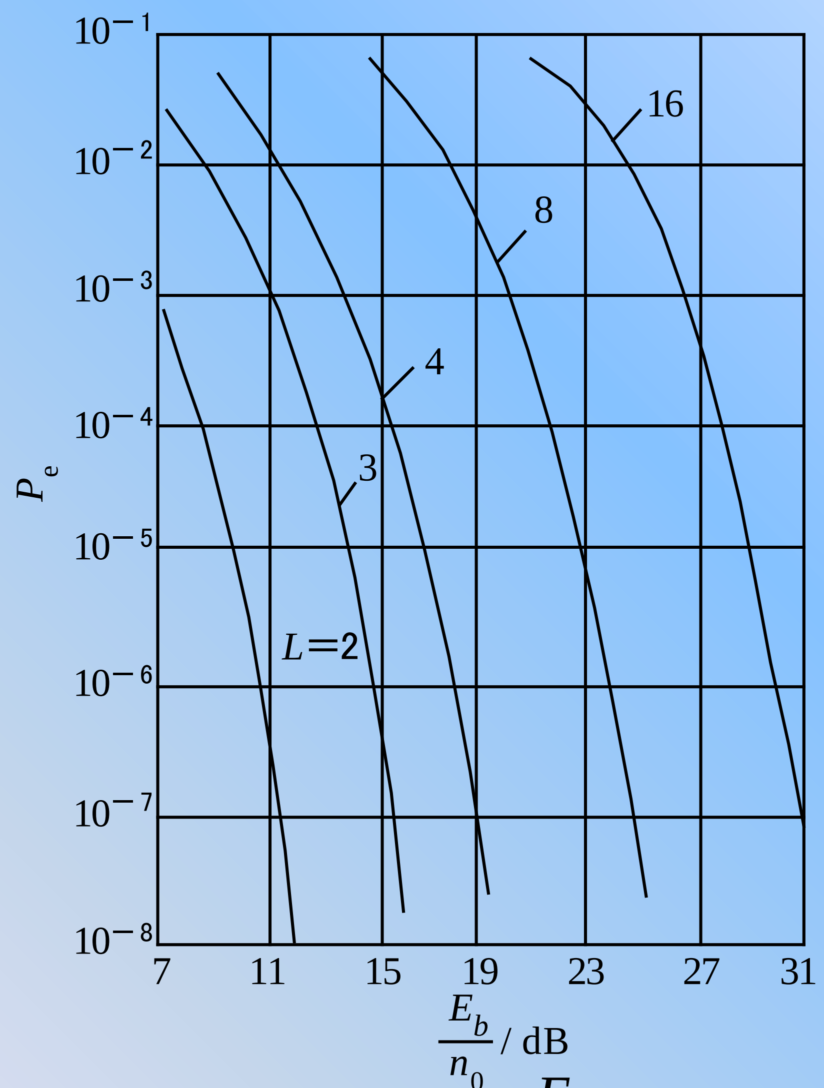

图 8 –18 误码率P_e与信噪比$\frac{E}{N_0}$ 的关系曲线

作业

1、2、3、4、7、8、9、10、11